XI ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ ГРУПП

Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского

Красноярск, 27 июля – 2 августа 2016 г.

Красноярск, 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Сибирский федеральный университет

Институт математики
Сибирского отделения Российской Академии наук

Институт вычислительного моделирования
Сибирского отделения Российской Академии наук

Механико-математический факультет
Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

XI ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ ГРУПП

Тезисы докладов Международной конференции,
посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского

Красноярск, 27 июля – 2 августа 2016 г.

Красноярск
СФУ
2016

УДК 512.54(07)
ББК 22.14.4я73
Ш671

Ответственные за выпуск: С. И. Башмаков, И. Н. Зотов, В. М. Левчук,
Я. Н. Нужин, А. И. Созутов

Ш671 **XI Школа-конференция по теории групп** : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию А. Ю. Ольшанского. Красноярск, 27 июля – 2 августа 2016 г. / отв. за вып. : С. И. Башмаков, И. Н. Зотов, В. М. Левчук [и др.]. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. – 96 с.

ISBN 978-5-7638-3518-2

Представленные материалы конференции посвящены актуальным вопросам теории групп.

Предназначены всем интересующимся проблемами в области математики.

УДК 512.54(07)
ББК 22.14.4я73

Электронный вариант издания см.:
http:/catalog.sfu-kras.ru

ISBN 978-5-7638-3518-2

Индуктивный подход к нахождению групп единиц целочисленных групповых колец циклических 2-групп. Локальные единицы

Р. Ж. Алеев, О. В. Митина

Южно-Уральский государственный университет (НИУ),

Челябинский государственный университет, Челябинск

Т. А. Ханенко, Е. А. Христенко

Челябинский государственный университет, Челябинск

Пусть $G = \langle x \rangle$ — циклическая группа порядка $2^n = 8m \geqslant 16$, $\mathrm{V}(\mathbf{Z}G)$ — нормализованная группа единиц целочисленного группового кольца $\mathbf{Z}G$ группы G. Пусть ζ — первообразный корень степени $8m$ из 1 и $\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])$ — группа единиц кольца $\mathbf{Z}[\zeta]$. Обозначим через $\chi_0 = 1_G$, $\chi_1, \ldots, \chi_{8m-1}$ — неприводимые комплексные характеры группы G, где $\chi_j(x^k) = \zeta^{jk}$ для любых j и k; для любого j пусть e_j — минимальный центральный идемпотент комплексной групповой алгебры $\mathbf{C}G$, соответствующий характеру χ_j. Тогда групповым гомоморфизмом является $\varphi : \mathrm{V}(\mathbf{Z}G) \to \mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])$, где $\varphi\Bigl(\sum_{k=0}^{8m-1} \beta_k e_k\Bigr) = \beta_1$. Пусть $\ker\varphi = V_0$.

Лемма 1. *V_0 изоморфна подгруппе $\bigl(1 + 2\mathbf{Z}\langle x^2\rangle\bigr) \cap \mathrm{V}(\mathbf{Z}\langle x^2\rangle)$ группы $\mathrm{V}(\mathbf{Z}\langle x^2\rangle)$.*

По индукции можем считать, что известны $\mathrm{V}(\mathbf{Z}\langle x^2\rangle)$ и V_0.

Пусть K — подгруппа круговых единиц группы $\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])$ [3]. Отметим, что индекс $|\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta] : K| = c(n)$ — числу классов кругового поля $\mathbf{Q}(\zeta)$. Проблема Вебера о числе классов [2] предполагает, что $c(n) = 1$ (доказано для всех $n \leqslant 9$). Для любого натурального числа $2j+1$ положим $t_{2j+1} = 1 + \zeta^{2j+1} + \zeta^{-(2j+1)} + \zeta^{4j+2} + \zeta^{-(4j+2)}$.

Лемма 2. *$\langle t_1^{2m}\rangle \times \prod_{l=1}^{m-1} \bigl\langle t_{2l+1}^{-1} t_{4m-2l-1}\bigr\rangle \times \prod_{l=1}^{m-1} \bigl\langle t_1^m t_{2l+1}^m\bigr\rangle \leqslant K \cap (1 + 2\mathbf{Z}[\zeta])$.*

Согласно [1] для любой единицы λ из $\mathrm{U}(\mathbf{Z}[\zeta])$ определяется локальная единица $u(\lambda) = u_{\chi_1}(\lambda)$. Пусть

$$V_1 = \langle u(t_1^{2m})\rangle \times \prod_{l=1}^{m-1} \bigl\langle u(t_{2l+1}^{-1} t_{4m-2l-1})\bigr\rangle \times \prod_{l=1}^{m-1} \langle u(t_1^m t_{2l+1}^m)\rangle .$$

Теорема 1. *При введённых ранее обозначениях имеем*

$$|\mathrm{V}(\mathbf{Z}G) : \langle x\rangle \times V_0 \times V_1| \leqslant c(n)2m \cdot m^{m-1} = c(n)2^{(n-3)2^{n-3}+1}.$$

Получено полное описание группы единиц целочисленных групповых колец циклических групп порядков 16 и 32.

Список литературы

1. Р. Ж. Алеев. Единицы полей характеров и центральные единицы целочисленных групповых колец конечных групп // Матем. тр. 2000. Т. 3, № 1. С. 3–37.
2. J. C. Miller. Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem // Acta Arithmetica. 2014. V. 164, № 4. P. 381–397.
3. W. Sinnott. On the Stickelberger ideal and circular units of a cyclotomic field // Ann. of Math. 1978. V. 108, № 1. P. 107–134.

Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников

О. А. Алексеева

Московский университет имени С. Ю. Витте, Москва

А. С. Кондратьев

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

Графом простых чисел (или графом Грюнберга — Кегеля) $\Gamma(G)$ конечной группы G называется граф, в котором вершинами служат простые делители порядка группы G и две вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq.

Лючидо [1] описала конечные простые группы G такие, что связные компоненты графа $\Gamma(G)$ являются деревьями, т. е. связными графами, не содержащими циклы. Кроме того, в этой работе описано строение конечной группы, граф простых чисел которой является деревом. Мы рассматриваем более общую задачу описания строения конечной группы G такой, что граф $\Gamma(G)$ не содержит только треугольников (3-циклов). В докладе обсуждаются как недавно опубликованные в [2] и [3], так и новые результаты, полученные нами по этой задаче.

Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 15-11-10025).

Список литературы

1. M. C. Lucido. Groups in which the prime graph is a tree // Boll. Unione Mat. Ital. (8). 2002. V. 5-B, № 1. P. 131–148.

2. О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. I // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 3. С. 3–12.

3. О. А. Алексеева, А. С. Кондратьев. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. II // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 3–13.

Об автоморфизмах полугруппы эндоморфизмов некоторых относительно свободных групп

В. С. Атабекян

Ереванский государственный университет, Ереван

Говорят, что подгруппа H группы G само-централизуется, если ее централизатор $C_G(H)$ содержится в H. В докладе будет показано, что для некоторых относительно свободных групп F с само-централизующимися подгруппами (таковыми являются, например, абсолютно свободные и свободные бернсайдовы группы достаточно большого нечетного периода) группа автоморфизмов полугруппы эндоморфизмов $Aut(End(F))$ канонически изоморфна группе $Aut(F)$.

О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа $(2, 2, n, 2, 2, m)$

В. В. Беняш-Кривец

Белорусский государственный университет, Минск

Я. А. Жуковец

Белорусский государственный педагогический университет имени М. Танка, Минск

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$\Gamma = \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1, x_2)^{m_{12}} = \\ = R_{13}(x_1, x_3)^{m_{13}} = R_{23}(x_2, x_3)^{m_{23}} = 1\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, m_{ij} \geq 2$, R_{ij} — циклически редуцированное слово в свободном произведении $\langle x_i \mid x_i^{k_i}\rangle * \langle x_j \mid x_j^{k_j}\rangle$, которое не является собственной степенью. В [1] выдвинута гипотеза, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса, т. е. каждая такая группа содержит либо разрешимую подгруппу конечного индекса, либо свободную подгруппу ранга 2. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп, кроме групп следующих типов [1, 2]:

1) $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha x_2^{\beta}})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^2 = R_{13}(x_1, x_3)^n = 1\rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq 1$;

2) $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha x_2^{\beta}})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^3 = (x_1^{\eta} x_3^{\theta})^n = 1\rangle$, $n = 3, 4, 5$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq \frac{7}{6}$;

3) $\langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha x_2^{\beta}})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^3 = (x_1^{\eta_1} x_3^{\theta_1} x_1^{\eta_2} x_3^{\theta_2})^2 = 1\rangle$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{2}{3}$.

В данной работе мы рассматриваем следующий класс групп первого типа:

$$\Gamma = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^n = (ab)^2 = (ac^{\alpha})^2 = R^m(b, c) = 1\rangle. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Пусть Γ имеет копредставление (1), где $m \geq 3$, $n \geq 6$. Тогда если группа Γ отлична от группы $\Gamma_1 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^6 = (ab)^2 = (ac)^2 = (bc)^3 = 1\rangle$, то Γ содержит неабелеву свободную подгруппу. Группа Γ_1 является почти разрешимой.*

Список литературы

1. B. Fine, G. Rosenberger. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York, 1999.

2. J. Howie, N. Kopteva. The Tits alternative for generalized tetrahedron groups // J. Group Theory. 2006. V. 9. P. 173–189.

Периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями конечных элементарных абелевых 2-групп и группы $U_3(2^n)$

А. А. Брит, К. А. Филиппов, А. С. Федосенко

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск

Пусть $\Re$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\Re$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\Re$ [1].

Напомним, что группа G (сопряженно бипримитивно конечная группа в определении В. П. Шункова [2]) называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H \leq G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Пусть I_n — прямое произведение n экземпляров группы порядка 2.

Доказана следующая

Теорема 1. *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{U_3(q) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, где $q = 2^k$ — фиксированное число, локально конечна и изоморфна $U_3(q) \times I$, где I — бесконечная группа периода 2.*

Список литературы

1. А. К. Шлепкин. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // III Междунар. конф. по алгебре: сб. тез. Красноярск, 1993. С. 369.

2. В. П. Шунков. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.

О бесконечных группах Альперина произвольной мощности

Б. М. Веретенников

Уральский федеральный университет, Екатеринбург

Следующая теорема является обобщением теоремы 1 в [1].

Теорема 1. *Пусть μ — произвольное порядковое число, $\mu \geq 3$, группа G задана порождающими a_i, f_{ij}, τ_{ijk}, где i, j, k – всевозможные непредельные порядковые числа с условием $1 \leq i, j, k \leq \mu$, и определяющими соотношениями:*

1) $[a_i, a_j] = f_{ij}$;
2) $[f_{ij}, a_k] = f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2}$;
3) $[\tau_{ijk}, a_s] = 1$;
4) $[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs}\tau_{ksi}$;
5) $(f_{ij} f_{jk} f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$;
6) $\tau_{sij}\tau_{sjk}\tau_{ski} = \tau_{ijk}$,

где для всех соотношений индексы i, j, k, s — любые непредельные порядковые числа, не превосходящие μ.

Тогда $G'' = \prod\limits_{1 \leq i < j \leq \mu} \langle \tau_{1ij} \rangle$ — прямое произведение бесконечных циклических групп $\langle \tau_{1ij} \rangle$ и G — группа Альперина без кручения.

Следствие 1. *Для любой абелевой группы H существует группа Альперина G такая, что $H \simeq G''$.*

Список литературы

1. Б. М. Веретенников. О бесконечных группах Альперина // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12, С. 210–222.

Об индуктивных решетках насыщенных формаций

Н. Н. Воробьев, А. Р. Кузнецова
Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск

Все рассматриваемые группы конечны. Мы будем рассматривать терминологию из [1–3]. Через $F_p(G)$ обозначают наибольшую нормальную p-нильпотентную подгруппу группы G. Символ $\pi(G)$ обозначает множество всех различных простых делителей порядка группы G, а $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп. Пусть f – произвольная функция вида

$$f : \mathbb{P} \to \{\text{формации групп}\}. \tag{1}$$

Следуя [1], сопоставим функции f класс групп

$$LF(f) = (G \mid G/F_p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(G)).$$

Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = LF(f)$ для некоторой функции f вида (1), то $\mathfrak{F}$ называют насыщенной формацией с локальным спутником f [1].

Совокупность формаций Θ называется полной решеткой формаций [2], если пересечение любой совокупности формаций из Θ снова принадлежит Θ и во множестве Θ имеется такая формация $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ для любой формации $\mathfrak{H} \in \Theta$. Пусть $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Относительно включения $\subseteq$ множество всех насыщенных формаций, заключенных между $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{F}$, образуют полную решетку, обозначаемую $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$.

Для произвольной полной решетки формаций Θ символом Θ^l обозначается полная решетка всех таких насыщенных формаций, которые определяются Θ-значными функциями, т.е. такими функциями, все непустые значения которых принадлежат Θ.

Пусть Θ – полная решетка формаций. Тогда верхняя грань произвольной совокупности $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ элементов из Θ^l обозначается (см. [2]) через $\vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$. Решетка Θ^l называется индуктивной [2], если для любого набора $\mathfrak{F}_i = LF(f_i)$ формаций $\mathfrak{F}_i \in \Theta^l$ и для всякого такого набора $\{f_i \mid i \in I\}$ Θ-значных спутников f_i, где f_i – некоторый внутренний спутник формации $\mathfrak{F}_i$, имеет место $\vee_{\Theta^l}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = LF(\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I))$, где символ $\vee_{\Theta}(f_i \mid i \in I)$

обозначает такой спутник f, что $f(p)$ является верхней гранью для $\{f_i(p) \mid i \in I\}$ в Θ, если $\bigcup\limits_{i\in I} f_i(p) \neq \varnothing$, и $f(p) = \varnothing$ в противном случае.

Заметим, что индуктивность решетки Θ^l по существу означает, что исследование операции $\vee_{\Theta^l}$ на множестве Θ^l можно редуцировать к исследованию более простой операции $\vee_\Theta$ на множестве Θ.

Основным результатом является следующая

Теорема 1. Решетка $\mathfrak{F}/_l\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ индуктивна.

Список литературы

1. Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989. 256 с.
2. А. Н. Скиба. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997. 240 с.
3. Н. Н. Воробьев. Алгебра классов конечных групп. Витебск: ВГУ им. П. М. Машерова, 2012. 322 с.

Инъекторы частично разрешимых конечных групп

Н. Т. Воробьев

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск

Т. Б. Василевич

Витебское кадетское училище, Лужесно

Классом Фиттинга называется класс групп $\mathfrak{F}$, удовлетворяющий следующим требованиям:

1) каждая нормальная подгруппа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) если нормальные подгруппы M и N группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, то произведение MN принадлежит $\mathfrak{F}$.

Подгруппа V группы G называется ее $\mathfrak{F}$-инъектором, если $V \cap N$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой группы N для любой субнормальной подгруппы N группы G [1].

Пусть $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга. Подгруппа $G_{\mathfrak{F}}$ группы G называется $\mathfrak{F}$-радикалом группы, если она является максимальной из нормальных подгрупп группы G, принадлежащих $\mathfrak{F}$.

Напомним, что функцией Хартли или H-функцией называется всякое отображение $f : \mathbb{P} \to$ классы Фиттинга, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Множество $\pi = \{p \in \mathbb{P} : f(p) \neq \emptyset\}$ называют носителем H-функции f [2].

Пусть класс Фиттинга $LR(f) = \mathfrak{E}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'})$.

Тогда $\mathfrak{F}$ называют локальным классом Фиттинга, если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой H-функции f.

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — непустые классы Фиттинга, причем $\mathfrak{F}$ локален и определяется H-функцией f с носителем π такой, что $f(p) = \mathfrak{X}$ для каждого простого $p \in \pi$.

Следующая теорема характеризует $\mathfrak{F}$-инъекторы частично разрешимых групп.

Теорема 1. *Пусть G — такая группа, что $G/G_{\mathfrak{X}}$ π-разрешима. Тогда подгруппа V является $\mathfrak{F}$-инъектором G в том и только в том случае, если V $\mathfrak{F}$-максимальна в G и $V \geq G_{\mathfrak{X}}$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2020».

Список литературы

1. K. Doerk, T. Hawkes. Finite soluble groups. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1992.
2. Н. Т. Воробьёв. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1296–1302.

Норменное свойство символа Гильберта для многочленных формальных групп

С. В. Востоков, В. В. Волков

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

В работе [1] была получена явная формула закона взаимности Гильберта, позволившая построить локальную теорию полей классов в явном виде. В работе [2] аналогичная формула была получена для случая многомерного локального поля.

Серия работ [3, 4, 5] продолжает эти результаты на случай спаривания, построенного по мультипликативной группе и многочелнной формальной группе $F_c(X, Y) = X + Y + cXY$.

Пусть K — локальное поле, содержащее корень p^m степени из 1, $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал кольца целых в K, c — единица в K. Обозначим через W_c модуль корней изогении $[p^m]_{F_c}(X)$. Пользуясь отображением взаимности локальной теории полей классов $\sigma\colon K^* \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K)$, можно задать спаривание, являющееся аналогом символа Гильберта для формальной группы F_c:

$$(\cdot,\cdot)_c\colon K^* \times F_c(\mathfrak{M}) \to W_c$$
$$\alpha, \beta \mapsto B^{\sigma(\alpha)} -_{F_c} B\,,$$

где B это корень уравнения $[p^m]_{F_c}(B) = \beta$. В работе [3] это же спаривание построено конструктивно, с помощью явной формулы. В работах [4, 5] аналогичная формула построена для n-мерного локального поля K. В этом случае спаривание принимает вид

$$(\cdot,\cdot)_c\colon K_n(K^*) \times F_c(\mathfrak{M}) \to W_c$$

и в качестве σ используется отношение взаимности Паршина — Като.

Важнейшим для построения явного аналога локальной теории полей классов, является норменное свойство спаривания, связывающее спаривание и структуру групп норм расширегий поля K. Явным образом, с помощью построенных формул, получен следующий результат.

Теорема 1 (Норменное свойство)**.** *В случаях* $n = 1$ *и* $n = 2$, $m = 1$ *имеет место норменное свойство спаривания*

$$\langle \alpha, \beta \rangle_c = 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \mathrm{Norm}(K_n(K(B)))\,,$$

где B *это корень уравнения* $[p^m]_{F_c}(B) = \beta$*, а* Norm *— отображение нормы.*

Авторы поддержаны грантом РНФ (проект 16-11-10200).

Список литературы

1. С. В. Востоков. Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1978. Т. 42, № 6. С. 1288–1321.

2. С. В. Востоков. Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1985. Т. 49, № 2. С. 283–308.

3. С. В. Востоков, В. В. Волков. Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 5. С. 125–141.

4. С. В. Востоков, В. В. Волков, М. В. Бондарко. Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей в многомерном локальном поле I // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2014. Т. 430. С. 53–60.

5. С. В. Востоков, В. В. Волков. Явная форма символа Гильберта для многочленных формальных модулей в многомерном локальном поле II // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2016. Т. 443. С. 46–60.

Определяемость векторных групп своим голоморфом

Гриншпон Самуил Яковлевич

Томский государственный университет, Томск

Гриншпон Ирина Эдуардовна

Томский университет систем управления и радиоэлектроники, Томск

Две группы называются *голоморфно изоморфными*, если голоморфы этих групп изоморфны. Говорят, что группа A *определяется своим голоморфом в некотором классе групп*, если любая группа B из этого класса, голоморфно изоморфная группе A, изоморфна группе A. Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [1]. В [2] В. Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Ряд интересных результатов об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [3, 4]. Полезные результаты о голоморфах (аффинных группах) модулей содержатся в [5].

Подгруппа S голоморфа $\Gamma(G)$ называется *голоморфно разложимой*, если для любого элемента $(g, \varphi) \in S$ следует, что $(g, \varepsilon) \in S$ и

$(0, \varphi) \in S$, т.е. $S = S_1 \oplus \Phi$, S_1, Φ — множества всех первых, вторых компонент элементов группы S соответственно. Понятие голоморфной разложимости групп было введено И. Х. Беккером [6].

Пусть G и H — голоморфно изоморфные абелевы группы без кручения и пусть $G = G_1 \oplus G_2$, $H = H_1 \oplus H_2$ — разложения групп G и H, индуцированные изоморфизмом голоморфов [6], где G_1 и H_1 — характеристические подгруппы групп G и H соответственно, $G_1 \cong H_1$, $G_2 \cong \mathrm{Hom}(H_2, H_1)$, $H_2 \cong \mathrm{Hom}(G_2, G_1)$ и $\mathrm{Hom}((G_2, G_1), G_1) \cong \mathrm{Hom}(H_2, H_1) \cong G_2$.

Разложение группы G вида $G = G_1 \oplus G_2$ называется *полухарактеристическим*, если G_1 — характеристическая подгруппа группы G.

Полухарактеристическое разложение $G = G_1 \oplus G_2$ группы G, индуцированное изоморфизмом голоморфов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$, назовем Γ-*разложением.* В частности, G_1 может совпадать с G ($G_2 = 0$). Такое Γ-разложение будем называть *тривиальным.*

Векторной группой называется прямое произведение групп без кручения ранга 1 [7].

Пусть $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ — редуцированная векторная группа, мощность которой неизмерима, $G = G_1 \oplus G_2$ — некоторое ее Γ-разложение. Тогда $G_1 = \prod\limits_{\alpha \in I_1} G_\alpha$, $G_2 = \prod\limits_{\beta \in I_2} G_\beta$, где $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ([8]).

Введем обозначения:

$$\mathrm{I}(\mathbf{t}) = \{\beta \in I_2 \,|\, \mathbf{t}(G_\beta) = \mathbf{t}\};$$

$$T(\alpha) = \{\mathbf{t} \in T(G_2) \,|\, \mathbf{t} \leqslant \mathbf{t}(G_\alpha)\};$$

$$I_1' = \{\alpha \in I_1 \mid \mathrm{Hom}(G_2, G_\alpha) \neq 0\},$$

где $T(G_2)$ — множество всех различных типов канонического разложения группы $G_2 = \prod\limits_{\beta \in I_2} G_\beta = \prod\limits_{\mathbf{t} \in T(G_2)} G_2^{(\mathbf{t})}$.

Авторами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ – класс всех векторных групп. Группа G из класса $\mathfrak{R}$ определяется своим голоморфом в этом классе, если каждое полухарактеристическое Γ-разложение $G = G_1 \oplus G_2$ группы G удовлетворяет одному из условий:*

1) существует такой тип $\mathbf{t}_0 \in T(G_2)$, *что* $|\mathrm{I}(\mathbf{t}_0)| \geqslant \aleph_0$;

2) существует такой $\alpha \in I_1$, *что* $|T(\alpha)| \geqslant \aleph_0$.

Теорема 2. *Пусть* $\Re$ *– класс всех векторных групп. Группа* G *из класса* $\Re$ *определяется своим голоморфом в классе* $\Re$, *если для любого полухарактеристического разложения* $G = G_1 \oplus G_2$ *выполняется условие* $|I_1'| \neq 1$.

Теорема 3. $\Re$ *— класс всех векторных групп. Пусть для любого полухарактеристического разложения* $G = G_1 \oplus G_2$ *выполняется условие* $|I_1'| = 1$. *Группа* G *из класса* $\Re$ *определяется своим голоморфом в классе* $\Re$, *если группы* G_α *и* G_2 *удовлетворяют одному из условий:*

1) $|I_2| \geqslant \aleph_0$;

2) $|I_2| < \aleph_0$ *и группы* G_α *и* G_2 *не являются одновременно* π*-делимыми;*

3) $|I_2| < \aleph_0$, *группы* G_α *и* G_2 *одновременно* π*-делимы, для любого* $\beta \in I_2$ *существует такое* $j \in I_2$, *что* $\mathbf{t}_0 - \mathbf{t}(G_\beta) = \mathbf{t}(G_j)$ *и* $r_G(\mathbf{t}(G_\beta)) = r_G(\mathbf{t}(G_j))$.

Список литературы

1. G. A. Miller. On the multiple holomorph of a group // Math. Ann. 1908. V. 66. P. 133–142.

2. W. H. Mills. On the non-isomorphism of certain holomorphs // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74, № 3. P. 428–443.

3. И. Х. Беккер. Абелевы группы с изоморфными голоморфами // Изв. вузов. Сер. Матем. 1975. № 3. С. 97–99.

4. И. Х. Беккер. Абелевы голоморфные группы // Межд. конф. «Всесибирские чтения по матем. и мех.» Избр. докл. Т. 1. Матем. 1997. С. 43–47.

5. П. А. Крылов. Аффинные группы модулей и их автоморфизмы // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 1. С. 60–82.

6. Л. Фукс. Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977. Т. 2. 416 с.

7. J. D. O'Neill. Direct summands of vector groups // Acta. Math. Hung. 1990. V. 55, № 3–4. P. 207–209.

Циклические элементарные сети

Н. А. Джусоева, Р. Ю. Дряева
Северо-Осетинский государственный университет, Владикавказ

В. А. Койбаев
Северо-Осетинский государственный университет,
Южный математический институт РАН, Владикавказ

Изучение надгрупп нерасщепимого максимального тора, связанного с радикальным расширением $K = k(\sqrt[n]{d})$ степени n поля k, тесно сопряжено с циклическими элементарными сетями порядка n, ассоциированными с промежуточными подгруппами.

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\quad 1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью [1] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Для сети принят также термин «ковер»[2]. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер [3], вопрос 15.46).

Элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i \neq j \leq n$, называется дополняемой, если для некоторых аддитивных подгрупп σ_{ii} кольца R таблица (с диагональю) $\sigma = (\sigma_{ij}), 1 \leq i, j \leq n$ является (полной) сетью.

Пусть $A_2, \ldots, A_n$ — подгруппы аддитивной группы кольца R, $d \in R$. Через $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы обозначаем таблицу (без диагонали), определенную следующим образом: $\sigma_{ij} = A_{i+1-j}$ при $j < i$ и $\sigma_{ij} = dA_{n+i+1-j}$ при $j > i$. Если так определенная таблица является элементарной сетью, то $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы называем циклической элементарной сетью.

Теорема 1. *Для нечетного n, $n \geq 3$, циклическая элементарная сеть $\sigma = (\sigma_{ij})$ порядка n является дополняемой.*

Отметим, что условие нечетности n, требуемое в теореме, существенно. Нам известен пример циклической элементарной сети произвольного четного порядка, которая не является дополняемой.

Результаты настоящей заметки были получены в рамках государственного задания Министерства образования и науки России.

Список литературы

1. З. И. Боревич. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1978. Т. 75, № 5. С. 22–31.
2. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М.: Наука. 1982. 288 с.
3. В. М. Левчук. Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. Т. 22, № 5. 1983. С. 504–517.

О финитной неаппроксимируемости для уравнений в свободных группах, разрешенных относительно неизвестных

В. Г. Дурнев, О. В. Зеткина, А. И. Зеткина

Ярославский государственный университет, Ярославль

Обозначим через F_n свободную группу ранга n со свободными образующими a_1, ..., a_n. Хорошо известно, что свободная группа F_n является финитно аппроксимируемой [1]. А. И. Мальцев [2] указал на важность изучения свойств финитной аппроксимируемости групп относительно различных предикатов. Г. Баумслаг [3] установил финитную аппроксимируемость свободных групп относительно сопряженности и возможности извлечения корня простой степени, т.е. относительно разрешимости уравнений вида $x^{-1}hx = g$ и $x^p = g$, где h и g – элементы свободной группы. В работе [4] отмечается финитная аппроксимируемость свободных групп относительно разрешимости уравнений вида $[x, y] = g$ и $x^n = g$. В этой же работе построено уравнение вида $w(x_1, \ldots, x_4, a_1, a_2) = 1$ такое, что оно не имеет решения в свободной группе F_2 со свободными образующими a_1 и a_2, но уравнение $w(x_1, \ldots, x_4, \overline{a_1}, \overline{a_2}) = 1$ имеет решение в любой конечной факторгруппе F_2/N, где $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ – образы в факторгруппе F_2/N при естественном гомоморфизме свободных образующих a_1 и a_2 группы F_2.

В настоящей заметке усиливается этот результат, что составляет содержание следующей теоремы.

Теорема 1. *При любом $n \geq 2$ и любых неотрицательных m, p и q уравнение*

$$((x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+q}t^{2m+3})^4[u,v] = [a_1,a_2]$$

не имеет решения в свободной группе F_n, однако уравнение

$$((x^2u)^{2+p}(z^{-1}y^2vz)^{2+q}t^{2m+3})^4[u,v] = [\overline{a_1},\overline{a_2}]$$

имеет решение в любой конечной факторгруппе F_n/N, где через $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ обозначены образы свободных образующих a_1 и a_2 свободной группы F_n относительно ее естественного гомоморфизма на факторгруппу F_n/N.

Построенное в теореме уравнение имеет вид $w(x_1,\ldots,x_6) = g$, где g — элемент g длины 4. Можно показать, что дальнейшее уменьшение длины элемента g невозможно: для уравнений с любым числом неизвестных вида $w(x_1,\ldots,x_m) = g$ в произвольной свободной группе F_n, где элемент g свободной группы F_n имеет длину меньше 4, имеет место финитная аппроксимируемость. Открытым остается вопрос для уравнений, разрешенных относительно неизвестных, с числом неизвестных 2, 3, 4 и 5.

Список литературы

1. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. А. И. Мальцев. О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иванов. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
3. G. Baumslag. Residual nilpotency and relations in free groups // J. of Algebra. 1965. V. 2. P. 271–282.
4. T. Coulbois, A. Khelif. Equations in free groups are not finitely approximable // Proceed. of the American math. society. 1999. V. 127, № 4. P. 963–965.

Описание алгебры Ли допустимых операторов системы дифференциальных уравнений плоского напряжённого состояния при условии пластичности

О. Н. Жданов

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Исследуется система дифференциальных уравнений, описывающая плоское напряжённое состояние при условии постоянства интенсивности касательных напряжений. Заменой переменных систему можно привести к виду [1]:

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos2\varphi - \frac{1}{2}ctg\omega\right)\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{2}sin2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}sin2\varphi\frac{\partial\omega}{\partial x} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos2\varphi + \frac{1}{2}ctg\omega\right)\frac{\partial\omega}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} \end{cases} \tag{1}$$

Теорема 1. *Алгебра Ли L системы уравнений (1) порождается операторами*

$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{y}{\partial y}, X_2 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial\varphi}, X_3 = t^1\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial y},$
где t^1, t^2 *— решение системы*

$$\begin{cases} \frac{\partial t^1}{\partial\omega} + \frac{\sqrt{3}}{2}sin2\varphi\frac{\partial t^1}{\partial\varphi} + \left(\frac{1}{2}ctg\omega - \frac{\sqrt{3}}{2}cos2\varphi\right)\frac{\partial t^2}{\partial\varphi} = 0, \\ \left(\frac{1}{2}ctg\omega + \frac{\sqrt{3}}{2}cos2\varphi\right)\frac{\partial t^1}{\partial\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{2}sin2\varphi\frac{\partial t^2}{\partial\varphi} - \frac{\partial t^2}{\partial\omega} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Соответствующая этой алгебре группа Ли представляет собой максимальную группу преобразований, допускаемую системой (1).

Следствие 1. Алгебра L является разрешимой алгеброй ступени разрешимости 2.

Следствие 2. Алгебра L имеет две одномерные неподобные подалгебры, порожденные операторами X_1 и X_2, а X_3 порождает идеал алгебры L.

Действуя группой преобразований на полученные инвариантные решения, можно находить новые решения системы (1).

Список литературы

1. В. В. Соколовский. Теория пластичности. М. – Л.: ГИТТЛ, 1950.

О локально конечных π-разделимых группах

А. Х. Журтов, З. Б. Селяева

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — его дополнение во множестве всех простых чисел. Скажем, что группа G является π-разделимой, если она обладает конечным нормальным рядом, каждый фактор которого является либо π-группой, либо π'-группой. Такой ряд называется π-рядом группы G, и наименьшее возможное число π-факторов в π-рядах группы G называется π-длиной G.

В [1] доказывается, что π-длина π-разделимой локально конечной группы не превосходит m, если π-длина любой конечной подгруппы из G не превосходит m. Оказывается, что условие π-разделимости G излишне.

Теорема 1. *Пусть G — локально конечная группа и m — натуральное число. Если любая конечная подгруппа группы G является π-разделимой π-длины, не превосходящей m, то G сама π-разделима π-длины, не превосходящей m.*

Список литературы

1. А. Х. Журтов, З. Б. Селяева. О локально конечных π-разделимых группах // Владикавказ. матем. журн. 2015. Т. 17, № 2. С. 16–21.

О пересечении абелевой и нильпотентной подгрупп в конечной группе

В. И. Зенков

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

В работе [1, теорема 1] доказано, что в разрешимой конечной группе G для любой абелевой подгруппы A и любой нильпотентной подгруппы B найдется элемент g из G такой, что $A \cap B^g \le F(G)$. В данной работе с использованием классификации конечных простых групп доказана

Теорема 1. *Пусть G — произвольная конечная группа, A — абелева и B — нильпотентная подгруппы в G. Тогда найдется элемент g из G такой, что $A \cap B^g \leq F(G)$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

Список литературы

1. В. И. Зенков. О пересечениях абелевых и нильпотентных подгрупп в конечных группах. 1 // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 128–131.

О конечных простых классических группах над полями разных характеристик с одинаковым графом простых чисел

М. Р. Зиновьева

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Пусть G — конечная группа, $\pi(G)$ — множество простых делителей ее порядка, $\omega(G)$ — *спектр* группы G, т. е. множество порядков ее элементов. На $\pi(G)$ определяется граф со следующим отношением смежности: различные вершины r и s в $\pi(G)$ смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Этот граф называется *графом Грюнберга — Кегеля* или *графом простых чисел* группы G и обозначается через $GK(G)$.

В «Коуровской тетради» [1] А. В. Васильев поставил вопрос 16.26 об описании всех пар неизоморфных конечных простых неабелевых групп с одинаковым графом Грюнберга — Кегеля. Хаги [2] и М. А. Звездина [3] получили такое описание в случае, когда одна из групп совпадает со спорадической и знакопеременной группой соответственно. Автор [4] исследовал этот вопрос для конечных простых групп лиева типа над полями одной характеристики.

В данной работе продолжается исследование, начатое автором в [4]. Мы рассматриваем две конечные простые классические группы лиева типа над полями разных характеристик.

Далее $q = p^f$ и $q_1 = {p_1}^{f_1}$, где p, p_1 – различные простые числа и f, f_1 – натуральные числа.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество конечных простых классических групп: $A_{n-1}^{\pm}(q)$, где $n \geq 7$; $B_n(q)$, где $n \geq 5$; $C_n(q)$, где $n \geq 5$; $D_n^{\pm}(q)$, где $n \geq 5$.

В данной работе доказана

Теорема 1. *Пусть G и G_1 — две неизоморфные конечные простые группы лиева типа над полями порядков q и q_1 соответственно. Если $G \in \mathcal{M}$ и графы $GK(G)$ и $GK(G_1)$ совпадают, то выполнено одно из следующих утверждений:*

1) $\{G, G_1\} = \{A_{n-1}^{\pm}(q), A_{n_1-1}^{\pm}(q_1)\}$, где $n_1 \in \{n-1, n, n+1\}$;

2) $\{G, G_1\}$ одна из пар $\{B_n(q), B_n(q_1)\}$, $\{B_n(q), C_n(q_1)\}$, $\{C_n(q), C_n(q_1)\}$;

3) $\{G, G_1\} = \{D_n(q), D_n(q_1)\}$, n четно;

4) $\{G, G_1\} = \{{}^2D_n(q), {}^2D_n(q_1)\}$, n четно.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 15-11-10025).

Список литературы

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 16-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т. 2006.

2. M. Hagie. The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. V. 31, № 9. P. 4405–4424.

3. М. А. Звездина. О неабелевых простых группах с графом простых чисел как у знакопеременной группы // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 65–76.

4. М.Р. Зиновьева. Конечные простые группы лиева типа над полем одной характеристики с одинаковым графом простых чисел // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2. С. 168–183.

Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле

И. Н. Зотов

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Группу Шевалле $\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, порождают всевозможные корневые элементы $x_r(t)$ $(r \in \Phi,\ t \in K)$ группы автоморфизмов алгебры Шевалле. Корневые подгруппы $X_r : x_r(K) \simeq (K, +)$ $(r \in \Phi^+)$ порождают унипотентную подгруппу $U = U\Phi(K)$.

Опираясь на описание $Aut\ U$ из [1] при $char\ K \neq 2, 3$, К. Видэла [2] показал, что если некоторая группа G элементарно эквивалентна группе $U\Phi(K)$ в логике первого порядка – пишем $G \equiv U\Phi(K)$, то существует поле $F \equiv K$ такое, что $G \cong U\Phi(F)$. Описание $Aut\ U$ завершено в [3]. Справедлива

Теорема 1. *Пусть $U = U\Phi(K)$ и $U' = U\Phi'(K')$ – унипотентные подгруппы групп Шевалле ранга > 1 над полями K, K' с обратимым элементом $p(\Phi)!$, $p(\Phi) := \{max(r, r)/(s, s) | r, s \in \Phi\}$. Тогда $U \equiv U'$ в том и только в том случае, когда системы корней Φ и Φ' эквивалентны и $K \equiv K'$.*

Вопрос о зависимости элементарной эквивалентности от свойств полей или колец коэффициентов [4] исследуется для нильтреугольных подколец $N\Phi(K)$ алгебр Шевалле с помощью найденных недавно описаний групп автоморфизмов $Aut\ N\Phi(K)$.

Список литературы

1. J. A. Gibbs. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. 1970. V. 14, № 2. P. 203–208.
2. C. R. Videla. On the Mal'cev correspondence // Proceed. AMS. 1990. V. 109, № 2. P. 493–502.
3. В. М. Левчук. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 2. С. 141–161; № 3. С. 315–338.

4. В. М. Левчук. Теоретико-модельные и структурные вопросы алгебр и групп Шевалле // Итоги науки. Юг России. 2012. Т. 6. С. 75–84.

Ковры аддитивных подгрупп над полем рациональных чисел

С. А. Зюбин

Томский политехнический университет, Томск

Пусть на системе корней Φ [1] задана рациональнозначная, не принимающая нулевых значений функция $\mu : \Phi \to \mathbb{Q}^*$ со свойством

$$\frac{C_{ijrs}\mu^i(r)\mu^j(s)}{\mu(ir+js)} \in \mathbb{Z}, \quad \text{если} \quad i,j \in \mathbb{Z},\ r,s,ir+js \in \Phi,\ i,j>0, \qquad (1)$$

где C_{ijrs} — константы из коммутаторной формулы Шевалле [1], а $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Такие функции заведомо существуют, достаточно положить $\mu(r) = M^{h(r)}$, где M — произвольное ненулевое целое и $h(r)$ — функция высоты [1] на множестве корней. Возможно и тривиальное задание: $\mu(r) \equiv M, r \in \Phi$.

Пусть P_0 — подмножество множества простых натуральных чисел. Обозначим через $\mathbb{Z}\left[P_0^{-1}\right]$ кольцо P_0-ичных дробей, то есть рациональных чисел, знаменателями которых являются только произведения степеней простых из P_0. Таким образом,

$$\mathbb{Z}\left[P_0^{-1}\right] = \left\{ \pm\frac{n}{p_1^{\alpha_1}\dots p_k^{\alpha_k}} \mid n, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}, p_1, \dots, p_k \in P_0 \right\}.$$

Прямо из определения функции μ вытекает, что набор $\sigma = \{\sigma_r\}$, где $\sigma_r = \mu(r)\mathbb{Z}\left[P_0^{-1}\right]$ является ковром [2] типа Φ. Следующая теорема показывает, что для поля рациональных чисел все неприводимые ковры ранга > 1 исчерпываются данной конструкцией.

Теорема 1. *Всякий неприводимый ковер $\sigma = \{\sigma_r\}$ типа Φ ранга > 1 над полем рациональных чисел задается как $\sigma_r = \mu(r)\mathbb{Z}\left[P_0^{-1}\right]$ для подходящей функции μ с условием (1) и подходящего подмножества простых чисел P_0.*

Ковер называется допустимым [2], если подгруппа, порожденная корневыми подгруппами $X_r(\sigma_r), r \in \Phi$, не содержит новых корневых элементов. Прямые вычисления с использованием свойства (1) функции μ позволяют установить

Следствие 1. *Все неприводимые ковры ранга > 1 над полем рациональных чисел являются допустимыми.*

Настоящее следствие дает в случае неприводимых ковров ранга > 1 над полем рациональных чисел ответы на вопрос 7.28 из Коуровской тетради [3] о необходимых и достаточных условиях допустимости ковра (никаких дополнительных условий не требуется, неприводимый ковер ранга > 1 автоматически допустим) и на вопрос 15.46 о редуцируемости вопроса 7.28 к лиеву рангу 1 (да, редуцируется).

Список литературы

1. R. Carter. Simple groups of Lie type. London – NY: Wiley and sons, 1972. 331 p.
2. В. М. Левчук. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки, 1982. Т. 31, № 4. Р. 509–525.
3. Коуровская тетрадь. 18-е изд. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2014.

Большие коммутативные подалгебры нильтреугольной подалгебры $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле типа E_6 и E_7 над полем

Е. А. Кириллова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Пусть Φ — некоторая система корней евклидова пространства, Π — её база, Φ^+ — положительная система корней. Алгебра Шевалле типа Φ над полем K характеризуется базисом Шевалле $\{e_r(r \in \Phi^+), h_s(s \in \Pi)\}$ [1, §4.4]. Её подалгебру $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r(r \in \Phi^+)\}$ называют нильтреугольной. Коммутативные подалгебры наивысшей размерности называют большими. В [2] записана следующая задача, решённая А. И. Мальцевым [3] при $K = \mathbb{C}$:

Описать большие коммутативные подалгебры в алгебре $N\Phi(K)$ над произвольным полем K.

Через $\{r\}^+$ обозначим множество корней $s \in \Phi^+$ таких, что в разложении по базе корня $s-r$ все коэффициенты неотрицательны. Тогда $T(r)$ определим как подалгебру в $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_s \mid s \in \{r\}^+\}$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – база системы корней типа E_m [4].

Теорема 1. *Большая коммутативная подалгебра алгебры $N\Phi(K)$ над полем K совпадает с $T(\alpha_1)$ или $T(\alpha_6)$ для типа E_6 и совпадает с $T(\alpha_7)$ для типа E_7.*

Список литературы

1. R. Carter. Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972.
2. V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii J. of Math. 2015. V. 86. № 4. P. 384–388.
3. А. И. Мальцев. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1945. Т. 9, № 4. С. 291–300.
4. Н. Бурбаки. Группы и алгебры Ли (гл. IV-VI). М.: Мир, 1972.

Конечные группы с $\boldsymbol{P^\infty}$-субнормальными силовскими подгруппами

В. Н. Княгина

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathbb{N}$ и $\mathbb{P}$ — множества всех натуральных и всех простых чисел соответственно. Положим

$$\mathbb{P}^\infty = \{p^k \mid p \in \mathbb{P},\ k \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Будем считать, что $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{P}^\infty$ и подмножество $\mathbb{T}$ удовлетворяют требованию: если $t \in \mathbb{T}$, то $\mathbb{T}$ содержит все натуральные делители числа t.

Введем следующее определение. Подгруппа H называется $\mathbb{T}$-*субнормальной подгруппой* группы G, если существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}| \in \mathbb{T}$ для всех i. Если $\mathbb{T} = \mathbb{P}$, получаем понятие $\mathbb{P}$-субнормальности, введенное в [1]. Строение групп с $\mathbb{P}$-субнормальными примарными и 2-максимальными подгруппами изучено в [1–4]. Признаки частичной разрешимости и сверхразрешимости факторизуемых групп с $\mathbb{T}$-субнормальными сомножителями при $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{P}^\infty$ получены в [5, 6].

Доказана следующая

Теорема 1. *Пусть в группе G все силовские подгруппы $\mathbb{T}$-субнормальны. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathbb{T} = \mathbb{P}^\infty$ и $\pi = \mathbb{P} \setminus \{2, 3, 7\}$, то G π-разрешима;*

2) *если $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{P}^\infty$ и $|\mathbb{T} \cap \{7, 8\}| < 2$, то G разрешима.*

В частности, при $\mathbb{T} = \mathbb{P}^2$ группа G разрешима.

Список литературы

1. А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. матем. журнал. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.

2. V. S. Monakhov, V. N. Kniahina. Finite group with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Ricerche di Matematica. 2013. V. 62, № 2. P. 307–323.

3. В. И. Мурашко. Свойства класса конечных групп с $\mathbb{P}$-субнормальными циклическими примарными подгруппами // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 1. С. 5–8.

4. V. A. Kovaleva, A. N. Skiba. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal // J. Group Theory. 2014. V. 17. P. 273–290.

5. В. Н. Княгина, В. Н. Тютянов. Факторизации конечных групп r-разрешимыми подгруппами с заданным вложением // Украин. матем. журн. 2014. Т. 66, № 10. С. 1431–1435.

6. V. Monakhov, V. Kniahina. Finite factorised groups with partially solvable $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // Lobachevskii J. of Math. 2015. V. 36, № 4. P. 441–445.

О минимально полных эпигруппах

О. В. Князев

Омский государственный педагогический университет, Омск

В обзоре [1] наряду с многими другими проблемами ставится задача ([1], проблема 3.10) характеризации минимально полных алгебр данного многообразия алгебр. Мы изучаем минимально полные эпигруппы.

Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие всех полугрупп, $L(\mathbf{V})$ — решетка подмногообразий многообразия $\mathbf{V}$, $\mathbf{X} \in L(\mathbf{V})$, $S \in \mathbf{V}$. Произвольное дизъюнктное семейство подполугрупп полугруппы S называют *россыпью* полугруппы S, а полугруппы, которые ее составляют, — *компонентами* россыпи.

Пусть $\mathbf{X}(S)$ есть $\mathbf{X}$-вербал полугруппы S, т.е. россыпь, компоненты которой в точности все классы $\mathbf{X}$-вербальной конгруэнции полугруппы S, являющиеся подполугруппами полугруппы S. Если $\mathbf{X}$-вербал полугруппы S состоит из одной компоненты, совпадающей с S, то полугруппу S называют $\mathbf{X}$-*полной* полугруппой. Если равенство $\mathbf{X}(S) = S$ выполняется для любого атома $\mathbf{X}$ из решетки $L(\mathbf{V})$, то полугруппу S называют *полной* полугруппой. Полугруппа называется *минимально полной*, если она содержит более одного элемента и является полной, но любая ее неодноэлементная собственная подполугруппа не является полной.

Эпигруппой называют полугруппу, в которой подходящая степень любого ее элемента является групповым элементом, т.е. лежит в некоторой ее подгруппе. Пусть S — полугруппа и $e = e^2 \in S$. Через G_e обозначается максимальная подгруппа полугруппы S, имеющая идемпотент e своей единицей. Совокупность элементов $K_e = \{x \in S \mid x^n \in G_e$ для некоторого натурального $n\}$ называется *классом унипотентности*. Таким образом, произвольная эпигруппа S разбивается на классы унипотентности. Класс унипотентности эпигруппы не обязан быть подполугруппой. Если в эпигруппе S все классы унипотентности являются подполугруппами, то S называют *унипотентно разбиваемой*. Через $B_{n,k}$ обозначим полугруппу, которую в классе полугрупп с нулем можно задать копредставлением

$$B_{n,k} = \langle a, b \mid aba = a, bab = b, a^n = b^k = 0\rangle, \text{ где } n, k \geq 2.$$

Теорема 1. *Если унипотентно неразбиваемая эпигруппа S является минимально полной эпигруппой, то S есть гомоморфный образ полугруппы $B_{n,k}$.*

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, задание №2014/336.

Список литературы

1. Л. М. Мартынов. Полнота, рецуцированность, примарность и чистота для алгебр: результаты и проблемы // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. № 13. С. 181–241.

Описание конечных групп с K-$\mathfrak{U}$-субнормальными третьими максимальными подгруппами

В. А. Ковалева

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными. Символ $\pi(G)$ обозначает множество простых делителей порядка группы G.

Подгруппа H группы G называется 2-*максимальной* (*второй максимальной*) подгруппой в G, если H является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы из G. Аналогично можно определить 3-*максимальные подгруппы* и т.д.

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$-*субнормальной в смысле Кегеля* [1] или K-$\mathfrak{U}$-*субнормальной* [2, с. 236] в G, если найдется такая цепь подгрупп

$$H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_t = G,$$

что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/(H_{i-1})_{H_i}$ сверхразрешима для всех $i = 1, \ldots, t$.

Как следует из [3, теорема C], все 2-максимальные подгруппы группы G являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными в G в том и только в том случае, когда G либо сверхразрешима, либо является SDH-группой (см. [4]). Основываясь на этом наблюдении, в работах [4] и [5] нами получено полное описание групп, все третьи максимальные подгруппы которых являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными.

Заметим, что в случае, когда $|\pi(G)| > 4$ и каждая 3-максимальная подгруппа группы G является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной в G, группа G сверхразрешима ввиду [3, теорема A]. Более того, установлено, что в бипримарном случае несверхразрешимая группа G, у которой все 3-максимальные подгруппы K-$\mathfrak{U}$-субнормальны, может не иметь нормальных силовских подгрупп [4, теорема 1.2]; в случае, когда $|\pi(G)| = 3$, такая группа G является ϕ-дисперсивной для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$ [5, теорема B]; и, наконец, в случае, когда $|G|$ имеет четыре простых делителя, G дисперсивна по Оре [5, теорема C].

Список литературы

1. O. H. Kegel. Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87. P. 409–434.
2. A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.
3. V. A. Kovaleva, A. N. Skiba. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal // J. Group Theory. 2014. V. 17. P. 273–290.
4. V. A. Kovaleva, X. Yi. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal // Acta Math. Hung. 2015. V. 146, № 1. P. 47–55.
5. В. А. Ковалева. Конечные группы с заданными системами K-$\mathfrak{U}$-субнормальных подгрупп // Украин. матем. журн. 2016. Т. 68, № 1. С. 52–63.

Поиск стабильных элементов с неоднородным вхождением образующих группы $F_{3,12}$

А. И. Ковыршина

Иркутский государственный университет, Иркутск

Вопрос о существовании стабильных элементов в свободных нильпотентных группах был поставлен А. Мясниковым в проекте MAGNUS [1]. В 1998 году В. В. Блудов [2] привел примеры таких элементов в свободных нильпотентных группах ранга 2. Известно [3, 4], что в свободной нильпотентной группе ранга 3 ступени 12 существуют нетривиальные стабильные элементы. В данной группе можно выделить 48 множеств базисных коммутаторов. Выполнив соответствующие вычисления по каждому из множеств, описаны все стабильные элементы, имеющие по 4 вхождения каждого из образующих (см. [5]). Настоящая работа посвящена поиску стабильных элементов с неоднородным вхождением образующих в свободной нильпотентной группе $F_{3,12}$. Рассмотрен третий коммутант группы и доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая линейная комбинация элементов, принадлежащих третьему коммутанту группы $F_{3,12}$, у которых входящие в них подкоммутаторы имеют длину 3, является нестабильным элементом.*

Список литературы

1. Nilpotent groups. Режим доступа: http://www.sci.ccny.cuny.edu/shpil/gworld/problems/probnil.html.
2. В. В. Блудов. Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах // Третий Сиб. конгресс по прикл. и индустр. матем: тез. докл. ч.5. Новосибирск, 1998.
3. A. Papistas. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups // Communications in algebra. 2001. V. 29. P. 469–4699.
4. E. Formanek. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups // Communications in algebra. 2002. V. 30. P. 1033–1038.
5. А. И. Ковыршина. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга три // Вестн. Омск. ун-та. 2010. V. 58, № 4. С. 20–23.

Усиленная версия гипотезы Симса для групп с цоколем исключительного лиева типа

А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

В середине 1960-х годов Ч. Симс выдвинул следующую гипотезу: *порядок стабилизатора точки для конечной примитивной группы подстановок ограничен сверху функцией от длины некоторой орбиты этого стабилизатора на остальных точках.*

Гипотеза Симса была доказана в [1].

Для конечной группы G, ее подгрупп M_1 и M_2 и любого натурального числа i по индукции определим подгруппы $(M_1, M_2)^i$ и $(M_2, M_1)^i$, полагая $(M_1, M_2)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_1}$, $(M_2, M_1)^1 = (M_1 \cap M_2)_{M_2}, (M_1, M_2)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_1}$ и $(M_2, M_1)^{i+1} = ((M_1, M_2)^i \cap (M_2, M_1)^i)_{M_2}$. В [2] авторы получили следующую усиленную версию гипотезы Симса: *если G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, то подгруппы $(M_1, M_2)^6$ и $(M_2, M_1)^6$ совпадают и нормальны в G.* Представляется интересной задача описания множества Π всех троек (G, M_1, M_2) таких, что G — конечная группа и M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, $(M_1)_G = (M_2)_G = 1$ и $1 < |(M_1, M_2)^2| \leq |(M_2, M_1)^2|$. При этом тройки (G, M_1, M_2) и (G', M_1', M_2') из Π считаются эквивалентными, если существует изоморфизм G на G', отображающий M_1 на M_1' и M_2 на M_2'. Решение этой задачи существенно усилит результаты из [2]. В [3] рассмотрен случай, когда группа G не является почти простой группой, и случай, когда группа G имеет простой знакопеременный цоколь. В данной работе доказана следующая

Теорема 1. *Пусть G — конечная группа, M_1, M_2 — различные сопряженные максимальные подгруппы в G, $Soc(G)$ — простая группа исключительного лиева типа и $M_1 \cap Soc(G)$ — непараболическая подгруппа в $Soc(G)$. Если $(G, M_1, M_2) \in \Pi$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(a) *$G \cong E_6^{\varepsilon}(r)$ или $G \cong E_6^{\varepsilon}(r) : 2$, $\varepsilon = \pm$, r — простое число, $r \geq 5$, $9|(r - \varepsilon 1)$, $M_1 = N_G(E)$, где E — изоморфная $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ подгруппа из G, $C_G(E)$ — специальная группа порядка 3^6 с центром E или* *ее расширение посредством группы порядка* 2 *соответственно и* $M_1/C_G(E) \cong SL_3(3)$;

(б) $G \cong Aut(^3D_4(2))$, $M_1 \cong \mathbb{Z}_3 \times ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : SL_2(3))$.

В каждом случае из пунктов (а) и (б) тройки (G, M_1, M_2) *из* Π *существуют и образуют один класс эквивалентности.*

Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 14-11-00061).

Список литературы

1. P. J. Cameron, C. E. Praeger, J. Saxl et al. On the Sims conjecture and distance transitive graphs // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15, № 5. P. 499–506.

2. А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов и усиленная версия гипотезы Симса // Докл. АН. 1999. Т. 364, № 6. С. 741–743.

3. А. С. Кондратьев, В. И. Трофимов. Стабилизаторы вершин графов с примитивными группами автоморфизмов и усиленная версия гипотезы Симса. I // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН. 2014. Т. 20, № 4. С. 143–152.

О новых несвободных точках в ромбе Мерзлякова

А. А. Коробов

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть
$$A_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Точка μ комплексной плоскости называется свободной, если $G_\mu = \text{гр}(A_\mu, B_\mu)$ — свободная группа. Вамберг [1] показал, что для любой несвободной группы гр(C, D), где
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

найдётся такое натуральное число n, что число λ является корнем многочлена степени n с рациональными коэффициентами из семейства $\mathbb{B}_n$. Если μ — несвободная точка, то будем говорить, что её степень равна n, если $(\forall B_{n-1} \in \mathbb{B}_{n-1})B_{n-1}(\frac{\mu^2}{2}) \neq 0$, $(\exists B_n \in \mathbb{B}_n)B_n(\frac{\mu^2}{2}) = 0$.

Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть дан произвольный целочисленный прямоугольный треугольник. Если μ^{-1} равно высоте, опущенной на гипотенузу, то μ — рациональная несвободная точка степени ≤ 2. Если вдобавок гипотенуза больше катета на единицу, то справедливы следующие утверждения: 1) если μ — отношение нечётного катета к гипотенузе, то μ— несвободная точка степени 1; 2) если μ или μ^{-1} отношение гипотенузы к чётному катету, то μ — несвободная точка степени ≤ 2.*

Список литературы

1. J. Bamberg. Non-free points for groups generated by a pair of 2×2 matrices // J. London Math. Soc. 2000. V. 62, № 2. P. 795–801.

О достаточных условиях разрешимости группы с почти регулярной инволюцией

О. А. Коробов

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Инволюции в группах, и в частности централизаторы инволюций, часто накладывают жёсткие ограничения на строение группы. Одной из широко известных иллюстраций этого факта является замечательная теорема Брауэра — Фаулера, утверждающая, что множество конечных простых групп, у которых имеется централизатор инволюции заданного порядка, конечно.

В 1972 году Владимир Петрович Шунков доказал, что периодическая группа с почти регулярной инволюцией локально конечна, почти разрешима и обладает 2-полной частью [1]. Теорему Шункова на класс групп с почти совершенной инволюцией обобщил А. И. Созутов (см. [2]).

Группы с конечной инволюцией, порядок централизатора которой наименьший, исследовал В. М. Бусаркин. А. И. Созутов обобщил полученные В. М. Бусаркиным результаты на класс групп с почти совершенной инволюцией. В частности, им установлена сопряженность всех инволюций такой группы. Это свойство мной перенесено на более широкий класс групп.

Теорема 1. *Пусть G — группа, содержащая почти совершенную инволюцию a и пусть $|C_G(a)| = 2r$, где r – нечетное число. Тогда G — разрешимая группа, содержащая один класс сопряженных инволюций. Кроме того, если G — бесконечная группа, то $\mathrm{FC}(G)$ не содержит инволюций и $G = C_G(a)\mathrm{FC}(G)$.*

Нетривиальность найденной В. П. Шунковым 2-полной части FC-центра оказывает существенное влияние на строение группы с почти совершенной инволюцией.

Теорема 2. *Пусть G — бесконечная группа, содержащая почти совершенную инволюцию a и пусть $|C_G(a)|_2 \leq 2^{r+1}$, где r — ранг 2-полной части в группе, порожденной периодической частью FC-центра и инволюцией a. Тогда группа G разрешима и $\mathrm{FC}(G)$ — содержит ровно $2^r - 1$ инволюций.*

Наконец начато исследование групп, содержащих почти совершенную инволюцию, у которых силовская 2-подгруппа в FC-центре конечна.

Теорема 3. *Пусть G — группа, содержащая почти совершенную инволюцию a и пусть $|C_G(a)| = 4r$, где r – нечетное число. Если силовская 2-подгруппа в $\mathrm{FC}(G)$ конечна и $\mathrm{FC}(G)$ локально разрешима, то группа G разрешима.*

Список литературы

1. В. П. Шунков. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.

2. А. И. Созутов. О группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 3. С. 360–368.

О замкнутости ковров аддитивных подгрупп над локально конечным полем

С. К. Куклина, А. О. Лихачева, Я. Н. Нужин

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Далее Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}, \quad r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)\, x_r(u) = x_r(t + u). \tag{1}$$

Назовем (*элементарным*) *ковром типа* Φ *ранга* l *над* K всякий набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir + js \in \Phi,\ i, j > 0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$\big[x_s(u), x_r(t)\big] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}\big(C_{ij,rs}(-t)^i u^j\big), \quad r, s, ir + js \in \Phi. \tag{3}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A}) = \big\langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \big\rangle$ группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная подмножеством M группы $E(\Phi, K)$. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi, \mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. $E(\Phi, \mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi$. Назовем ковер $\mathfrak{A}$ *неприводимым*, если все $\mathfrak{A}_r$ ненулевые.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа Φ ранга $l \geq 2$ над локально конечным полем K. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом из расширенной группы Шевалле $G(\Phi, K)$ все аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, совпадают с некоторым подполем P поля K, в частности ковер $\mathfrak{A}$ замкнут.*

Известная теорема Л. Диксона о порождении специальной линейной группы степени 2 над конечным полем двумя трансвекциями показывает, что ограничение $l \geq 2$ в теореме является существенным. Отметим также, что утверждение теоремы 1 отмечается в ([1], следствие 3.2) в качестве следствия из более общего результата, исключая следующие случаи: 1) Φ типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$), F_4 и $char K = 2$; 2) Φ типа G_2 и $char K$ равна 2 или 3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707–а).

Список литературы

1. В. М. Левчук. О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 504–517.

Полуцепные групповые кольца конечных симплектических групп

А. В. Кухарев

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск

Г. Е. Пунинский

Белорусский государственный университет, Минск

А. А. Лопатин

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Кольцо называется полуцепным, если оно как левый и как правый модуль над собой является прямой суммой цепных модулей. Частным случаем вопроса 16.9 из монографии [1, с. 452] является следующая проблема, не имеющая в настоящее время окончательного решения: описать все пары (F, G), где F — поле, G — конечная группа, такие, что групповое кольцо FG полуцепное.

Поскольку всякое полупростое кольцо является полуцепным, то интерес для изучения представляет только p-модулярный случай, т. е. когда характеристика поля F делит порядок группы G. Кроме того, если G — p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой, то FG полуцепное. Однако это условие не является необходимым. Например, групповое кольцо группы $\mathrm{SL}_2(5)$ над полем $\mathrm{GF}(3)$ полуцепное. В работе [2] найден список всех конечных линейных групп вида $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$ и $\mathrm{PSL}_n(q)$, чьи неполупростые групповые кольца полуценые. В настоящем докладе представлены результаты исследования аналогичного вопроса для симплектических групп $\mathrm{Sp}_n(q)$, проективных симплектических групп $\mathrm{PSp}_n(q)$ и конформальных симплектических групп $\mathrm{CSp}_n(q)$.

Поскольку для групп $\mathrm{Sp}_2(q) \cong \mathrm{SL}_2(q)$ ответ известен, то можно ограничиться рассмотрением групп матриц размера $n \geq 4$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть G — любая из групп $\mathrm{Sp}_n(q)$, $\mathrm{PSp}_n(q)$ или $\mathrm{CSp}_n(q)$, где q — степень простого числа. Пусть F — поле характеристики, делящей порядок группы G. Если $n \geq 4$, то групповое кольцо FG не полуцепное.*

Первый автор поддержан грантом БРФФИ (проект Ф15РМ-025). Третий автор поддержан грантом РФФИ (проект 15-01-04099).

Список литературы

1. А. А. Туганбаев. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
2. A. Kukharev, G. Puninski. Serial group rings of finite groups. General linear and close groups // Algebra Discr. Math. 2015. V. 20, № 1. P. 115–125.

Конечные группы, критические относительно спектра простой группы $U_3(3)$

Ю. В. Лыткин

Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Новосибирск

В работе рассматриваются только конечные группы. Пусть G — группа. Обозначим через $\omega(G)$ *спектр* группы G, т. е. множество всех порядков элементов G. Группы с одинаковым спектром будем называть *изоспектральными*. Под секцией группы G будем понимать факторгруппу H/N, где $N, H \leq G$ и $N \trianglelefteq H$.

Скажем, что группа G *распознаваема* (более точно, распознаваема по спектру в классе конечных групп), если любая конечная группа, изоспектральная G, изоморфна G. Группа G *почти распознаваема*, если существует лишь конечное число попарно не изоморфных групп, изоспектральных G. В противном случае она называется *нераспознаваемой.*

Пусть ω — некоторое подмножество множества натуральных чисел. Следуя [1], назовём группу G *критической относительно* ω (или ω*-критической*), если ω совпадает со спектром группы G и не совпадает со спектром любой собственной секции группы G (т. е. секции, отличной от G).

Для решения проблемы распознавания простых групп по спектру актуальной является задача описания групп (в частности критических), изоспектральных нераспознаваемым простым группам. Ранее автором [2, 3] было дано полное описание групп, критических относительно спектров знакопеременных групп A_6 и A_{10}, а также спорадической группы J_2. По модулю уже известных результатов из этого следует, что все группы, критические относительно спектров неабелевых простых знакопеременных и спорадических групп, известны. В частности, количество таких попарно не изоморфных групп не превосходит 3.

В настоящей работе даётся описание групп, изоспектральных нераспознаваемой простой унитарной группе $U_3(3) = PSU(3,3)$. В частности, доказывается, что если G — группа, изоспектральная $U_3(3)$, то G является либо группой Фробениуса, либо удвоенной группой Фробениуса, либо расширением 2-группы N с помощью $L_2(7)$, $PGL_2(7)$, $U_3(3)$ или $\mathrm{Aut}(U_3(3))$, и все эти случаи реализуются. Существует по меньшей мере 7 попарно не изоморфных групп, критических относительно множества $\omega(U_3(3))$.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16–31–00147 мол_а.

Список литературы

1. В. Д. Мазуров, В. Дж. Ши. Признак нераспознаваемости конечной группы по спектру // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 2. С. 239–243.

2. Y. V. Lytkin. On groups critical with respect to a set of natural numbers // Sib. electron. math. reports. 2013. V. 10. P. 666–675.

3. Ю. В. Лыткин. Группы, критические относительно спектров знакопеременных и спорадических групп // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 122–128.

Характеризации локально конечных простых групп лиева типа в классе периодических групп

Д. В. Лыткина

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Новосибирск

В. Д. Мазуров

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Любая простая группа G лиева типа X над локально конечным полем F обладает тем свойством, что каждая её конечная подгруппа содержится в конечной подгруппе, изоморфной простой группе лиева типа X над некоторым подполем поля F, и этим свойством G характеризуется в классе локально конечных групп. Гипотеза о том, что G характеризуется этим свойством в классе всех периодических групп, в настоящее время подтверждена (в более общем контексте) только для групп лиева типа лиева ранга 1 и групп типа A_2 [1, 2].

Доклад посвящён обсуждению этой гипотезы.

В частности, анонсируются следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество конечных простых групп, определённых над полями нечётных характеристик, и G — периодическая группа, любая конечная подгруппа которой содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу из $\mathfrak{M}$.*

(1) *Если $\mathfrak{M}$ состоит из групп типа B_2, то G локально конечна.*

(2) *Если $\mathfrak{M}$ состоит из групп лиева типа ограниченного лиева ранга, то силовские 2-подгруппы из G локально конечны.*

Список литературы

1. А. А. Кузнецов, К. А. Филиппов. Группы, насыщенные заданным множеством групп // Сиб. электрон. матем. изв. 2011. № 8. С. 230–246.

2. Д. В. Лыткина, А. А. Шлёпкин. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами типов U_3 и L_3 // Алгебра и логика (в печати).

О гипотезе Локетта в теории π-нормальных классов Фиттинга

А. В. Марцинкевич, Н. Т. Воробьёв

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск

Все рассматриваемые группы конечны и разрешимы. Локеттом [1] были определены операторы «*» и «$_*$». Напомним, что для каждого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ через $\mathfrak{F}^*$ обозначают наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$ такой, что для всех групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс $\mathfrak{F}_*$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{X}^*$. В [1] сформулирована проблема, известная в настоящее время как гипотеза Локетта.

Гипотеза [1]. Каждый ли класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ можно представить как пересечение двух классов Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ и $N(\mathfrak{F})$, где $N(\mathfrak{F})$ — наименьший нормальный класс Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} \neq (1)$ называют *нормальным в классе* $\mathfrak{S}_\pi$ всех π-групп или *π-нормальным* [2], если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}_\pi$ и для любой $G \in \mathfrak{S}_\pi$ её $\mathfrak{F}$-радикал является максимальной из подгрупп G, принадлежащих $\mathfrak{F}$. В случае, когда $\pi = \mathbb{P}$ класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является нормальным.

В связи с этим возникает задача описания классов Фиттинга, удовлетворяющих обобщенной гипотезе Локетта, т.е. определения условий, при которых $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap N_\pi(\mathfrak{F})$, где $N_\pi(\mathfrak{F})$ — пересечение всех π-нормальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{F}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга π-групп и $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap N_\pi(\mathfrak{F})$*;*

2) $\mathfrak{F}_* = (\mathfrak{S}_\pi)_* \cap \mathfrak{F}^*$*;*

3) если $\mathfrak{X} \in L(\mathfrak{F})$*, то* $\mathfrak{X} = \mathfrak{F}^* \cap ((\mathfrak{S}_\pi)_* \vee \mathfrak{X})$*, где* $L(\mathfrak{F}) = \{\mathfrak{X} : \mathfrak{X}$ *— класс Фиттинга и* $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{F}^*\}$*.*

Следствие 1. *Для любого класса Фиттинга* $\mathfrak{X} \in L(\mathfrak{F})$ *верно, что* $\mathfrak{X}$ *удовлетворяет гипотезе Локетта тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{F}_* = \mathfrak{S}_* \cap \mathfrak{F}^*$ *[3, 4].*

Список литературы

1. F. P. Lockett. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. V. 137. P. 131–136.

2. Н. Т. Воробьёв, А. В. Марцинкевич. Конечные π-группы с нормальными инъекторами // Сиб. матем. журн. 2015. Т. 56, № 4. С. 790–797.

3. R. A. Bryce, J. Cossey. A problem in the theory of normal Fitting classes // Math. Z. 1975. V. 141. P. 99–110.

4. E. Cusack. The join of two Fitting classes // Math. Z. 1979. V. 167. P. 37–47.

Автоморфизмы монстра Камерона с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$

А. А. Махнев

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

В. В. Биткина

Северо-Осетинский государственный университет, Владикавказ

Квазисимметричной схемой с числами пересечений $x < y$ называется 2-схема $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$, в которой для любых двух блоков $B, C \in \mathcal{B}$ имеем $|B \cap C| \in \{x, y\}$. Блочный граф квазисимметричной схемы $(X, \mathcal{B})$ в качестве вершин имеет блоки схемы, и два блока $B, C \in \mathcal{B}$ смежны, если $|B \cap C| = y$.

Производной схемой для t-(v, k, λ) схемы $\mathcal{D} = (X, \mathcal{B})$ в точке $x \in X$ называется схема $\mathcal{D}_x$ с множеством точек $X_x = X - \{x\}$

и множеством блоков $\mathcal{B}_x = \{B - \{x\} \mid x \in B \in \mathcal{B}\}$. Схема $\mathcal{E}$ называется расширением схемы $\mathcal{D}$, если производная схемы $\mathcal{E}$ в некоторой точке изоморфна $\mathcal{D}$. П. Камерон [1, теорема 1.35] описал расширения симметричных 2-схем. Пусть 3-(v, k, λ) схема $\mathcal{E}$ является расширением симметричной 2-схемы. Тогда либо (1) $\mathcal{E}$ является адамаровой 3-$(4\lambda + 4, 2\lambda + 2, \lambda)$ схемой, либо (2) $v = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 5)$ и $k = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$, либо (3) $v = 496$, $k = 40$ и $\lambda = 3$.

В случае (3) дополнительный граф Γ к блочному графу схемы сильно регулярен с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$, а окрестности вершин в Γ сильно регулярен с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. Дополнительный граф к блочному графу квазисимметричной $3-(496, 40, 3)$ схемы назовем монстром Камерона. В [2] найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$. В данной работе изучены автоиорфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(6138, 1197, 156, 252)$, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(6138, 1197, 156, 252)$, *в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(1197, 156, 15, 21)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g *— элемент из* G *простого порядка* p *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *если* Ω *— пустой граф, то* $p = 3, 11, 31$;

2) *если* Ω *является* n*-кликой, то либо* $p = 19$, $n = 1$, *либо* $p = 13$, $n = 2$, *либо* $p = 5$, $n = 3, 8$, *либо* $p = 2$, $n = 10, 12$;

3) *если* Ω *является* m*-кокликой, то* $p = 3$, $m = 3t$, $t \leq 165$ *или* $p = 7$, $m = 7t - 1$, $t \leq 70$;

4) *если* Ω *содержит ребро и является объединением* m *изолированных клик,* $m \geq 2$, *то* $p = 2$ *и порядки изолированных клик равны* 10 *или* 12;

5) *если* Ω *содержит геодезический* 2*-путь, то* $p \leq 13$.

Работа поддержана грантом РНФ (проект 15-11-10025).

Список литературы

1. P. Cameron, J. Van Lint. Designs, Graphs, Codes and their Links. London Math. Soc. Student Texts 22. 1981. Cambr. Univ. Press.

2. В. В. Биткина, А. К. Гутнова, А. А. Махнев. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(1197, 156, 15, 21)$ // Владикавказ. матем. журн. 2015. Т. 17, № 2. С. 5–11.

О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевых групп

В. М. Мисяков

Томский государственный университет, Томск

Основные исследования по изучению абелевых групп, имеющих регулярное кольцо эндоморфизмов, связаны с работами K. M. Rangaswamy [1], L. Fuchs и K. M. Rangaswamy [2], которые свели изучение таких групп к редуцированным группам. В теореме 1 данной работы мы рассматриваем этот случай. Интерес к исследованию абелевых групп, имеющих регулярных центр кольца эндоморфизмов, связан с проблемой 16 [3]: «Центры колец эндоморфизмов каких групп регулярны, самоинъективны?». В работе [4] изучение таких групп было сведено к редуцированному случаю, а в теореме 2 данных тезисов рассматривается этот случай.

Все группы, рассматриваемые здесь, являются абелевыми, а все кольца — унитальными предкольцами [5]. Введем следующие обозначения: $E(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G; $C(E(G))$ — центр кольца $E(G)$; $T(G)$ — периодическая часть группы G.

Напомним, что предкольцо A называется регулярным, если A — регулярная мультипликативная полугруппа (т.е. если $a \in aAa$ для любого $a \in A$ [5]. Подкольцо B кольца A назовём регулярно разрешимым в A, если для любого $b \in B$ из того, что $b \in bAb$, следует, что $b \in bBb$.

Теорема 1. *Пусть G — редуцированная группа, то $E(G)$ — регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $T(G)$ *— элементарная группа;*

2) $E(G)$ *изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца* $E(T(G))$.

Теорема 2. *Пусть* G *— редуцированная группа, то* $C(E(G))$ *— регулярное кольцо тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) $T(G)$ *— элементарная группа;*

2) $C(E(G))$ *изоморфно регулярно разрешимому подкольцу кольца* $E(T(G))$.

Список литературы

1. K. M. Rangaswamy. Abelian groups with endomorphism images of special types // J. Algebra. 1967. V. 6. P. 271–280.

2. L. Fuchs, K. M. Rangaswamy. On generalized regular rings // Math. Z. 1968. V. 107. P. 71–81.

3. П. А. Крылов, А. В. Михалёв, А. А. Туганбаев. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: Том. гос. ун-т. 2002. 464 с.

4. А. В. Карпенко, В. М. Мисяков. О регулярности центра кольца эндоморфизмов абелевой группы // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Т. 13, № 3. С. 39–44.

5. А. А. Туганбаев. Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009. 472 с.

О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

И. К. Чирик

Гомельский инженерный институт МЧС Республики Беларусь, Гомель

Рассматриваются только конечные группы. Группа, у которой главные факторы имеют простые порядки, называется сверхразрешимой. Сверхразрешимым (нильпотентным) корадикалом группы G называют наименьшую нормальную в G подгруппу K, для которой фактор-группа G/K сверхразрешима (соответственно нильпотентна). Сверхразрешимый корадикал группы G обозначают через $G^{\mathfrak{U}}$, а нильпотентный — $G^{\mathfrak{N}}$. Здесь $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}$ — формации всех сверхразрешимых и нильпотентных групп соответственно. Для формации $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп абелевый корадикал $G^{\mathfrak{A}}$ совпадает с коммутантом G' группы G. Взаимный коммутант подгрупп A и B обозначается через $\big[A, B\big] = \langle [a, b] \mid a \in A, b \in B\rangle$. Доказана

Теорема 1. *Пусть группа $G = AB$ является произведением субнормальных сверхразрешимых подгрупп A и B. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}} = \big[A, B\big]^{\mathfrak{N}}$.*

В качестве следствий получаются известные признаки сверхразрешимости факторизуемых групп, установленные в [1–3].

Список литературы

1. R. Baer. Classes of finite groups and their properties // Illinois J. Math. 1957. V. 1. P. 115–187.
2. D. Friesen. Products of normal supersolvable subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. V. 30, № 1. P. 46–48.
3. А. Ф. Васильев, Т. И Васильева. О конечных группах, у которых главные факторы являются простыми группами // Изв. вузов. Сер. Матем. 1997. V. 426, № 11. С. 10–14.

Ограниченные гомоморфизмы групп лиевского типа

А. И. Мурсеева

Башкирский государственный педагогический университет
имени М. Акмуллы, Уфа

Пусть P — подполе в поле комплексных чисел, содержащее все корни из единицы, n — целое число, $n \neq 0$.

$$G_n = \{\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix} |\alpha, \beta \in P, \alpha \neq 0\}. \tag{1}$$

Ясно, что G_n — группа.

Скажем, что ассоциативная алгебра R с 1 над полем P ограничена, если существуют натуральное m и нильпотентный идеал I в R такие, что факторкольцо R/I является подпрямой суммой колец R_i, в каждом из которых нет ортогональной системы ненулевых идемпотентов $e_1, e_2, ..., e_m$.

Теорема 1. *Пусть R — ограниченная алгебра, $\varphi : G_n \to U(R)$ гомоморфизм групп, $u(R)$ — группа обратимых элементов кольца R. Тогда для любого $\beta \in P$ элемент $\varphi \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — унипотенты, т.е. $(\varphi \begin{pmatrix} 1\beta \\ 01 \end{pmatrix} - 1)^k = 0$ для некоторого натурального k.*

Данная теорема применяется для описания гомоморфизмов групп лиевского типа.

О разбиении на правильногранные пирамиды правильногранников

Е. С. Окладникова, А. В. Тимофеенко

Красноярский государственный педагогический университет
имени В. П. Астафьева, Красноярск

Правильногранником называется многогранник, грани которого правильные или составлены из правильных многоугольников так, что вершины этих многоугольников служат и вершинами многогранника. Кроме правильных граней ещё пять паркетных многоугольников служат гранями некоторых правильногранников [1, 2].

Теорема 1. *Если выпуклый правильногранник никакой плоскостью не рассекается на правильногранники, но существует плоскость, делящая его на многогранники с правильными или составленными из правильных многоугольников гранями, то он составлен из правильногранных пирамид тогда и только тогда, когда является одним из пяти тел: трёхскатный купол M_4, усечённый тетраэдр M_{10}, усечённый октаэдр M_{16}, наклонная призма Q_1, двенадцатигранник Иванова Q_2.*

Кроме граней правильногранников, существует ещё 14 типов паркетных многоугольников. В пути к нахождению всех типов многогранников с такими гранями получен ряд результатов, которые будут представлены в докладе.

Второй автор поддержан грантом РФФИ (проект 15-01-04897).

Список литературы

1. А. В. Тимофеенко. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. К 100-летию Н. В. Ефимова. 2011. V. 6. Математика. № 3. С. 155–170.

2. R. Tupelo-Schneck. Convex regular-faced polyhedra with conditional edges. Режим доступа: http://tupelo-schneck.org/polyhedra/.

О максимальных подгруппах конечных групп

С. В. Путилов

Брянский государственный университет имени И. Г. Петровского, Брянск

Под G понимается конечная группа. Теорема 1 продолжает исследования, начатые в [1]. Теорема 2 усиливает теорему 1.1.1 из [2]. Подгруппа H из G, следуя О. Кегелю, называется квазисубнормальной в G, если для каждой силовской p-подгруппы P из G, где p – любое из $\pi(G)$, пересечение $H \cap P$ – силовская p-подгруппа в H.

Теорема 1. *Если каждая ненормальная максимальная подгруппа в G нильпотентная или проста, то G метанильпотентная или группа Шмидта.*

Теорема 2. *Если в G все неквазисубнормальные ненильпотентные максимальные подгруппы имеют один и тот же порядок, то G разрешима.*

Список литературы

1. В. С. Монахов, В. Н. Тютянов. О конечных группах с заданными максимальными подгруппами // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 3. С. 553–561.

2. С. В. Путилов. К теории конечных групп. Брянск: Группа компаний «Десяточка», 2009.

Коммутаторное условие для групп лиевского типа

И. Р. Салихова

Уфимский автотранспортный колледж, Уфа

Пусть $g = \oplus_{\alpha \in K} g_\alpha$ — стандартно градуированная алгебра Ли $h = g[x]$ (см. [1]), $E(g)$, $E(h)$ — элементарные группы лиевского типа для алгебр Ли g и h. G — подгруппа в $Aut(g)$ и $G \supseteq E(g)$. Говорят, что для G выполнено условие (1).

$$[C(G, x^2), E(h)] \subseteq E(hx^2), \tag{1}$$

где $C(G, x^2) = \{A \in [E(h, G] \mid AyA^{-1} - y \in x^2 g$ для всех $y \in h$.

Условие (1) применяется для описания изоморфизмов групп G. В работе доказано, что условие (1) выполнено для специальных алгебр Ли g.

Список литературы

1. И. З. Голубчик. Эпиморфизм групп лиевского типа // IV Междунар. алгебр. конф. Новосибирск, 2000. С. 61.

Теоретико-групповой анализ катионного упорядочения в слоистых перовскитах A_2BX_4

Р. Г. Севрюков, И. Н. Сафонов, С. В. Мисюль

Сибирский федеральный университет, Красноярск

М. С. Молокеев

Институт физики имени Л. В. Киренского СО РАН, Красноярск

Слоистые перовскитоподобные кристаллы с химической формулой A_2BX_4, кристаллизующиеся в пространственной группе $I4/mmm$, имеют важные в практическом отношении свойства. При изменении внешних условий эти соединения испытывают многочисленные фазовые переходы (ФП) [1]. Основной структурообразующей единицей в таких соединениях являются октаэдры BX_6. Симметрийный анализ ФП таких кристаллов проводился ранее [2]. В этих работах предполагалось, что при ФП происходят повороты октаэдров BX_6, которые и определяют структуры искаженных (диссимметричных) фаз. Однако существует достаточное количество примеров подобных кристаллов, в которых ФП связаны с упорядочением катионов A и B. К таким кристаллам относятся, например, окисные соединения $A^1A^2B^1_{1/2}B^2_{1/2}O_4$ с крупными катионами $A =$ Ba, Sr, Ca, Nd, Sm, Eu, Dy и $B =$ Y, Ta, In, Nb.

При изучении ФП хорошо зарекомендовала себя схема, на первом этапе которой проводится теоретико-групповой анализ возможных искажений структуры кристаллов. Анализируя возможные искажения исходной структуры, рассматривают, как правило, один параметр порядка (ПП) и одно неприводимое представление (НП), которые описывают изменение симметрии при ФП.

Такие ПП и НП называются критическими. Однако искажение структуры исходной фазы G_0 в ряде случаев невозможно описать только критическими ПП. В искажённой (диссимметричной) фазе G_i могут осуществиться смещения или упорядочения атомов, совместимые с симметрией этой фазы, и которые задаются некритическими ПП и НП.

В работе рассмотрено упорядочение катинов A (позиция $4e$) и B (позиция $2a$), возникающее в кристаллах однослойных перовскитов A_2BX_4 при ФП типа порядок-беспорядок. Из критических НП рассматривались НП точек $K_{11} - N$, $K_{12} - P$, $K_{13} - X$, $K_{15} - M$ зоны Бриллюэна группы $I4/mmm$, так как в реальных структурах реализуются только такие катионные упорядочения. В ходе работы получена 41 диссимметричная фаза.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2016 году (задание № 3.2534.2016/К).

Список литературы

1. К. С. Александров, Б. В. Безносиков. Перовскиты. Настоящее и будущее. Многообразие прафаз, фазовые превращения, возможности синтеза новых соединений. Новосибирск: СО РАН, 2004. 231 с.

2. D. M. Hatch, H. T. Stokes, K. S. Aleksandrov et al. Phase transitions in the perovskite-like A_2BX_4 structure // Phys. Rev. B. 1989. V. 39, № 13. P. 9282–9288.

Конечные группы с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами

В. Н. Семенчук

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

Рассматриваются только конечные группы. Важную роль при изучении строения конечных групп играют силовские подгруппы. Например, группа, у которой все силовские подгруппы субнормальны, нильпотентна.

В теории классов конечных групп обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости, введенное Кегелем в работе [1].

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Назовем подгруппу H $\mathfrak{F}$-достижимой в группе G, если существует цепь подгрупп*

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В настоящем сообщении рассматривается задача изучения строения конечных групп, у которых силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) любая группа G, у которой все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы и принадлежат $\mathfrak{F}$, также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G либо бипримарная p-замкнутая ($p \in \pi(G)$) группа, либо примарная группа.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Группа является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы в G.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-разложимых групп. Группа является p-разложимой тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы в G.*

Следствие 3. *Группа является абелевой тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы абелевы и субнормальны.*

Список литературы

1. O. H. Kegel. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. V. 30. P. 225–228.

Апериодические слова

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Определение. Под периодическим словом с периодом H понимается любое подслово некоторой степени H^p, $p > 0$.

В этом смысле $ababa$ – периодическое слово с периодом ab или ba.

Под l-апериодическим словом понимают слово X, если в нем нет непустых подслов вида Y^l.

В монографии [1] доказана теорема о бесконечности множества 6-апериодических слов и получена оценка снизу функции о количестве таких слов длины n: в алфавите $\{a, b\}$ существует сколь угодно длинные 6–апериодические слова. Более того, число таких слов длины n больше, чем $(3/2)^n$.

В докладе дается уточнение оценки количества 6-апериодических слов в двухбуквенном алфавите.

Список литературы

1. А. Ю. Ольшанский. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989. 300 с.

О группах Шункова

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В работе В. П. Шункова [1] появился класс групп, ставший теперь классом групп Шункова. Окончательное авторское определение выглядит следующим образом:

Определение 1. *Группа G называется сопряженно q-бипримитивно конечной, если для любой ее конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ любая пара сопряженных элементов простого порядка q порождает конечную подгруппу.*

В настоящее время группы Шункова встречаются в работах А. А. Дуж, Л. Гамуди, В. О. Гомера, М. Н. Ивко, А. Н. Измайлова, Ал. Н. Остыловского, А. Н. Остыловского, И. И. Павлюка, А. М. Попова, А. В. Рожкова, А. Г. Рубашкина, Е. И. Седовой, В. И. Сенашова, А. И. Созутова, Н. Г. Сучковой, А. В. Тимофеенко, Г. А. Трояковой, К. А. Филиппова, А. А. Черепа, Н. С. Черникова, А. А. Шафиро, А. К. Шлепкина, В. П. Шункова.

В докладе дается обзор результатов, касающихся класса групп Шункова.

Список литературы

1. В. П. Шунков. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–486.

Разрешимые группы с ограниченным числом делителей порядков собственных подгрупп

И. Л. Сохор

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

Рассматриваются только конечные группы. Группа, порядок которой делится на простое число p, называется pd-группой. Полупрямое произведение с нормальной подгруппой A обозначается через $A \rtimes X$. Множество всех простых делителей порядка группы G обозначается через $\pi(G)$, а $|\pi(G)|$ — их число. Если $|\pi(G)| = k$, то группу G называем k-примарной, при $|\pi(G)| \leq k$ — не более чем k-примарной.

Группу G будем называть квази-k-примарной, если $|\pi(G)| > k$ и для каждой максимальной подгруппы M из G выполнено $|\pi(M)| \leq k$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Зафиксируем натуральное число k и простое число p. В разрешимой pd-группе G каждая собственная pd-подгруппа не более чем k-примарна тогда и только тогда, когда либо G не более чем k-примарна, либо $G = N \rtimes M$, где N — минимальная нормальная и силовская q-подгруппа для некоторого $q \in \pi(G)$, M — максимальная и k-примарная подгруппа, каждая собственная подгруппа которой не более чем $(k-1)$-примарна.*

Следствие 1. *Разрешимая группа G квази-k-примарна тогда и только тогда, когда $G = N \rtimes M$, где N — минимальная нормальная и силовская p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$, а подгруппа M — максимальная и квази-$(k-1)$-примарная.*

С. С. Левищенко [1] исследовал группы при условии, что все собственные подгруппы примарны или бипримарны. Строение таких разрешимых групп следует из теоремы 1 при $k = 2$.

Список литературы

1. С. С. Левищенко. Конечные квазибипримарные группы // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп: сб. Ин-та матем. АН УССР. Киев, 1979. С. 83–97.

О присоединенных группах ассоциативных нильалгебр

А. И. Созутов, И. О. Александрова
Сибирский федеральный университет, Красноярск

По А. И. Мальцеву [1], группа G называется *обобщенно нильпотентной*, если пересечение всех членов ее нижнего центрального ряда равно единице; ассоциативная алгебра A называется *обобщенно нильпотентной*, если пересечение всех ее конечных степеней равно нулю. Построенные Е. С. Голодом [2] конечнопорожденные бесконечномерные нильалгебры и их присоединенные группы обобщенно нильпотентны. Дальнейшее развитие метода из [2] привело к построению конечнопорожденных не финитно аппроксимируемых ассоциативных нильалгебр и групп [3] (см. [4], с. 56–61) и даже простых счетнопорожденных нильалгебр [5]. Оказывается, присоединенные группы ассоциативных нильалгебр удовлетворяют более слабому условию, чем финитная аппроксимируемость, введенному С. Н. Черниковым [6]:

Теорема 1. *Присоединенные группы ассоциативных нильалгебр локально ступенчаты.*

Кроме того, для локально ступенчатых p-групп положительно решен вопрос 13.53 и получены частичные решения вопросов 8.67 и 9.76 из Коуровской тетради [7].

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-01-04897-а).

Список литературы

1. А. И. Мальцев. Обобщенно нильпотентные алгебры и их присоединенные группы // Матем. сб. 1949. Т. 25. С. 347–366.

2. Е. С. Голод. О ниль-алгебрах и финитно аппроксимируемых группах // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1964. Т. 28, № 2. С. 273–276.

3. А. З. Ананьин. Ниль-алгебра с нерадикальным тензорным квадратом // Сиб. матем. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 192–194.

4. В. И. Сенашов, В. П. Шунков. Группы с условиями конечности. Новосибирск: СО РАН, 2001. 336 с.

5. A. Smoktunowicz. Simple nil ring exits // Comm. Algebra. 2002. V. 30. P. 27–59.

6. С. Н. Черников. О произведении групп конечного ранга // Алгебра и логика. 1981. Т. 20, № 3. С. 315–329.

7. Коуровская тетрадь. 15-е изд. Новосибирск, 2002.

О группах Шункова ранга 1

А. И. Созутов, М. В. Янченко

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Неединичный элемент a группы G называется *конечным*, если в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$. Если в группе G в каждом сечении по конечной подгруппе каждый элемент простого порядка конечен, то G называется *группой Шункова*. Класс групп Шункова замкнут относительно операций взятия подгрупп и гомоморфных образов по конечным, черниковским и центральным периодическим подгруппам. Группа обладает *периодической частью*, если все ее элементы конечных порядков составляют подгруппу. Известен пример 3-ступенно разрешимой группы Шункова, не обладающей периодической частью [1]. В [2] доказано, что группа Шункова ранга 1 с разрешимыми конечными подгруппами обладает локально конечной периодической частью. Исследуются группы Шункова ранга 1, содержащие конечные неразрешимые подгруппы. В частности, для таких групп G, не обладающих локально конечной периодической частью (см. вопрос 6.59 из Коуровской тетради [3]), установлено, что

1) *локально конечный радикал R в G либо локально циклическая группа, либо $R = A \leftthreetimes C$, где A и C — холловские локально циклические подгруппы;*

2) *G содержит единственную инволюцию z и $\langle z \rangle$ — силовская 2-подгруппа в R;*

3) *коммутант любой конечной неразрешимой подгруппы из G является прямым произведением подгруппы изоморфной $SL_2(p)$, где p — некоторое простое нечетное число ≥ 5 и либо единичной, либо циклической холловской подгруппы;*

4) фактор-группа $\overline{G} = G/R$ является группой Шункова и $\pi(R) \cap \pi(\overline{G}) = \{2\}$;

5) множество $\pi(\overline{G})$ бесконечно и силовские p-подгруппы в $\overline{G}$ при $p = 2$ (локально) диэдральны, а при $p \neq 2$ — (локально) циклические;

6) любой элемент простого порядка в фактор-группе $\overline{G}$ содержится в бесконечном множестве конечных неразрешимых подгрупп.

Работа поддержана грантом РФФИ (проект № 15-01-04897-а).

Список литературы

1. А. А. Череп. О множестве элементов конечного порядка в бипримитивно конечной группе // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 518–521.

2. А. И. Созутов. О группах Шункова, действующих свободно на абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 188–198.

3. Коуровская тетрадь. 15-е изд. Новосибирск, 2002.

Большие абелевы подалгебры алгебр Шевалле над полем

Г. С. Сулейманова

Хакасский технический институт – филиал

Сибирского федерального университета, Абакан

Алгебру Шевалле $L_\Phi(K)$ над полем K ассоциированную с системой корней Φ характеризуют базой Шевалле, состоящей из элементов e_r $(r \in \Phi)$ вместе с подходящей базой подалгебры Картана [1]. Элементы e_r $(r \in \Phi^+)$ образуют базу максимальной нильпотентной подалгебры $N\Phi(K)$.

В работе рассматриваются следующие задачи, записанные в [1] и исследованные при $K = C$ в [2]:

Обобщенная задача А. И. Мальцева: *описать абелевы подалгебры наивысшей размерности алгебры $L_\Phi(K)$ над произвольным полем K.*

Обобщенная редукционная задача: *описать абелевы подалгебры наивысшей размерности в подалгебре $N\Phi(K)$ алгебры Шевалле $L_\Phi(K)$.*

С использованием [1] доказана

Теорема 1. *В алгебре Шевалле $L_\Phi(K)$ классического типа над полем каждая большая абелева подалгебра подалгебры $N\Phi(K)$ переводится автоморфизмом алгебры $L_\Phi(K)$ в идеал подалгебры $N\Phi(K)$.*

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 16-01-00707).

Список литературы

1. V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova. The generalized Mal'cev problem on abelian subalgebras of the Chevalley algebras // Lobachevskii J. of Math. 2015. V. 86. № 4. P. 384–388.

2. А. И. Мальцев А. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1945. Т. 9, № 4. С. 291–300.

О группе ограниченных подстановок

Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Пусть $S(N)$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел N. Подстановка $g \in S(N)$ называется ограниченной, если $w(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty$. Все такие подстановки образуют группу G. В работе [1] показано, что $G = AB$, где A, B — локально конечные подгруппы. Установлено также, что

$$G = \langle x | x \in S(N), w(x) = 1 \rangle .$$

В [2] начато изучение нормального строения группы G. В частности, получен критерий принадлежности локально конечному радикалу R подстановки t, для которой $w(t) = 1$.

Рассмотрим любое подмножество $L = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots\}$ множества N, где $\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots$; m — фиксированное натуральное число. Будем говорить, что элементы μ_i и μ_j эквивалентны, если либо $i = j$, либо $i < j$ $(j < i)$ и выполняются все неравенства:

$\mu_{k+1} - \mu_k \leq m$; $i \leq k \leq j-1$ ($j \leq k \leq i-1$). Это отношение эквивалентности индуцирует разбиение L на классы эквивалентности. Данное разбиение будем называть m-разбиением. Пусть $B_m(L)$ — множество всех классов эквивалентности элементов множества L.

Определение 1. *Множество L называется m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны, и вполне m-рассеяным, если*

$$\max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.

Теорема 1. *Подстановка g группы G тогда и только тогда содержится в R, когда $L_g = \{\alpha | \alpha \in N, \alpha^g \neq \alpha\}$ — вполне рассеянное множество. Если множество L_g не вполне рассеянное, то нормальное замыкание g в группе G содержит элемент бесконечного порядка.*

Теорема 2. *Множество локально конечных нормальных подгрупп группы G континуально.*

Авторы поддержаны грантом РФФИ (проект № 15-01-04897 А).

Список литературы

1. Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова. О группах ограниченных подстановок // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2010. № 2. С. 262–266.

2. Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова. О нормальных подгруппах групп ограниченных подстановок // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 344–353.

О нормальном замыкании инволюций в группе ограниченных подстановок

Ю. С. Тарасов

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Пусть $G - Lim(N)$ — группа всех ограниченных подстановок множества натуральных чисел N, т.е. таких подстановок g множества N, для которых

$$w(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Продолжено изучение нормального строения группы G, начатое в [1].

Рассмотрим любое бесконечное подмножество

$$L = \{\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n, ...\}$$

множества N, где $\mu_1 < \mu_2 < ... < \mu_n < ...$. По определению, при фиксированном $m \in N$ элементы μ_i и μ_j эквивалентны, если либо $i = j$, либо при $i < j (j < i)$ выполняются все неравенства: $\mu_{k+1} - \mu_k \leqslant m$; $i \leqslant k \leqslant j-1 (j \leqslant k \leqslant i-1)$. Данное отношение действительно является отношением эквивалентности. Пусть $B_m(L)$ — множество всех таких классов эквивалентности множества L. В работе [1] дано следующее

Определение 1. *Множество L называется m-рассеянным, если все классы множества $B_m(L)$ конечны, и вполне m-рассеянным, если*

$$c_m = \max_{A \in B_m(L)} |A| < \infty.$$

Множество L называется (вполне) рассеянным, если оно (вполне) m-рассеянное при любом натуральном m.

Пусть $\mu_n + 1 < \mu_{n+1} (n = 1, 2, ...)$ и

$$a = (\mu_1\, \mu_1 + 1)(\mu_2\, \mu_2 + 1)...(\mu_n\, \mu_n + 1)... -$$

разложение инволюции $a \in G$ на независимые транспозиции. Основным результатом работы [1] является теорема, соглано которой нормальное замыкание инволюции a в группе G тогда и только тогда локально конечно, когда L — вполне рассеянное множество. Доказана одна из гипотез, сформулированная в этой работе.

Теорема 1. *Инволюция a тогда и только тогда содержится в собственной нормальной подгруппе группы G, когда L — рассеянное множество. Если L — рассеянное, но не вполне рассеянное множество, то $\langle a^g | g \in G \rangle$ — смешанная группа.*

Список литературы

1. Н. М. Сучков, Н. Г. Сучкова. О нормальных подгруппах групп ограниченных подстановок // Сиб. электрон. матем. изв. 2015. Т. 12. С. 344–353.

К вопросу об изоморфизме периодических АТ-групп и подгрупп групп Голода

А. В. Тимофеенко
Сибирский федеральный университет, Красноярск

Финитно аппроксимируемые не локально конечные p-группы строятся сегодня на основе двух конструкций: Е. С. Голода [1, 2] и А. В. Рожкова [3]. Первая из них приводит скорее к доказательству существования таких групп, чем к самим группам, поскольку опирается на достаточные условия их ненильпотентности в виде ограничения количества многочленов каждой степени, порождающих однородный идеал соответствующей свободной ассоциативной алгебры над полем характеристики p. Вторая конструкция AT-групп выросла из групп преобразований с указанными в явном виде системами порождающих и более приспособлена к построению конкретных примеров.

Продвижением к ответу на вопрос о существовании группы Голода изоморфной АТ-группе (Коуровская тетрадь, вопрос 13.55) является

Теорема 1. *Пусть p — простое число. Существуют такие подгруппа G p-группы Голода, AT-группа A и такие конечные группы G_k и A_k, $k = 1, 2, \ldots$, что группа G аппроксимируется группами G_k, группа A аппроксимируется группами A_k и каждая группа A_k есть гомоморфный образ группы G_k.*

Автор поддержан грантом РФФИ (проект 15-01-04897).

Список литературы

1. Е. С. Голод, И. Р. Шафаревич. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1964. Т. 28, № 2. С. 273–276.
2. Е. С. Голод. О некоторых проблемах бернсайдовского типа // Тр. междунар. конгр. математиков. М.: Мир, 1968. С. 284–289.
3. А. В. Рожков. К теории групп алёшинского типа // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 5. С. 572–589.

Порождаемость групп Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел тремя инволюциями, две из которых перестановочны

И. А. Тимофеенко

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Теорема 1. *Присоединенные группы Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны.*

Используя метод выбора порождающих троек инволюций в группах лиева типа над конечными полями, разработанный в статьях Я. Н. Нужина [1–3], мы указываем явно порождающие тройки инволюций, две из которых перестановочны, для присоединенных групп Шевалле типа E_l над кольцом целых чисел. Для группы Шевалле типа G_2 такие порождающие указаны автором в [4]. Таким образом, получен положительный ответ для всех исключительных групп Шевалле, кроме типа F_4, на следующий вопрос из Коуровской тетради

(A) Какие присоединенные группы Шевалле (нормального типа) над кольцом целых чисел порождаются тремя инволюциями, две из которых перестановочны?

Для групп Шевалле классических типов по вопросу (A) ранее были получены следующие результаты.

В работе [6] М. С. Тамбурини и П. Цукка установлено, что специальная линейная группа $SL_n(\mathbb{Z})$ над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ при $n \geq 14$ порождается тремя инволюциями, две из которых перестановочны. Следовательно, и проективная специальная линейная группа $PSL_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 14$ обладает такой тройкой порождающих инволюций. Более того, Я. Н. Нужин [7] доказал, что для $PSL_n(\mathbb{Z})$ ответ на вопрос (A) положительный тогда и только тогда, когда $n \geq 5$. На самом деле, в [7] при $n \neq 4k + 2$ порождающие тройки инволюций выбирались из $SL_n(\mathbb{Z})$, поэтому для группы $SL_n(\mathbb{Z})$ ответ на аналог вопроса (A) неизвестен только для $n = 6, 10$.

В силу гомоморфизма $PSp_n(\mathbb{Z}) \to PSp_n(\mathbb{Z}_p)$ из непорождаемости тремя инволюциями, две из которых перестановочны, проективной симплектической группы $PSp_4(\mathbb{Z}_3)$ [3] следует отрицательный ответ на вопрос (A) для группы $PSp_4(\mathbb{Z})$, которая изоморфна присоединенной группе Шевалле $B_2(\mathbb{Z})$.

Отметим также, что над $\mathbb{Z}$ каждая присоединенная группа Шевалле исключительного типа, отличного от E_7, совпадает с универсальной. Здесь порождающие тройки инволюций для типа E_7 выбираются именно в присоединенной группе. Таким образом, ответ на вопрос (A) для универсальной группы Шевалле типа E_7 остается открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00707).

Список литературы

1. Я. Н. Нужин. Порождающие тройки инволюций групп Шевалле над конечным полем характеристики 2 // Алгебра и логика. 1990. Т. 29, № 2. С. 192–206.

2. Я. Н. Нужин. Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 1. С. 77–96.

3. Я. Н. Нужин. Порождающие тройки инволюций групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. II // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 4. С. 422–440.

4. I. A. Timofeenko. Generation of the Chevalley group of type G_2 over the ring of integers by three involutions two of which commute // J. of Sib. Fed. University. Math. and Phys. 2015. V. 8, № 1. P. 104–108.

5. Коуровская тетрадь. 17-е изд., доп. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.

6. M. C. Tamburini, P. Zucca. Generation of certain matrix groups by three involutions, two of which commute // J. of Algebra. 1997. V. 195. P. 650–661.

7. Я. Н. Нужин. О порождаемости группы $PSL_n(\mathbb{Z})$ тремя инволюциями две из которых перестановочны // Владикавказ. матем. журн. 2008. Т. 10, № 1. С. 68–74.

Факторизации простых неабелевых групп подгруппами нечетных индексов

В.Н. Тютянов

Гомельский филиал Международного университета «МИТСО», Гомель

Строение конечной факторизуемой группы существенно зависит от строения сомножителей и способа их вложения в группу. Л. С. Казарин [1] установил, что конечная группа, факторизуемая двумя разрешимыми подгруппами нечетных индексов, является разрешимой. В работе [2] показано, что если конечная неразрешимая группа G представима в виде произведения двух разрешимых подгрупп, индексы которых взаимно просты с 3, тогда простые неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны $PSL_2(7)$.

Целью настоящей работы является нахождение конечных простых неабелевых групп, представимых в виде произведения двух подгрупп нечетных индексов. Доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $G = AB$ является простой неабелевой группой, где A и B — собственные подгруппы группы G. Если $(|G : A|, 2) = (|G : B|, 2) = 1$, то $G \cong A_7$.*

Замечание. *Пусть N есть любая простая неабелева группа, $r, t \notin \pi(N)$ и $r \neq t$. Рассмотрим группу $G = \langle x \rangle \times N \times \langle y \rangle$, где $\langle x \rangle \cong Z_r$, $\langle y \rangle \cong Z_t$. Тогда $G = AB$, где $A = \langle x \rangle \times N$, $B = N \times \langle y \rangle$ и $|G : A| = t$, $|G : B| = r$, будут нечетными числами. Группа G содержит простой неабелев композиционный фактор, изоморфный N. Это показывает, что композиционным фактором в непростой группе, удовлетворяющей условию теоремы, может быть любая простая неабелева группа.*

Список литературы

1. Л. С. Казарин. Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Украин. матем. журн. 1991. Т. 34, № 7–8. С. 947–950.
2. В. Н. Тютянов. Произведение двух разрешимых подгрупп $3'$ индексов // Проблемы физ., матем. и техн. 2012. № 4. С. 70–73.

О вполне квазитранзитивных абелевых группах

А. Р. Чехлов

Томский государственный университет, Томск

Все группы предполагаются абелевыми. Подгруппа H группы A называется *вполне инвариантной*, если $fH \subseteq H$ для всякого f из кольца эндоморфизмов $E(A)$ группы A; если $nH = H \cap nA$ для всякого натурального n, то подгруппа H называется *чистой*. Группа называется *неприводимой*, если она не обладает нетривиальными чистыми вполне инвариантными подгруппами. Через $\Pi(A)$ обозначается множество всех простых чисел p со свойством $pA \neq A$

Группа без кручения A называется *вполне транзитивной*, если для любых $0 \neq a, b \in A$ из условия на их характеристики $\chi(a) \leqslant \chi(b)$ следует, что $\alpha a = b$ для некоторого $\alpha \in E(A)$. Если же из условия на типы $t(a) \leqslant t(b)$ следует существование $\beta \in E(A)$ и некоторого натурального числа k со свойством $\beta a = kb$, то группу без кручения A назовем *вполне квазитранзитивной*. Вполне транзитивные и неприводимые группы без кручения являются вполне квазитранзитивными группами.

Изучение вполне квазитранзитивных групп сведено к редуцированному случаю. Найдены критерии вполне квазитранзитивности прямых сумм групп. В частности, получена

Теорема 1. *Если A — вполне квазитранзитивная группа с линейно упорядоченным множеством типов ее ненулевых элементов, то $\bigoplus_{\alpha} A$ является вполне квазитранзитивной группой для любого кардинального числа α.*

Группа без кручения G называется *связной*, если для всякой ее чистой подгруппы $A \neq 0$ факторгруппа G/A делима.

Теорема 2. *Всякая связная вполне квазитранзитивная группа является вполне транзитивной.*

Класс всех редуцированных групп без кручения G таких, что $|\,G/pG\,| \leqslant p$ для каждого простого p, обозначим через $\mathcal{E}$. Кольцо R называется *сильно однородным*, если всякий его элемент есть целое кратное некоторого обратимого в R элемента; а если факторкольцо R/pR изоморфно полю из p элементов для каждого $p \in \Pi(R)$, то такое сильно однородное кольцо R без кручения (имеется ввиду, что его аддитивная группа — группа без кручения) называется *специальным*. *Псевдоцоколем* $Soc\,A$ группы без кручения A называется чистая подгруппа, порожденная всеми ее минимальными чистыми вполне инвариантными подгруппами.

Теорема 3. *Следующие свойства группы $G \in \mathcal{E}$ эквивалентны:*

a) G — вполне квазитранзитивная группа и $G = Soc\,G$;

b) G — вполне транзитивная группа и $G = Soc\,G$;

c) $G = \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$, где $\Pi(G_l) \cap \Pi(G_k) = \varnothing$ при $l \neq k \in I$, все кольца $E(G_i)$ являются специальными, а группы G_i — связными и вполне транзитивными.

Some Conditions for a Finite Group to be a Schmidt Group

V. A. Belonogov

Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg

A *Schmidt group* is a finite non-nilpotent group whose all maximal subgroups are nilpotent. Let G be a finite group and π a set of primes. A group G is called π-*decomposable* if it is the direct product of a π-group and a π'-*group*.

The following statement was known for the finite groups specialists as the conjecture of S. A. Chunikhin.

Proposition 1. *A finite π-indecomposable group G whose all maximal subgroups are π-decomposable is a Schmidt group.*

A initial result was obtained in the paper [1] for $\pi = \{p\}$. The proof of Proposition 1 may be obtained from [2] and [3]. A new proof of this proposition obtained in [4, Proposition 2].

A group G is called π-*closed* if $G = A \leftthreetimes B$ where A is a π-group and B is a π'-group. We write $(G, \pi) \in (*)$ if G is not π-closed and all maximal subgroups are π-closed, i.e. G is a minimal non-π-closed group.

Proposition 2. *If $(G, \pi) \in (*)$ and $G/\Phi(G)$ is not a simple non-abelian group then G is a Schmidt group [5].*

In particular a finite solvable non-π-closed group G whose all maximal subgroups are π-closed is a Schmidt group (for any given π).

Now using in particular Proposition 2 and [6, Theorem 1] we obtaine following

Theorem 1. *If* $(G, \pi) \in (*)$ *and* $2 \in \pi$ *then* G *is a Schmidt group.*

The work is supported by the Complex Program of UBRAS (project 15-16-1-5).

References

1. I. K. Chunikhina, S. A. Chunikhin. On p-decomposable groups // Mat. Sb. 1944. V. 15, № 2. P. 325–342 (in Russian).
2. V. A. Belonogov. On finite groups saturated with (π, π')-decomposable subgroups // Sib. Math. J. 1969. V. 10, № 3. P. 354–362 (in Russian).
3. Z. Arad, D. Chillag. A criterium for the existence of normal π-complements in finite groups // J. Algebra. 1984. V. 87, № 2. P. 472–482.
4. V. A. Belonogov. On control of the prime spectrum of a finite simple group // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. V. 285, № 1. P. 25–41.
5. V. A. Belonogov. On finite groups whose all maximal subgroups are π-closed // Works of Int. Scool-Conf. on group theory, ded. to 70 of V. V. Kabanov. Nalchik, 2014. P. 6–9 (in Russian).
6. V. A. Belonogov. Finite simple groups whose all maximal subgroups are π-closed. I // Trudy Inst. Math. i Mekh. UrO RAN. 2015. V. 21, № 1. P. 25–34 (in Russian).

Automorphism Group of Finite Semifield Plane

B. K. Durakov, O. V. Kravtsova

Siberean Federal University, Krasnoyarsk

It is well-known hypothesis [1, p. 178] that full collineation group (automorphism group) of any finite non-desarguesian semifield plane is solvable (see also [2], question 11.76, 1990). Now this hypothesis is confirmed only for several classes of semifield planes ([3, 4] and so on). It is proved in [1, p.174] that solvability hypothesis for automorphism group of finite non-desarguesian semifield plane may be reduced to solvability for autotopism group. If autotopism group is of odd order then it is solvable according Feit–Thompson theorem. So it is necessary to consider only semifield planes that admit the autotopisms of order 2.

If we suppose that full collineation group is non-solvable then simple composition factors must be isomorphic to well-known simple groups. Immediate consideration of all variants from the list of simple non-abelian groups leads to vast calculations. So we suggest to consider an existance of autotopism subgroup that is isomorphic to A_5 (which is a subgroup of many simple non-abelian groups). We received a number of technical results.

The second author was funded by RFBR (project 16-01-00707).

References

1. D. R. Hughes, F. C. Piper. Projective planes // New York: Springer-Verlag, 1973.
2. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro. The Kourovka notebook. № 18 (English version). Cornell University Library. 2016.
3. H. Huang, N. L. Johnson. 8 semifield planes of order 8^2 // Discrete Math. 1990. V. 80, № 1. P. 69–79.
4. N. D. Podufalov, B. K. Durakov, O. V. Kravtsova et al. On semifield planes of order 16^2 // Sib. Math. J. 1996. V. 37, № 3. P. 616–623.

Finite Almost Simple Groups Whose Gruenberg — Kegel Graphs Don't Contain 3-cocliques

I. B. Gorshkov
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Yekaterinburg

N. V. Maslova
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS,
Ural Federal University, Yekaterinburg

Let G be a finite group. Denote by $\pi(G)$ the set of all prime divisors of the order of G and by $\omega(G)$ the spectrum of G, i.e., the set of all element orders of G. The set $\omega(G)$ defines the Gruenberg–Kegel graph (or the prime graph) $\Gamma(G)$ of G; in this graph, the vertex set is $\pi(G)$ and different vertices p and q are adjacent if and only if $pq \in \omega(G)$.

Finite simple groups whose Gruenberg–Kegel graphs don't contain 3-cocliques are known [1]. We prove the following theorem.

Theorem 1. *Let $q = p^m$ and G be a finite almost simple group such that $S = Soc(G)$ is isomorphic to one of the following simple groups: A_n, where $n \geq 5$; $PSL_n(q)$, where $n \geq 2$ and $(n, q) \neq (2, 2), (2, 3)$; $PSU_n(q)$, where $n \geq 3$ and $(n, q) \neq (3, 2)$; $PSp_n(q)$, where $n \geq 4$ is even; $P\Omega_n(q)$, where $n \geq 7$ is odd; $P\Omega_n^{\pm}(q)$, where $n \geq 8$ is even; an exceptional group of Lie type over the field of order q; a sporadic simple group. Let f be the standard field automorphism of S and g be the standard graph automorphism of S. Then $\Gamma(G)$ doesn't contain a* 3-*coclique if and only if one of the following conditions holds*:

1) *S is isomorphic to one of the following groups*: A_9, A_{10}, A_{12}, ${}^3D_4(2)$, $PSU_3(9)$, $PSU_4(2)$, $PSp_6(2)$, $P\Omega_8^+(2)$;

2) *G isomorphic to one of the following groups*: S_5, S_6, $PGL_2(9)$, M_{10}, $Aut(A_6)$, S_8, $Aut(PSL_2(8))$, $Aut(PSL_3(2))$, $PGL_3(4)\langle f\rangle$, $PGL_3(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_3(4))$, $PSL_4(4)\langle f\rangle$, $PSL_4(4)\langle g\rangle$, $Aut(PSL_4(4))$, $Aut(PSU_5(2))$;

3) $G \cong PGL_2(p)$, *p is a Fermat or Mersenne prime*;

4) $S \cong PSL_2(2^m)$, *$m \geq 4$ is even and* $\{2\} \subseteq \pi(G/S) \subset \pi(S)$;

5) $S \cong PSL_3(p)$, *p is a Mersenne prime and* $(p-1)_3 \neq 3$;

6) $S \cong PSL_3(p)$, *p is a Fermat or Mersenne prime,* $(p-1)_3 = 3$ *and* $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;

7) $S \cong PSL_3(2^m)$, $m \geq 3$, $(2^m-1)_3 = 3$, $\pi(G) = \pi(S)$ *and* $Inndiag(S)\langle g\rangle \leq G \leq Aut(PSL_3(2^m))$;

8) $S \cong PSL_3(2^m)$, $m \geq 3$, $(2^m-1)_3 \neq 3$, $\pi(G) = \pi(S)$ *and* $S\langle g\rangle \leq G \leq Aut(PSL_3(2^m))$;

9) $S \cong PSL_4(2^m)$, $m \geq 3$, $\pi(G) = \pi(S)$ *and* $S\langle g\rangle \leq G \leq$ $\leq Aut(PSL_4(2^m))$;

10) $S \cong PSU_3(p)$, *p is a Fermat prime and* $(p+1)_3 \neq 3$;

11) $S \cong PSU_3(p)$, *p is a Fermat prime,* $(p+1)_3 = 3$ *and* $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;

12) $S \cong PSU_3(2^m)$, $m \geq 2$, $(2^m-1)_3 = 3$, $\{2\} \subseteq \pi(G/S) = \pi(S)$ *and* $Inndiag(S) \leq G \leq Aut(S)$;

13) $S \cong PSU_3(2^m)$, $m \geq 2$, $(2^m-1)_3 \neq 3$ *and* $\{2\} \subseteq \pi(G/S) = \pi(S)$;

14) $S \cong PSU_4(2^m)$, $m \geq 2$ *and* $\{2\} \subseteq \pi(G/S) = \pi(S)$;

15) $S \cong PSp_4(q)$ *and* $\pi(G) = \pi(S)$.

The work is supported by the grant of the President of Russian Federation for young scientists (grant no. MK-6118.2016.1), by the Integrated Program for Fundamental Research of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (project no. 15-16-1-5), by the Program of the State support of leading universities of the Russia (agreement no. 02.A03.21.0006 of 27.08.2013). The second author is a winner of the competition of the Dmitry Zimin Foundation "Dynasty" for support of young mathematicians in 2013 year.

References

1. M. R. Zinov'eva, V. D. Mazurov. On finite groups with disconnected prime graph // Proc. Steklov Inst. Math. 2013. V. 283, № 1. P. 139–145.

Products of Pairwise Permutable Finite Groups and Classes Groups

D. M. Hydyrov, A. F. Vasil'ev

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

A group G is said to be the product of its pairwise permutable subgroups $G_1, G_2, ..., G_n$ if $G = G_1G_2 \cdots G_n$ and $G_iG_j = G_jG_i$ for all i and j with $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

In [1] Amberg, Höfling and Kazarin studied finite groups that can be expressed as a product of pairwise permutable subgroups with certain restrictions on factors and its partial products of subgroups. In [2, 3] we looked soluble subgroup-closed formations closed with respect taking products of two abnormal (contrnormal) subgroups of soluble finite groups.

In our report we discuss a further development of the main results of the works [2, 3].

Recall that a subgroup H of G is abnormal in G, if x belongs to $< H, H^x >$ for every element $x \in G$ and H is contranormal in G if the normal closure H^G is equal to G.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a Fitting formation of soluble groups. Then the following statements are equivalent:*

1) *Let the soluble group $G = G_1G_2 \cdots G_n$ be the product of the pairwise permutable $\mathfrak{F}$-subgroups s.t. G_i is abnormal in G_iG_j and G_j is abnormal in G_iG_j for all i and j with $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Then $G \in \mathfrak{F}$;*

2) *Let the soluble group $G = G_1G_2 \cdots G_n$ be the product of the pairwise permutable $\mathfrak{F}$-subgroups such that G_i is contrnormal in G_iG_j and G_j is contrnormal in G_iG_j for all i and j with $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Then $G \in \mathfrak{F}$;*

3) *$\mathfrak{F}$ is a subgroup-closed saturated formation and $\mathfrak{F} = D_0(\cup_{i \in I}\mathfrak{S}_{\pi_i})$, where $\cup_{i\in I}\pi_i = \pi(\mathfrak{F})$ and $\pi_l \cap \pi_k = \emptyset$ for all $l \neq k$ from I.*

Corollary 1. *Let the group $G = G_1G_2 \cdots G_n$ be the product of the pairwise permutable nilpotent subgroups such that G_i is abnormal (contrnormal) in G_iG_j and G_j is abnormal (contrnormal) in G_iG_j for all i and j with $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Then G is nilpotent.*

Corollary 2. *Let the soluble group $G = G_1G_2 \cdots G_n$ be the product of the pairwise permutable π-decomposable subgroups such that G_i is abnormal (contrnormal) in G_iG_j and G_j is abnormal (contrnormal) in G_iG_j for all i and j with $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Then G is π-decomposable.*

References

1. B. Amberg, L. S. Kazarin, B. Höfling. Finite groups with multiple factorizations // Fundam. Prikl. Mat. 1998. V. 4, № 4. P. 1251–1263.

2. A. F. Vasil'ev. On abnormally factorizable finite solvable groups // Ukrainian Math. J. 2002. V. 54, № 9. P. 1402–1410.

3. A. F. Vasil'ev. On Products of Nonnormal Subgroups of Finite Groups // Acta Applicandae Math. 2005. V. 85, № 1. P. 305–311.

Rings on Torsion Free Abelian Groups of Finite Rank

E. I. Kompantseva

Moscow Pedagogical State University,

Financial university under the government of RF, Moscow

A ring is said to be a ring on an abelian group G, if its additive group coincides with the group G. A subgroup of the group G is called the absolute ideal of G, if it is an ideal of every ring on the group G. The notion of absolute ideal has been introduced in [1]. If every ideal of a ring is an absolute ideal of its additive group, then the ring is called the AI-ring. If there exists at least one AI-ring on a group G, then the group G is called the RAI-group. L. Fuchs formulated the problem on description of RAI-group [2, problem 93].

We consider rings on almost completely decomposable abealian groups (*acd*-groups) in the present paper. The almost completely decomposable groups have been researched by many autors for a long time. A torsion free abelian group is an *acd*-group, if it contains a completely decomposable subgroup of finite rank and of finite index. If the regulator quotient [3] of an *acd*-group is cyclic, then the group is called the *crq*-group. If the types of the direct rank-1 summands of the regulator A are pairwise incomparable, then the groups A and G are called rigid. If all these types are idempotent, then the group G is called of the ring type.

The main result of the present paper is that every rigid *crq*-group of the ring type is an RAI-group. Let G be a rigid *crq*-group of the ring type. A subgroup A is the regulator of the group G, the quotient $G/A = \langle d + A\rangle$ is the regulator quotient and n is the regulator index.

Theorem 1. *Every rigid crq-group G of the ring type is an RAI-group. In this case, for every integer α coprime to n there exists an AI-ring $(G, \times)$ such that the equality $\overline{d} \times \overline{d} = \alpha\overline{d}$ takes place in the quotient ring $(G/A, \times)$, where $\overline{d} = d + A \in G/A$.*

Every description of RAI-group is bases on a description of principal absolute ideals of the groups. The least absolute ideal $\langle g \rangle_{AI}$ containing an element g is called the principal absolute ideal generating by g. Principal absolute ideals of the rigid crq-group of the ring type are completely described in this paper.

References

1. E. Fried. On the subgroups of abelian groups that ideals in every ring // Proc. Colloq. Abelian Groups, Budapest 1964. P. 51–55.
2. L. Fuchs. Infinite abelian groups. New York – London: Academic Press, 1973. V. 2.
3. A. Mader. Almost completely decomposable abelian groups Amsterdam: Gordon and Breach. Algebra, Logic and Applications, 1999. V. 13.

Nilpotent Unitary K_1-group of Rings with Involution

V. I. Kopeyko

Kalmyk State University, Elista

Let (R, λ, Λ) be an unitary ring (alias form ring), where R is a ring with an involution $x \to \bar{x}$, λ is a central element of R such that $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, and Λ is a form parameter in R. Let $K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ denote the unitary K_1-group of (R, Λ). The kernel of the group homomorphism $K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \to K_1U^\lambda(R, \Lambda)$ induces by the ring homomorphism $R[X] \to R : X \to 0$ is called nilpotent unitary K_1-group and denoted by $NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$. Also we denoted by $W_1U^\lambda(R, \Lambda)$ the cokernel of the hyperbolic homomorphism $H : K_1(R) \to K_1U^\lambda(R, \Lambda)$, while the kernel of the homomorphism $K_1U^\lambda(R, \Lambda) \to K_1(R)$ induces by the forgetful functor denoted by $W_1'U^\lambda(R, \Lambda)$.

The purpose of this talk is the following unitary K_1-analogies of Farrell's theorem (see [1]) from algebraic $K-$theory.

Theorem 1. *If* $W_1'U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \cap NK_1U^\lambda(R, \Lambda) \neq 0$, *then the group* $W_1'U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \cap NK_1U^\lambda(R, \Lambda)$ *is not finitely generated.*

Theorem 2. *Let* $p : K_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X]) \to W_1U^\lambda(R[X], \Lambda[X])$ *is the natural projection. If* $p(NK_1U^\lambda(R, \Lambda)) \neq 0$, *then the group* $p(NK_1U^\lambda(R, \Lambda))$ *is not finitely generated.*

The author was funded by RFBR (project 16-01-00148).

References

1. Farrell F.T. The nonfiniteness of Nil // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. V. 65. P. 215–216.

Centralizers in Limit Monomial Groups

Mahmut Kuzucuoğlu

Department of Mathematics, Middle East Technical University, Ankara

There are three principal study of group representations. Permutation representation, matrix (linear) representation, monomial representation of groups. Although the monomial representations appear very naturally in group theory it has been relatively less studied. Here we are interested in conjugacy of elements, centralizers of elements in direct limits of monomial groups and classification of such direct limits of monomial groups. $H \cong \mathbb{Z}_2$ is studied in [1].

Let H be a group and denote the complete monomial group of degree m over H by $\Sigma_m(H)$. Let $\xi = (p_1, p_2, \ldots)$ be an infinite sequence of not necessarily distinct primes. The homogeneous monomial group with respect to the above sequence is denoted by $\Sigma_\xi(H)$ and it is obtained as a direct limit of the groups $\Sigma_{n_i}(H)$ embedded into $\Sigma_{n_{i+1}}(H)$ by strictly diagonal embeddings where $n_i = p_1p_2\ldots p_i$. We prove the following

Lemma 1. *Two elements of* $\Sigma_\xi(H)$ *are conjugate in* $\Sigma_\xi(H)$ *if and only if they have the same cycle type in* $\Sigma_{n_i}(H)$ *for some* n_i *dividing* ξ.

For the centralizers of elements we have the following.

Theorem 1. *(Kuzucuoğlu, Oliynyk, Sushchanskii) Let* ρ *be an element of* $\Sigma_\xi(H)$ *with principal beginning is in* $\Sigma_{n_k}(H)$ *with its normal form* $\rho = \lambda_1 \ldots \lambda_l$, *where* $\lambda_i = \gamma_{i1} \ldots \gamma_{ir_i}$ *where for a fixed* i *the* γ_{ij} *are the normalized cycles of the same length* m_i *and the determinant class* a_i. *Then the centralizer* $C_{\Sigma_\xi(H)}(\rho) \cong C_{a_1}(\Sigma_{\xi_1}(C_{a_1})) \times C_{a_2}(\Sigma_{\xi_2}(C_{a_2})) \times$

$\ldots \times C_{a_l}(\Sigma_{\xi_l}(C_{a_l}))$ where C_{a_i} is the centralizer of a single element γ_{ij} in $\Sigma_{m_i}(H)$. The group C_{a_i} consists of elements of the form $\kappa = [c_i]\gamma_{i1}^{j}$ where the element c_i belongs to the group $C_H(a_i)$ and $Char(\xi_i) = \frac{Char(\xi)}{n_k} r_i$.

Observe that homogenous monomial group over H becomes homogenous symmetric group when $H = \{1\}$. Therefore our results are compatible with centralizers of elements in homogenous symmetric groups see [2].

Theorem 2. *(Güven, Kegel, Kuzucuoğlu [2])*
Let ξ be an infinite sequence, $g \in S(\xi)$ and the type of principal beginning $g_0 \in S_{n_k}$ be $t(g_0) = (r_1, r_2, \ldots, r_{n_k})$. Then $C_{S(\xi)}(g) \cong \underset{i=1}{\overset{n_k}{Dr}} C_i(C_i \wr S(\xi_i))$ where $Char(\xi_i) = \frac{Char(\xi)}{n_k} r_i$ for $i = 1, \ldots, n_k$. If $r_i = 0$, then we assume that corresponding factor is $\{1\}$.

Theorem 3. *(Kuzucuoğlu, Oliynyk, Sushchanskii) Let H be any finite group. The groups $\Sigma_{\xi_1}(H)$ and $\Sigma_{\xi_2}(H)$ are isomorphic if and only if $Char(\xi_1) = Char(\xi_2)$.*

This work is joint with B. V. Oliynyk, V. I. Sushchanskii.

References

1. B. V. Oliynyk, V. I. Sushchanskii. Imprimitivity systems and lattices of normal subgroups in D-Hyperoctahedral groups // Sib. Math. 2014. V. 55, № 1. P. 132–141.
2. Ü. B. Güven, O. H. Kegel, M. Kuzucuoğlu. Centralizers of subgroups in direct limits of symmetric groups with strictly diagonal embedding // Comm. in Algebra. 2015. V. 43, № 6. P. 1–15.

The canonical form of elements of Chevalley groups over semilocal rings without unity

V. M. Levchuk, T. Yu. Voitenko
Siberian Federal University, Krasnoyarsk

The well-known Bruhat decomposition $BNB = \bigcup_{\omega \in W} Bn_\omega U_\omega^-$ Chevalley group $G(K)$ over a field K [1] (see the notation ibid) gives the canonical form

$$bn_\omega u \quad (b \in B,\ \omega \in W,\ u \in U_\omega^-).$$

When K is a semilocal ring with Jacobson radical $J = \operatorname{rad} K$, we denote by $V^+_{\omega,J}$ the congruence subgroup of level J in the group $V^+_\omega = \langle X_r | r,\, \omega(r) \in \Phi^- \rangle$. The following theorem gives the canonical form (see also [2, Theorem 3.6]).

Theorem 1. *The group $G(K)$ admits the factorization $\bigcup\limits_{\omega \in W} B \cdot V^+_{\omega,J} \cdot n_\omega U^-_\omega$ and each its element is uniquely expressible in the form*

$$bvn_\omega u \qquad (\omega \in W,\ v \in V^+_{\omega,J},\ u \in U^-_\omega,\ b \in B).$$

By using this theorem, the problem of constructing a canonical form and defining relations of the generalized Chevalley groups over semilocal rings (not necessary with a unity) is being solved.

References

1. R. Carter. Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972. 331 p.
2. V. M. Levchuk. Model-theoretic and structural issues algebras and Chevalley groups // Math. forum (Itogi nauki. The South of Russia). Vladikavkaz: SMI VSC RAN. 2012. V. 6. P. 75–84.

On the Generalized Hypercenter of a Finite Group

V. I. Murashka

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

All considered groups are finite. In [1] R. Baer showed that on one hand the hypercenter $\mathrm{Z}_\infty(G)$ of a group G coincides with the intersection of all maximal nilpotent subgroups of G and on the other hand $\mathrm{Z}_\infty(G)$ coincides with the intersection of normalizers of all Sylow subgroups of G.

The concept of hypercenter was extended on classes of groups. Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups. A chief factor H/K of a group G is called $\mathfrak{X}$-central if $(H/K) \rtimes G/C_G(H/K) \in \mathfrak{X}$. A normal subgroup N of G is said to be $\mathfrak{X}$-hypercentral in G if $N = 1$ or $N \neq 1$ and every chief factor of G below N is $\mathfrak{X}$-central. The $\mathfrak{X}$-hypercenter $\mathrm{Z}_\mathfrak{X}(G)$ is the product of all normal $\mathfrak{X}$-hypercentral subgroups of G. So if $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ is the class of all nilpotent groups then $\mathrm{Z}_\infty(G) = \mathrm{Z}_\mathfrak{N}(G)$ for every group G.

Let F be the canonical local definition of a nonempty local formation $\mathfrak{F}$. Then $\mathfrak{F}$ is said to satisfy the boundary condition [2] if $\mathfrak{F}$ contains every group G whose all maximal subgroups belong to $F(p)$ for some prime p. Recall that $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ is the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a group G. A. N. Skiba [2] showed that the equality $\mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$ holds for every group G if and only if a hereditary saturated formations $\mathfrak{F}$ satisfies the boundary condition.

Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups and G be a group. Denote the intersection of all normalizers of $\mathfrak{X}$-maximal subgroups of G by $\mathrm{NI}_{\mathfrak{X}}(G)$.

Lemma 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a hereditary saturated formation and $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Then $\mathrm{O}^{\pi'}(\mathrm{NI}_{\mathfrak{F}}(G)) = \mathrm{Int}_{\mathfrak{F}}(G)$ for every group G.*

The following theorem generalizes two above mentioned Baer's theorems about the hypercenter:

Theorem 1. *Let $\sigma = \{\pi_i | i \in I\}$ be a partition of $\mathbb{P}$ into mutually disjoint subsets, $\mathfrak{F}_i$ be a hereditary saturated formation such that $\pi(\mathfrak{F}_i) = \pi_i$ and $\mathfrak{F} = \underset{i\in I}{\times}\mathfrak{F}_i$. The following statements are equivalent:*

1) $\mathfrak{F}_i$ satisfies the boundary condition in the universe of all π_i-groups for all $i \in I$.

2) for every group G holds $\bigcap\limits_{i\in I}\mathrm{NI}_{\mathfrak{F}_i}(G) = \mathrm{Z}_{\mathfrak{F}}(G)$.

Corollary 1. *[1] The hypercenter of a group G is the intersection of all normalizers of all Sylow subgroups of G.*

Corollary 2. *[1] The hypercenter of a group G is the intersection of all maximal nilpotent subgroups of G.*

References

1. R. Baer. Group Elements of Prime Power Index // Trans. Amer. Math Soc. 1953. V. 75, № 1. P. 20–47.

2. A. N. Skiba, On the $\mathfrak{F}$-hypercenter and the intersection of all $\mathfrak{F}$-maximal subgroups of a finite group // J. of Pure and Aplied Algebra. 2012. V. 216, № 4. P. 789–799.

Finite Local Nearrings with Multiplicative Schmidt Group

I. Yu. Raievska, M. Yu. Raievska, Ya. P. Sysak
Institute of Mathematics NAS of Ukraine, Kyiv

Recall that the Schmidt (Miller — Moreno) group is a minimal non-nilpotent (non-abelian) finite group. Clearly every non-primary Miller — Moreno group is a Schmidt group. The structure of the Schmidt groups was described by O. Yu. Schmidt in [1].

In this abstract we classify finite local nearrings with multiplicative Schmidt groups. Note that no local nearring with the additive Schmidt group exists. The finite nearfields with such multiplicative groups were described in [2]. Finite local nearrings with Miller–Moreno multiplicative group are considered in [3].

Theorem 1. *Let R be a local nearring whose multiplicative group R^* is a Schmidt group and let L be the subgroup of all non-invertible elements of R. If R is of order p^n where p is a prime number, then the following statements hold*:

I) if R is a nearfield, then either R^* is isomorphic to $SL(2,3)$ or it is one of the Miller — Moreno groups of orders 24, 63 and 80;

II) if $p = 2$ and $n \geq 4$, then $|R : L| > 2$, the additive group R^+ is of order 2^{2q} and of exponent 2 or 4, where q is a prime for which $2^q - 1$ is a Mersenne prime, R^* is the Miller — Moreno group of order $2^q(2^q-1)$ and L is the elementary abelian 2-group with $xy = 0$ for all x, $y \in L$;

III) if $p > 2$, then p is a Fermat prime and $|R| = p^2$, the additive group R^+ is elementary abelian and there exists a non-inverible element $a \in R$, such that

$$R^+ = <i> + <a>,$$

where i is an identity of R, $a^2 = 0$ and $(ik)a = -ak$ for a primitive root k modulo p. Moreover, for each Fermat prime p there exists a unique local nearring of order p^2 whose multiplicative group is a Miller — Moreno group.

References

1. O. Yu. Schmidt. Groups whose all subgroups are special // Mat. sb. 1924. V. 31. P. 366–372 (in Russian).
2. M. Yu. Raievska. Local near-rings with Miller-Moreno multiplicative group // Bull. of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Mathematics, Mechanics. 2011. V. 25. P. 45–48 (in Ukrainian).
3. M. Yu. Raievska, Ya. P. Sysak. On local near-rings with Miller–Moreno multiplicative group // Ukr. Math. J. 2012. V. 64, № 6. P. 930–937.

Algebraic Sets with Fully Characteristic Radicals

M. Shahryari

University of Tabriz, Tabriz

Let G be a group and S be a system of group equations with coefficients in G. We denote by $\mathrm{Rad}_G(S)$ the set of all group equations which are logical consequences of S in G. In general, one can not give a deductive description of $\mathrm{Rad}_G(S)$, because it depends on the axiomatizablity of the prevariety generated by G. In this direction, any good description of the radicals is important from the algebraic geometric point of view.

In this talk, we give a necessary and sufficient condition for $\mathrm{Rad}_G(S)$ to be fully characteristic (invariant under all endomorphisms). We apply our main result to obtain connections between radicals, identities, coordinate algebras and relatively free groups. Although most of the results can be formulate in the general frame of arbitrary algebraic structures, we mainly focus on groups in what follows. As a summary, we give here some results in the case of coefficient free algebraic geometry of groups.

Let $E \subseteq G^n$ be an algebraic set (with no coefficients). Then the radical $\mathrm{Rad}(E)$ is a fully characteristic (equivalently verbal) subgroup of the free group F_n, if and only if, there exists a family $\{K_i\}$ of n-generator subgroups of G such that $E = \bigcup_i K_i^n$. As a result, we will show that if $\mathrm{Rad}_G(S)$ is a verbal subgroup of F_n, then there exists a family $\mathfrak{X}$ of n-generator subgroups of G such that $\mathrm{Rad}_G(S)$ is exactly the set of all group identities valid in $\mathfrak{X}$. We also see that under this conditions, there exists a variety $\mathbf{W}$ of groups, such that the n-generator relatively free group in $\mathbf{W}$ is the coordinate group of S. We will prove also that if G is a nilpotent group of class at most n and $E \subseteq G^n$ is an algebraic set, then $\mathrm{Rad}(E)$ is a characteristic subgroup of F_n, if and only if $E = \bigcup_i K_i^n$ for some family $\{K_i\}$ of n-generator subgroups of G.

References

1. G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups, I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219. P. 16–79.
2. A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups, II. Logical Fundations // J. Algebra. 2000. V. 234. P. 225–276.

On Ideals of *K*-ordered Rings

E. E. Shirshova

Moscow Pedagogical State University, Moscow

Let R be a ring. A ring $R =< R, +, \cdot, \leq>$ is called a partially K-ordered ring if $< R, +, \leq>$ is a partially ordered group [1], and the following condition holds: if $0 \leq a \in R$, then $ab, ba \leq a$ for all $b \in R$.

Theorem 1. *If R is a partially K-ordered ring, then there is the convex directed ideal I_a for each element $a > 0$ in R, and every element $u \in I_a$ has a representation $u = b - c$, where $0 \leqslant b \leqslant ka$ and $0 \leqslant c \leqslant la$ for some integers $k > 0$ and $l > 0$.*

Suppose R and S are partially $\mathcal{K}$-ordered rings and f is a homomorphism of the ring R to the ring S. f is said to be an o-homomorphism if an inequality $r \leqslant s$ implies $f(r) \leqslant f(s)$ for all elements $r, s \in R$.

Theorem 2. *Suppose $R =< R, +, \cdot, \leq>$ is a partially K-ordered ring and I is a convex directed subgroup of the group $G =< R, +, \leq>$, and ε is the natural homomorphism of the group G to the quotient-group G/I. Then there exists the partially K-ordered ring R/I, and ε is an o-homomorphism of the partially K-ordered ring R to the partially K-ordered ring R/I.*

References

1. L. Fuchs. Partially Ordered Algebraic Systems. M.: Mir, 1965.

On H_σ-normally Embedded Subgroups of Finite Groups

D. A. Sinitsa

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

Let G be a finite group. If n is an integer, the symbol $\pi(n)$ denotes the set of all primes dividing n; as usual, $\pi(G) = \pi(|G|)$, the set of all primes dividing the order of G. We use the symbol $\mathbb{P}$ to denote the set of all primes.

In what follows, $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ is some partition of $\mathbb{P}$, that is, $\mathbb{P} = \cup_{i \in I} \sigma_i$ and $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ for all $i \neq j$. We write $\sigma(n) = \{\sigma_i | \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ and $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

A set $1 \in \mathcal{H}$ of subgroups of G is said to be a *complete Hall σ-set* of G [1] if every member of $\mathcal{H} \setminus \{1\}$ is a Hall σ_i-subgroup of G for some σ_i and $\mathcal{H}$ contains exact one Hall σ_i-subgroup of G for every $\sigma_i \in \sigma(G)$. A subgroup H of G is called a *σ-Hall subgroup* of G [2] if $\sigma(|H|) \cap \sigma(|G : H|) = \emptyset$.

We say that a subgroup A of G is *H_σ-normally* embedded in G if A is a σ-Hall subgroup of some normal subgroup of G. In the special case, when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, the definition of H_σ-normally embedded subgroups is equivalent to the concept of Hall normally embedded subgroups in [3].

Theorem 1. *Suppose that G possesses a complete Hall σ-set $\mathcal{H} = \{1, H_1, \ldots, H_t\}$ such that H_i is nilpotent for all $i = 1, \ldots, t$. Then G has an H_σ-normally embedded subgroup of order $|H|$ for each subgroup H of G if and only if the nilpotent residual $D = G^{\mathfrak{N}}$ of G is cyclic of square-free order and $|\sigma(D)| = |\pi(D)|$.*

In the case when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$ we get from Theorem 1 the following known result.

Corollary 1. *(Ballester-Bolinches, Qiao [4]) G has a Hall normally embedded subgroup of order $|H|$ for each subgroup H of G if and only if the nilpotent residual $G^{\mathfrak{N}}$ of G is cyclic of square-free order.*

References

1. A. N. Skiba. A generalization of a Hall theorem // J. of Algebra and Its Applications. 2016. V. 15, № 4. P. 1650085-1–1650085-13.

2. A. N. Skiba. On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.

3. S. Li, J. He, G. Nong, L. Zhou. On Hall normally embedded subgroups of finite groups // Comm. Algebra. 2009. V. 37. P. 3360–3367.

4. A. Ballester-Bolinches, Q. S. Homg. On a problem posed by S. Li and J. Liu // Arch. Math. 2014. V. 102. P. 109–111.

A Note on the p-rank of a Finite p-soluble Group

A. N. Skiba

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

In what follows, G is a finite group and $\sigma = \{\sigma_i | i \in I\}$ is some partition of the set of all primes $\mathbb{P}$. A set $\mathcal{H}$ of subgroups of G is said to be a *complete Hall σ-set* of G if every member of $\mathcal{H}$ is a Hall σ_i-subgroup of G for some $i \in I$ and $\mathcal{H}$ contains exact one Hall σ_i-subgroup of G for every i such that $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$.

A subgroup A of G is called *σ-quasinormal* or *σ-permutable* in G if G possesses a complete Hall σ-set set $\mathcal{H}$ such that $AH^x = H^xA$ for all $H \in \mathcal{H}$ and all $x \in G$.

If there is a chain $1 = H_0 < H_1 < \ldots < H_{n-1} < H_n = H$, where H_{i-1} is a minimal subgroup of H_i for all $i = 1, \ldots, n$, then H is called an *n-minimal subgroup* of G.

Recall also that the *p-rank* $r_p(G)$ of a p-soluble group $G \neq 1$ is the maximal integer k such that G has a chief factor of order p^k; if $G = 1$, then $r_p(G) = 0$.

Theorem 1. *Suppose that $G \neq 1$ possesses a complete Hall σ-set $\mathcal{H} = \{1, H_1, \ldots, H_t\}$ such that $p \in \pi(H_1) \setminus \{2\}$ and H_1 is p-soluble. Let $1 \leq n \leq r = r_p(H_1)$. If every n-minimal p-subgroup of G is σ-permutable in G, then G is p-soluble and $r_p(G) \leq r$.*

Note that if G is p-soluble with $r_p(G) = 1$, then G is p-supersoluble, so G' is p-nilpotent. Therefore, in the case when $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \ldots\}$, we get from Theorem 1 the following

Corollary 1. *If every minimal subgroup of G of odd order permutes with all Sylow subgroups of G, then G is $2'$-supersoluble and the commutator subgroup G' of G is 2-closed.*

Corollary 2. *(Gaschütz and Ito) If every minimal subgroup of G is normal in G, then the commutator subgroup G' of G is 2-closed.*

Corollary 3. *(Buckley) If G is of odd order and every minimal subgroup of G is normal in G, then G is supersoluble.*

Centralizers Dimensions and Universal Theories of Partially Commutative Metabelian Groups

E. I. Timoshenko

Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk

If S is a subset of a group G then the centralizer of S in G is $C(S) = \{g \in G \mid gs = sg, \text{ for all } s \in S\}$. If C_i is a centralizer, for $i = 1, \ldots, n$, with $C_1 > \ldots > C_n$ then we call $C_1, \ldots, C_n$ a centralizer chain of length n. If there exists an integer c such that the group G has a centralizer chain of length c and no centralizer chain of length greater then c then G is said to have centralizer dimension $Cdim(G) = c$. If no such integer c exists define $Cdim(G) = \infty$.

We compute exactly the centralizer dimensions of partially commutative metabelian groups S_Γ where a defining graph Γ is a tree.

Also, we compare the universal theories of two partially commutative metabelian groups defined by cycles Δ or linear graphs Γ. These theories are different if the numbers of vertexes of graphs Γ and Δ greater than 4. But there is unexpected exclusion. The universal theories of the groups S_Γ and S_Δ coincide if Δ is the cycle of the length 4 and Γ is the linear graph of length 4.

Finally, we are interesting one conjecture due to V.N.Remeslennikov for (absolutely) partially commutative groups F_Γ. More exactly, let T be a simple undirected finite graph with the vertex set $\{x_1, \ldots, x_n\}$. We associate with T the sentence

$$\Phi(T) = \exists z_1 \dots z_n(\bigwedge_{(x_i,x_j)\in T} [z_i, z_j] =$$

$$= 1 \wedge \bigwedge_{(x_i,x_j)\notin T} [z_i, z_j] \neq 1 \wedge \bigwedge_{i\neq j} z_i \neq z_j \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} z_i \neq 1). \qquad (1)$$

The set of all formulas of the form (1) satisfied on F_Γ is denoted by $\Phi(F_\Gamma)$.

Remeslennikov's Conjecture. The groups F_Γ and F_Δ are universal equivalent iff the sets of formulas $\Phi(F_\Gamma)$ and $\Phi(F_\Delta)$ coincide.

We study this Conjecture for partially commutative metabelian groups.

The author was funded by RFBR (project № 15-01-01485) and Russian Ministry of Education and Science (gov. contract 2014/138, project № 1052).

Frattini Theory for Functor-closed Composition Formations

A. A. Tsarev

Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk

All classes considered are subclasses of the class $\mathfrak{G}$ of all finite groups. $\mathfrak{S}$ is the class of all soluble groups. All unexplained notations and terminologies are standard. The reader is refereed to [1, 2] if necessary. A formation $\mathfrak{F}$ is a class of groups which is closed under homomorphic images and also every group G has smallest normal subgroup with quotient in $\mathfrak{F}$. We consider only subgroup functors τ (in Skiba's sense) such that for any group G all subgroups of $\tau(G)$ are subnormal in G.

The set of all primes is denoted by $\mathbb{P}$, and p will always denote a prime. Consider a function $f : \mathbb{P}\cup\{0\} \to \{\text{formations of groups}\}$, which we call a *composition satellite*. Let G be a group. We denote by $\pi(G)$ the set of all prime divisors of $|G|$. The subgroup $C^p(G)$ is the intersection of the centralizers of all the abelian p-chief factors of G with $C^p(G) = G$ if G has no abelian p-chief factors. For any composition satellite f, we denote by $CLF(f)$ the class of groups G satisfying the following conditions: $G/R(G) \in f(0)$ where $R(G)$ is the $\mathfrak{S}$-radical $G_{\mathfrak{S}}$ of G; $G/C^p(G) \in f(p)$ for any prime $p \in \pi(\mathrm{Com}(G))$ where $\mathrm{Com}(G)$ is the class of all simple abelian groups isomorphic to composition factors of G.

The class $CLF(f)$ is a formation, and it is called *composition formation* [3]. According to the concept of multiple localisation of composition formations proposed by Skiba and Shemetkov, every formation is 0-multiply composition by definition. For $n > 0$, a formation $\mathfrak{F}$ is called *n-multiply composition* if $\mathfrak{F} = CLF(f)$ and all non-empty values of f are $(n-1)$-multiply composition formations [3].

Let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{H}$ be τ-closed n-multiply composition formations with $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. We denote by $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{H}$ the lattice of all τ-closed n-multiply composition formations $\mathfrak{M}$ such as $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. If $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ and the lattice $\mathfrak{F}/_n^\tau\mathfrak{M}$ consists only two elements then $\mathfrak{M}$ is called *a maximal τ-closed n-multiply composition subformation* of $\mathfrak{F}$ [3]. Denote the intersection of all maximal n-multiply composition subformations of $\mathfrak{F}$ by $\Phi_n^\tau(\mathfrak{F})$ and call it the *Frattini subformation* of $\mathfrak{F}$. We set $\Phi_n^\tau(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$ if there are no such subformations.

The lattice of all τ-closed n-multiply formations is modular by [4]. As an application of this fact we obtain the following result.

Theorem 1. *Let n be non-negative integer and $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ be non-empty τ-closed n-multiply composition formations. If $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2 \neq (1)$ then $\Phi_n^\tau(\mathfrak{F}_1) \subseteq \Phi_n^\tau(\mathfrak{F}_2)$.*

The author was funded by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project F15RM-025).

References

1. W. Guo. Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2015. 359 p.

2. A. N. Skiba. Algebra of Formations. Minsk: Bel. Navuka. 1997. 240 p.

3. A. N. Skiba, L. A. Shemetkov. Multiply $\mathfrak{L}$-composition formations of finite groups // Ukr. Math. J. 2000. V. 52, № 6. P. 898–913.

4. N. N. Vorob'ev, A. A. Tsarev. On the modularity of a lattice of τ-closed n-multiply ω-composite formations // Ukr. Math. J. 2010. V. 62, № 4. P. 518–529.

On Products of Finite Groups with Submodular Sylow Subgroups

V. A. Vasilyev
Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

Throughout this report, all groups are finite. Recall that a subgroup M of a group G is said to be modular in G if M is a modular element of the lattice of all subgroups of G [1]. It means that the following conditions are fulfilled:

1) $\langle X, M \cap Z\rangle = \langle X, M\rangle \cap Z$ for all $X \leq G, Z \leq G$ such that $X \leq Z$, and

2) $\langle M, Y \cap Z\rangle = \langle M, Y\rangle \cap Z$ for all $Y \leq G, Z \leq G$ such that $M \leq Z$.

Note that every normal subgroup, every quasinormal subgroup (a subgroup of a group that is permutable with every subgroup of the group) is modular. The example of a symmetric group S_3 on 3 items shows that in general case the converse is not fulfilled.

In the paper [2] I. Zimmermann introduced the notion of a submodular subgroup which generalizes the notion of a subnormal subgroup. Recall that a subgroup H of a group G is said to be submodular in G [2], if there exists a chain of subgroups $H = H_0 \leq H_1 \leq \ldots \leq H_{s-1} \leq H_s = G$ such that H_{i-1} is a modular subgroup in H_i for $i = 1, \ldots, s$.

In [2] the properties of submodular subgroups were found and the study of groups with given submodular subgroups, in particular, with submodular Sylow subgroups, was begun. In the paper [3] the class $sm\mathfrak{U}$ of all groups with submodular Sylow subgroups was investigated and some of its properties were found. For instance, it was proved in [3] that $sm\mathfrak{U}$ forms a hereditary saturated formation, its local function was found, criteria of the membership of a group to the class $sm\mathfrak{U}$ were established.

This report is devoted to the further development of results of the paper [3]. In particular, we obtained the following result.

Theorem 1. *Let a group $G = AB$ be a product of its submodular subgroups A and B. If $A \in sm\mathfrak{U}$, $B \in sm\mathfrak{U}$ and G has a nilpotent subgroup K such that K is the smallest normal subgroup of G for which G/K is a group with elementary abelian Sylow subgroups, then $G \in sm\mathfrak{U}$.*

References

1. R. Schmidt. Subgroup lattices of groups. Berlin: Walter de Gruyter, 1994.
2. I. Zimmermann. Submodular subgroups in finite groups // Math. Z. 1989. V. 202. P. 545–557.
3. V. A. Vasilyev. Finite groups with submodular Sylow subgroups // Sib. Math. J. 2015. V. 56, № 6. P. 1019–1027.

On $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizers of Finite Groups

V. A. Vedernikov

Moscow Municipal Pedagogical University, Moscow

M. M. Sorokina

Bryansk State University I.G. Petrovsky, Bryansk

Considered only finite groups. Let ω be a non-empty set of primes, $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ formations of groups $\}$ is an ωF-function. A formation $\mathfrak{F} = (G : G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ and $G/F_p(G) \in f(p)$ for all $p \in \omega \cap \pi(G))$ is called an ω-local formation with the ω-satellite f. Following [1] (see definitions 13.1, 13.2, 21.1 [1]), we state the following definition.

Definition 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty formation.*

1) A normal subgroup R of the group G is called an $\mathfrak{F}^{\omega}$-limited normal subgroup of G if $R \leq G^{\mathfrak{F}}$ and $R/R \cap \Phi(G) \cap O_{\omega}(G)$ is a chief factor of the group G. A maximal subgroup M of G is called $\mathfrak{F}^{\omega}$-critical in G if $G = MR$ for some $\mathfrak{F}^{\omega}$-limited normal subgroup R of G.

2) An $\mathfrak{F}$-subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizer of G if there exists a maximal chain $H = H_t \subset H_{t-1} \subset \cdots \subset H_1 \subset H_0 = G$ where $t \geq 0$ and H_i is an $\mathfrak{F}^{\omega}$-critical subgroup of H_{i-1} for each $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Theorem 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty ω-local formation, let G be a group and let an $\mathfrak{F}$-residual $G^{\mathfrak{F}}$ of G be an ω-group. Then there exists an $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizer H of the group G and $G = G^{\mathfrak{F}}H$.*

Theorem 2. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty ω-local formation, let G be a group and let $G^{\mathfrak{F}}$ be a $\pi(\mathfrak{F})$-soluble ω-group. Then any two $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizers of G are conjugate.*

Theorem 3. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty ω-local formation with an inner ω-satellite f and $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. An $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizer H of the group G covers every f_{ω}-central chief factor of G and avoids every f_{ω}-eccentral chief factor of G if one of two following conditions is satisfied:*

1) $G^{\mathfrak{F}}$ is a π-soluble group;

2) $G^{\mathfrak{F}}$ is an ω-soluble group.

Theorem 4. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty ω-local Fitting formation and let $G = A_1 A_2 \cdots A_n$ be a group where A_i is a subnormal subgroup of G for each $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. If an $\mathfrak{F}$-residual $A_i^{\mathfrak{F}}$ of A_i is a π-soluble ω-group and for every $p \in \omega$ Sylow p-subgroups of $A_i^{\mathfrak{F}}$ is abelian for each $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, then every $\mathfrak{F}^{\omega}$-normalizer of G is a complement for $G^{\mathfrak{F}}$ in G.*

Theorems 2 and 3 implies the known results of Carter, Hawkes and L.A. Shemetkov on $\mathfrak{F}$-normalizers in finite groups (see [1, 2]). Theorem 4 is a generalization of the theorem of S.F. Kamornikov from [3].

References

1. L. A. Shemetkov. Formations of finite groups. M.: Nauka. 1978.
2. R. W. Carter, T. O. Hawkes. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group // J. Algebra. 1967. V. 5, № 2. P. 175–201.
3. S. F. Kamornikov. On a complement for a residual of a finite group // Proceed. of the F. Scorina Gomel State Univ. 2013. № 6. P. 17–23.

Содержание

Научное издание

XI ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ ПО ТЕОРИИ ГРУПП

Тезисы докладов Международной конференции,
посвященной 70-летию А. Ю. Ольшанского

Ответственные за выпуск:
Башмаков Степан Игоревич
Зотов Игорь Николаевич
Левчук Владимир Михайлович
Нужин Яков Нифантьевич
Созутов Анатолий Ильич

Корректура *А. А. Быковой*

Подписано в печать 12.07.2016. Печать плоская. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 5,6. Тираж 100 экз. Заказ № 2176

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391) 206-26-67; http://bik.sfu-kras.ru
E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru