МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

УДК 517.55

О ЯДРАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КАК УСРЕДНЕНИЯХ ФОРМУЛ КОШИ[1]

А.А.Кытманов*

Показано, что формулы интегральных представлений, ассоциированных с двумерными торическими многообразиями, могут быть получены путем усреднения ядер Коши по некоторым положительным мерам.

1 Формула Бохнера-Мартинелли как усреднение формулы Коши

Ядро $\omega(z)$ интегрального представления Бохнера-Мартинелли в $\mathbb{C}^m$ выглядит следующим образом:

$$\omega(z) = \frac{(m-1)!}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{\bar{z}_k}{|z|^{2m}} d\bar{z}[k] \wedge dz,$$

$|z| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_m|^2}$, $dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_m$, $d\bar{z}[k]$ получается из $d\bar{z}$ вычеркиванием дифференциала $d\bar{z}_k$.

Как известно, формулу интегрального представления Бохнера-Мартинелли можно получить как усреднение формулы Коши по некоторой мере $\mathrm{d}\sigma$ (см. [1], стр. 29). Действительно, пусть

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int\limits_{\substack{|z_1|^2=\varepsilon_1 \\ \cdots \\ |z_m|^2=\varepsilon_m}} \frac{f(z)dz}{z_1 \ldots z_m} \tag{1}$$

— интегральная формула Коши. Рассмотрим симплекс $\Sigma_\eta = \{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_m = \eta^2\}$ и форму $d\sigma(\varepsilon) = \sum\limits_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \varepsilon_k d\varepsilon[k]$. Тогда

$$\mathrm{mes}(\Sigma_\eta) = \int\limits_{\Sigma_\eta} d\sigma(\varepsilon) = \frac{\eta^{2m}}{(m-1)!}.$$

Имеем

$$f(0) = \frac{1}{\mathrm{mes}(\Sigma_\eta)} \int\limits_{\Sigma_\eta} f(0) d\sigma(\varepsilon) =$$

[1]Работа поддержана грантом Минобразования РФ, Е 00-1.0-151; проектом Т0270 по направлению 2.7 на этапе 2002 ФЦП "Интеграция".

$$= \frac{(m-1)!}{\eta^{2m}(2\pi i)^m} \int\limits_{\Sigma_\eta} \int\limits_{\substack{|z_1|^2=\varepsilon_1 \\ \cdots \\ |z_m|^2=\varepsilon_m}} f(z)\frac{dz}{z} \wedge \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} z_k \bar{z}_k d\bar{z}[k] \cdot z[k] =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{m(m-1)}{2}}(m-1)!}{(2\pi i)^m} \int\limits_{|z|=\eta} f(z) \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \frac{\bar{z}_k d\bar{z}[k] \wedge dz}{|z|^{2m}}.$$

Последняя формула и есть формула Бохнера-Мартинелли.

Цель данной работы состоит в получении аналогичных формул для одного построенного автором класса интегральных представлений в $\mathbb{C}^d$. Более конкретно, требуется найти дифференциальные формы (аналоги формы Эйлера) $\sigma(\varepsilon)$, относительно которых ядра интегральных представлений служат усреднениями формул Коши.

2 Ядра интегральных представлений

Приведем вид дифференциальных форм, являющихся ядрами интегральных представлений, для которых будут выписаны формулы усреднения.

Каждое ядро интегрального представления строится с помощью комплексно-двумерного торического многообразия $\mathbb{X}$.

Произвольное компактное комплексно-двумерное торическое многообразие $\mathbb{X} = \mathbb{X}^2$ определяется по полному вееру $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, который задается набором векторов $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{Z}^2$ таких, что определитель из любых двух соседних векторов v_k, v_{k+1} равняется 1 (мы считаем, что $v_{d+1} = v_1$, т.е. что v_k пронумерованы по модулю d).

В конструкции $\mathbb{X}$ важную роль играет решетка соотношений между векторами v_k. Пусть

$$\begin{cases} a_{11}v_1 + \ldots + a_{1d}v_d = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}v_1 + \ldots + a_{rd}v_d = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $r = d-2$ — все независимые линейные соотношения над $\mathbb{Z}^2$ между v_k (в §1 доказано, что базисные соотношения (2) можно выбрать с неотрицательными коэффициентами a_{ij}). Каждому вектору v_k сопоставляется комплексная переменная ζ_k так, что $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ играет роль однородных координат соответствующего торического многообразия $\mathbb{X}$.

Ядро интегрального представления $\omega(\zeta)$ обобщает упомянутую выше дифференциальную форму Бохнера-Мартинелли; оно имеет вид дифференциальной $(d,2)$-формы

$$\omega(\zeta) = \frac{h(\bar{\zeta}) \wedge d\zeta}{g(\zeta, \bar{\zeta})}, \tag{3}$$

определенной в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$. Здесь $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_d$,

$$h(\zeta) = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant d} (-1)^{j+k-1} A_{jk} \zeta[j,k] d\zeta_j \wedge d\zeta_k, \tag{4}$$

где $\zeta[j,k]$ - произведение ζ_l, $l=1,\dots,d$, $l\neq j,k$, а A_{jk} — минор матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1d}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{r1} & \dots & a_{rd}\end{pmatrix}$$

с вычеркнутыми j-м и k-м столбцами.

Для построения знаменателя g формы (3) далее везде будем требовать выполнение следующего свойства выпуклости веера Σ:

$$\det(v_j,v_{k+1})\leqslant\det(v_j,v_k)+\det(v_k,v_{k+1}),\qquad 1\leqslant j,k\leqslant d.$$

Нетрудно показать, что условие выпуклости таких троек векторов эквивалентно выпуклости многогранника с вершинами в концах векторов $v_1,\dots,v_d$.

Введем обозначение

$$\nu_j^k:=\det(v_j,v_k)-\det(v_j,v_{k+1}),\ 1\leqslant j,k\leqslant d \tag{5}$$

Условие выпуклости веера из-за того, что $\det(v_j,v_{j+1})=1$, эквивалентно следующему

$$\nu_j^k\geqslant-1,\quad\forall\ 1\leqslant j,k\leqslant d. \tag{6}$$

Теперь мы можем определить знаменатель g как полиномиальную по ζ и $\bar\zeta$ функцию:

$$g(\zeta,\bar\zeta)=\sum_{m=1}^{d}(\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+\bar1}[m,m+1],$$

где

$$(\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+\bar1}[m,m+1]=\prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant d\\ i\neq m,m+1}}(\zeta_i\bar\zeta_i)^{\nu_i^m+1}.$$

Заметим, что в силу выполнения равенств $\nu_i^i+1=\nu_{i+1}^i+1=0$ функцию $g(\zeta,\bar\zeta)$ можно переписать в виде

$$g(\zeta,\bar\zeta)=\sum_{m=1}^{d}(\zeta\bar\zeta)^{\nu^m+\bar1}.$$

3 Формулы усреднения

Введем необходимые обозначения. Прежде всего заметим, что знаменатель $g(\zeta,\bar\zeta)$ на самом деле зависит не от $2d$, а только от d переменных $\varepsilon_i=\zeta_i\bar\zeta_i=|\zeta_i|^2,\ i=1,\dots,d$. Обозначим через $g(\varepsilon)$ функцию $g(\zeta,\bar\zeta)$, где вместо $\zeta_i\bar\zeta_i$ подставлен ε_i, т.е.

$$g(\varepsilon)=\sum_{m=1}^{d}\varepsilon^{\nu^m+\bar1},$$

где

$$\varepsilon^{\nu^m+\bar1}=\prod_{1\leqslant i\leqslant d}\varepsilon_i^{\nu_i^m+1}.$$

Также пусть $h(\varepsilon)$ — форма (4).

Через $\Gamma_0(\rho)$ обозначим множество

$$\begin{cases} a_{11}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{1d}|\zeta_d|^2 = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}|\zeta_1|^2 + \ldots + a_{rd}|\zeta_d|^2 = \rho_r, \end{cases}$$

где $\rho_k > 0,\ k = 1, \ldots, r$.

Через $\Gamma_0^\varepsilon(\rho)$ обозначим множество

$$\begin{cases} a_{11}\varepsilon_1 + \ldots + a_{1d}\varepsilon_d = \rho_1 \\ \vdots \\ a_{r1}\varepsilon_1 + \ldots + a_{rd}\varepsilon_d = \rho_r, \end{cases} \tag{7}$$

$\varepsilon_i > 0,\ i = 1, \ldots, d$.

Через $\mathbb{T}^d(\varepsilon)$ обозначим следующее множество

$$\begin{cases} |z_1|^2 = \varepsilon_1 \\ \qquad \vdots \\ |z_d|^2 = \varepsilon_d. \end{cases}$$

Рассмотрим форму

$$d\sigma(\varepsilon) = \frac{h(\varepsilon)}{g(\varepsilon)},$$

заданную на симплексе $\Gamma_0^\varepsilon(\rho)$, и докажем, что она не обращается в нуль и не меняет знака на $\Gamma_0^\varepsilon(\rho)$.

Обозначим через v_{jk} определитель $\det(v_j, v_k)$.

Лемма 1. $(-1)^{j+k-1}A_{jk} = Cv_{jk}\ \forall j,k:\ 1 \leqslant j < k \leqslant d$, *где константа C не зависит от j и k.*

Доказательство. Введем обозначения: $\tilde{a}_i := (a_{i1}, \ldots, a_{id}) \subset \mathbb{R}^d,\ i = 1, \ldots, r$; $\tilde{v}^j := (v_1^j, \ldots, v_d^j) \subset \mathbb{R}^d,\ j = 1, 2$. Тогда соотношения (2) можно трактовать как ортогональность векторов $\tilde{a}_i$ и $\tilde{v}^j$, т.е. $< \tilde{a}_i, \tilde{v}^j >= 0\ \forall i, j$. Поскольку соотношения (2) независимы и $r = d-2$, то, в силу последнего равенства, линейная оболочка векторов $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2$ есть ортогональное дополнение к линейной оболочке векторов $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r$.

В данной трактовке v_{jk} есть площадь проекции на 2-мерное координатное подпространство $x_i = 0, i \neq j, k$ параллелепипеда, натянутого на векторы $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2$. $(-1)^{j+k-1}A_{jk}$ есть площадь проекции на r-мерное координатное подпространство $x_j = x_k = 0$ параллелепипеда, натянутого на векторы $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r$, с учетом ориентации проекций векторов $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_r$, согласованной с ориентацией проекций векторов $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2$.

Введем определение угла между подпространствами $\mathbb{R}^d$. Пусть E_1, E_2 — некоторые подпространства $\mathbb{R}^d$. Если $E_1 \cap E_2 = \{0\}$, то

$$\angle(E_1, E_2) := \min_{v_j \in E_j} \angle(v_1, v_2).$$

Пусть $E_1 \cap E_2 = E_{12} \subset \mathbb{R}^d$. E_{12} также является подпространством $\mathbb{R}^d$. Пусть $E_{12}^\perp$ — ортогональное дополнение к E_{12}, $\tilde{E}_j := E_j \cap E_{12}^\perp,\ j = 1, 2$. Тогда

$$\tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2 = E_1 \cap E_{12}^\perp \cap E_2 \cap E_{12}^\perp = E_{12}^\perp \cap E_{12} = \{0\}.$$

Угол между E_1 и E_2 определим следующим образом:

$$\angle(E_1, E_2) := \angle(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2) = \min_{v_j \in \tilde{E}_j} \angle(v_1, v_2).$$

Угол между линейной оболочкой векторов $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r$ и координатным подпространством $x_j = x_k = 0$ равен углу между линейной оболочкой векторов $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2$ и координатным подпространством $x_i = 0,\ i \neq j, k$. Площади проекций этих параллелепипедов на соответствующие координатные подпространства равны площадям параллелепипедов, умноженным на косинусы углов между линейными оболочками параллелепипедов и координатными подпространствами, на которые они проектируются. Поэтому отношение площадей соответствующих проекций этих параллелепипедов равно отношению площадей самих параллелепипедов. Обозначив отношение площади параллелепипеда, натянутого на векторы $\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_r$, к площади параллелепипеда, натянутого на векторы $\tilde{v}^1, \tilde{v}^2$, за константу C, получим утверждение леммы. □

Предложение 1. *Форма $h(\varepsilon)$ не обращается в нуль и не меняет знака на симплексе $\Gamma_0^\varepsilon(\rho)$.*

Доказательство. Так как система (2) линейно независима, то ранг матрицы A равен $r = d - 2$. Поэтому найдется хотя бы один отличный от нуля минор A_{jk}. Без ограничения общности считаем, что $A_{12} \neq 0$.

С помощью системы (7) выразим $\varepsilon_j,\ 3 \leqslant j \leqslant d$ через $\varepsilon_1, \varepsilon_2$:

$$\varepsilon_j = \frac{1}{A_{12}} \begin{vmatrix} a_{13} & \dots & a_{1,j-1} & \rho_1 - a_{11}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r3} & \dots & a_{r,j-1} & \rho_r - a_{r1}\varepsilon_1 - a_{r2}\varepsilon_2 & a_{r,j+1} & \dots & a_{rd} \end{vmatrix}.$$

Представляя последний определитель в виде суммы трех (раскладываем j-й столбец), вынося ε_1 и ε_2 соответственно из второго и третьего из получившихся определителей и переставляя в них j-й столбец на первое место, имеем, что

$$\varepsilon_j = \frac{1}{A_{12}} \left(A_\rho - (-1)^{j-3} A_{2j}\varepsilon_1 - (-1)^{j-3} A_{1j}\varepsilon_2 \right),$$

где

$$A_\rho = \begin{vmatrix} a_{13} & \dots & a_{1,j-1} & \rho_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r3} & \dots & a_{r,j-1} & \rho_r & a_{r,j+1} & \dots & a_{rd} \end{vmatrix}$$

— некоторая константа.

Отсюда вытекают выражения для дифференциалов $d\varepsilon_j,\ 3 \leqslant j \leqslant d$

$$d\varepsilon_j = \frac{(-1)^j}{A_{12}} (A_{2j} d\varepsilon_1 + A_{1j} d\varepsilon_2).$$

Далее, подставив в форму $h(\varepsilon)$ выражения для дифференциалов $d\varepsilon_j,\ 3 \leqslant j \leqslant d$, получим

$$h(\varepsilon) = A_{12}\varepsilon[1,2] d\varepsilon_1 \wedge d\varepsilon_2 + \sum_{j=3}^{d} (-1)^j A_{1j} \varepsilon[1,j] \frac{(-1)^j}{A_{12}} A_{1j} d\varepsilon_1 \wedge d\varepsilon_2 +$$

$$+\sum_{j=3}^{d}(-1)^{j+1}A_{2j}\varepsilon[2,j]\frac{(-1)^j}{A_{12}}A_{2j}d\varepsilon_2\wedge d\varepsilon_1+$$

$$+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant d}(-1)^{j+k-1}A_{jk}\varepsilon[j,k]\frac{(-1)^{j+k}}{A_{12}^2}(A_{2j}A_{1k}-A_{1j}A_{2k})d\varepsilon_1\wedge d\varepsilon_2.$$

Применяя лемму, имеем, что

$$(-1)^{j+k+1}(A_{2j}A_{1k}-A_{1j}A_{2k})=C(v_{2j}v_{1k}-v_{1j}v_{2k}).$$

Прямые вычисления показывают, что

$$v_{2j}v_{1k}-v_{1j}v_{2k}=-v_{12}v_{jk}.$$

Еще раз применяя лемму, получим, что

$$(-1)^{j+k+1}(A_{2j}A_{1k}-A_{1j}A_{2k})=-Cv_{12}v_{jk}=-(-1)^{j+k+1}A_{12}A_{jk}.$$

Подставляя равенство $A_{2j}A_{1k}-A_{1j}A_{2k}=-A_{12}A_{jk}$ в выражение для $h(\varepsilon)$, имеем

$$h(\varepsilon)=\frac{1}{A_{12}}\left(A_{12}^2\varepsilon[1,2]d\varepsilon_1\wedge d\varepsilon_2+\sum_{j=3}^{d}A_{1j}^2\varepsilon[1,j]d\varepsilon_1\wedge d\varepsilon_2+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=3}^{d}A_{2j}^2\varepsilon[2,j]d\varepsilon_1\wedge d\varepsilon_2+\sum_{3\leqslant j<k\leqslant d}A_{jk}^2\varepsilon[j,k]d\varepsilon_1\wedge d\varepsilon_2\right)=$$

$$=\frac{1}{A_{12}}\left(\sum_{1\leqslant j<k\leqslant d}A_{jk}^2\varepsilon[j,k]\right)d\varepsilon_1\wedge d\varepsilon_2.$$

Так как все $\varepsilon_i>0$, получаем, что форма $h(\varepsilon)$ сохраняет знак и не обращается в нуль на $\Gamma_0^\varepsilon(\rho)$. $\square$

Следствие 1.

$$\int\limits_{\Gamma_0^\varepsilon(\rho)}d\sigma(\varepsilon)=K,$$

где K — некоторая константа, отличная от нуля.

Теперь согласно следствию можно записать

$$f(0)=\frac{1}{K}\int\limits_{\Gamma_0^\varepsilon(\rho)}f(0)d\sigma(\varepsilon).$$

Применяя формулу Коши (1), имеем

$$f(0)=\frac{1}{K(2\pi i)^d}\int\limits_{\Gamma_0^\varepsilon(\rho)}d\sigma(\varepsilon)\int\limits_{\mathbb{T}^d(\varepsilon)}f(\zeta)\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\zeta_d}{\zeta_d}=$$

$$=\frac{1}{K(2\pi i)^d}\int\limits_{\Gamma_0^\varepsilon(\rho)}\int\limits_{\mathbb{T}^d(\varepsilon)}\frac{\tilde{h}(\zeta,\bar{\zeta})}{g(\zeta,\bar{\zeta})}\wedge f(\zeta)\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\zeta_d}{\zeta_d}=\frac{1}{K(2\pi i)^d}\int\limits_{\Gamma_0(\rho)}f(\zeta)\omega(\zeta).\qquad(8)$$

Здесь форма $\tilde{h}(\zeta,\bar{\zeta})$ преобразуется из формы $h(\varepsilon)$ подстановкой $\varepsilon_i = \zeta_i\bar{\zeta}_i,\ i=1,\ldots,d$:

$$\tilde{h}(\zeta,\bar{\zeta}) = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant d} (-1)^{j+k-1} A_{jk}\zeta[j,k]\bar{\zeta}[j,k](\zeta_j d\bar{\zeta}_j + \bar{\zeta}_j d\zeta_j)\wedge(\zeta_k d\bar{\zeta}_k + \bar{\zeta}_k d\zeta_k).$$

Докажем равенство (8). В силу того, что в выражении $\dfrac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\ldots\wedge\dfrac{d\zeta_d}{\zeta_d}$ содержатся все дифференциалы $d\zeta_k$, выводим

$$\tilde{h}(\zeta,\bar{\zeta})\wedge\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\zeta_d}{\zeta_d} =$$

$$= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant d} (-1)^{j+k-1} A_{jk}\zeta[j,k]\bar{\zeta}[j,k]\zeta_j d\bar{\zeta}_j\wedge\zeta_k d\bar{\zeta}_k\wedge\frac{d\zeta_1}{\zeta_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\zeta_d}{\zeta_d} =$$

$$= h(\bar{\zeta})\wedge d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_d.$$

Таким образом доказана

Теорема 1. *Формулы интегральных представлений*

$$f(0) = \frac{1}{K(2\pi i)^d}\int\limits_{\Gamma_0(\rho)} f(\zeta)\omega(\zeta)$$

могут быть получены путем усреднения ядер Коши по положительным мерам $d\sigma$.

Список литературы

[1] Tsikh A. *Residue Currents*/ A.Tsikh, A.Yger. – Encyclopedia of Mathematics.– 2002. (To appear).