

# АЛГЕБРА И ЛОГИКА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ,  
ПОСВЯЩЕННАЯ ПАМЯТИ В. П. ШУНКОВА

КРАСНОЯРСК  
21–27 июля 2013 года



СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ СО РАН  
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СО РАН

# **АЛГЕБРА И ЛОГИКА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Международная конференция,  
посвященная памяти В. П. Шункова

(Красноярск, 21–27 июля 2013 года)

Тезисы докладов

Красноярск  
СФУ  
2013

УДК 512+510.6(063)  
ББК 22.14+87.4  
А456

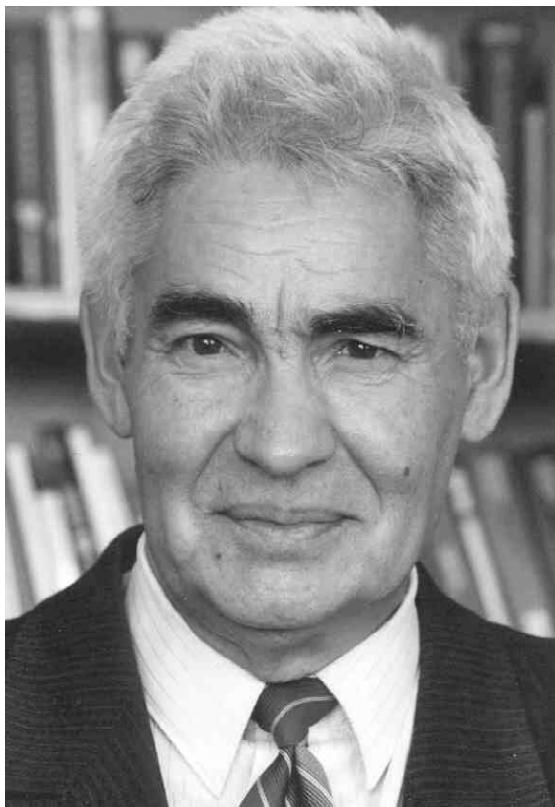
А456      **Алгебра и логика: теория и приложения** : тез. докл. междунар. конф., посвящ. памяти В. П. Шункова, Красноярск, 21–27 июля 2013 г. / отв. за вып. : В. М. Левчук, Я. Н. Нужин, А. И. Созутов, Ю. Ю. Ушаков. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2013. – 192 с.  
ISBN 978-5-7638-2877-1

Представлены тезисы докладов международной конференции «Алгебра и логика: теория и приложения».

Проводится при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 13-01-06058-г).

**УДК 512+510.6(063)**  
**ББК 22.14+87.4**

## ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЧ ШУНКОВ



29 июля 2012 г. исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося ученого В. П. Шункова, лидера Красноярской алгебраической школы, награждённого в 1999 г. медалью ордена "За заслуги перед Отечеством". Незадолго до юбилея, 3 октября 2011 г., его сердце остановилось.

Владимир Петрович родился в селе Бура Читинской области в семье крестьянина, потомка забайкальских казаков. Ему везло с учителями. Еще в школе из университетского учебника Л. А. Окунева он узнал о теории групп. В Пермском университете его курсовой работой руководил тогда еще молодой кандидат наук М. И. Каргаполов, позднее ставший членом-корреспондентом АН СССР. Руководитель дипломной работы Шункова (1959 г.) профессор С. Н. Чер-

ников пригласил его в аспирантуру. По распределению Владимир Петрович работал два года в вузах Челябинска, аспирантуру окончил в отделе теории групп Свердловского отделения МИ АН СССР. Защитив в 1965 г. кандидатскую диссертацию, он по приглашению академика Л. В. Киренского переезжает в Красноярск, навсегда связав свою жизнь с сформировавшимся филиалом СО АН СССР и Красноярским университетом.

Первую статью Владимир Петрович опубликовал в 1964 г. в Докладах АН СССР; в следующие четыре года он там же опубликовал еще пять работ. Известность и признание ему принесли, прежде всего, достижения в теории бесконечных групп. В период 1967-72 гг. Шунков разрабатывает основы нового направления исследований периодических и смешанных групп с условиями конечности, ослабляющими локальную конечность. За основу берется свойство конечности подгрупп, порождаемых парой инволюций – элементов порядка два. В 1937 г. локальную конечность 2-групп с таким свойством и некоторым дополнительным условием минимальности установил О. Ю. Шмидт, обративший внимание на необходимость обобщения классической теоремы Фробениуса.

В 1970 г. Владимир Петрович решает две ключевые проблемы минимальности в классе локально конечных групп. В следующие два года им обобщена теорема Фробениуса и завершена работа над проблемами минимальности С. Н. Черникова. В 1972 г. Шунков доказывает свою знаменитую теорему о почти разрешимости и локальной конечности периодической группы с почти регулярной инволюцией. В феврале 1973 г. он защищает докторскую диссертацию "О некоторых вопросах теории локально конечных групп". Примечательно, что ее основные результаты в том же году были отражены в вышедшей за рубежом монографии Кегеля и Верфрица [1].

Красноярская алгебро-логическая научная школа, соединяющая академические и университетские исследования, родилась по инициативе академика А. И. Мальцева. У ее истоков стояли В. М. Бусаркин – первый заведующий кафедрой алгебры и математической логики Красноярского госуниверситета, и Ю. М. Горчаков – первый в Красноярске доктор физико-математических наук, возглавлявший с 1964 г. в Институте физики СО АН СССР математическую лабора-

торию, а после ее деления в 1967 г. – лабораторию алгебры и математической логики. Уже в 1974 г. защитили кандидатские диссертации их первые ученики. С конца 1960-х гг. начал работать объединенный алгебраический семинар Красноярска.

В. П. Шунков возглавил лабораторию после перехода В. М. Бусаркина в Красноярский политехнический институт в 1972 г. и отъезда из Красноярска Ю. М. Горчакова в 1973 г. Работать с учениками он стал с 1974 г., но наиболее интенсивно – после приглашения его в 1975 г. в университет на должность заведующего кафедрой и активизации работы красноярского алгебраического семинара. Под руководством В. П. Шункова выросли 25 кандидатов и 6 докторов наук. Вместе с учениками он разработал большие фрагменты "положительной" теории периодических групп.

В развитии направления групп с условиями конечности им был выделен ряд классов групп (некоторые сейчас носят его имя), промежуточных между классами локально конечных и периодических групп. Теоремы Шункова находят связи с различными глубокими проблемами; ярко это иллюстрирует статья [2]. В 1990 г. Владимир Петрович написал первую монографию [3], а всего опубликовал (один или с учениками) 5 монографий и свыше 150 статей.

Значительную часть своих работ Шунков опубликовал в журнале "Алгебра и логика". За активное участие в работе одноименного семинара он в числе первых был награжден серебряным значком. Ему присуждалась государственная стипендия для выдающихся ученых России, а в 1994 г. Владимир Петрович стал лауреатом премии имени А. И. Мальцева РАН.

Несомненна заслуга Владимира Петровича в том, что с 1970-х гг. прошлого века в Красноярске стали проводиться всесоюзные и все-российские конференции, симпозиумы, школы, а с 1990-х гг. – международные конференции. Его памяти посвящены Мальцевские чтения в Новосибирске (ноябрь 2012 г.) и очередная международная конференция "Алгебра и логика: теория и приложения" (Красноярск, июль 2013 г.).

[1] Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F. Locally Finite Groups. Amsterdam – London: North Holland Publ. Co., 1973.

[2] Адян С. И. Еще раз о периодических произведениях и проблеме

- А. И. Мальцева // Мат. заметки. 2010. Т. 88. № 6. С. 803–810.
- [3] Шунков В. П.  $M_p$ -группы. М.: Наука, 1990.

*С. С. Гончаров, Ю. Л. Ершов, В. М. Левчук, В. Д. Мазуров,  
В. И. Сенашов, А. И. Созутов, Н. С. Черников*

## $I_0^*$ -модули

А. Н. Абызов

Казанский федеральный университет, Казань

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными.

Модуль  $M$  называется  $I_0$ -модулем, если каждый его немалый подмодуль содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля  $M$ . Двойственно определяется понятие  $I_0^*$ -модуля. Модуль  $M$  назовем  $I_0^*$ -модулем, если каждый несущественный подмодуль модуля  $M$  содержится в прямом слагаемом модуля  $M$ , который отличен от модуля  $M$ . Ясно, что каждый  $CS$ -модуль является  $I_0^*$ -модулем. Таким образом, примерами  $I_0^*$ -модулей являются инъективные, квазиинъективные, непрерывные и квазинепрерывные модули. Кольцо  $R$  называется *обобщенным справа  $SV$ -кольцом*, если каждый правый  $R$ -модуль является  $I_0$ -модулем. Обобщенные  $SV$ -кольца рассмотрены в монографии [1].

**Теорема 1.** *Для регулярного кольца  $R$  следующие условия эквивалентны:*

- (1) *над кольцом  $R$  каждый правый модуль является  $I_0^*$ -модулем;*
- (2) *над кольцом  $R$  каждый правый модуль является  $I_0$ -модулем;*
- (3)  *$R$  — правое  $SV$ -кольцо.*

**Теорема 2.** *Для нормального кольца  $R$  следующие условия эквивалентны:*

- (1) *каждый правый  $R$ -модуль является  $I_0^*$ -модулем;*
- (2) *в кольце  $R$  существует независимое семейство правых идеалов  $(A_i)_{i \in I}$ , удовлетворяющее следующим условиям:*
  - (a) *для каждого  $i$   $A_i$  — локальный инъективный модуль длины два;*
  - (b)  $J(R) \subset \bigoplus_{i \in I} A_i$ ;
  - (c)  $R/J(R)$  — правое  $SV$ -кольцо.

## Список литературы

1. Jain JS. K., Srivastava A. K., Tuganbaev A. A. Cyclic Modules and the Structure of Rings. Oxford: Oxford University Press, 2012. 232 p.

## Квадраты в разбиениях

Р. Ж. Алеев

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Фробениус [1], изучая неприводимые характеры знакопеременных групп, связал их с определёнными разбиениями и указал все нецелые значения неприводимых характеров. Фактически из этих результатов получается следующий результат [2, Теорема 4.5].

**Лемма 1.** *Ранг группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы степени  $n$  равен количеству разбиений  $a = [a_1, \dots, a_k]$  натурального числа  $n$ , удовлетворяющих следующим свойствам:*

- 1)  $a_i$  нечетно,  $1 \leq i \leq k$  и  $a_i \neq a_j$  при  $i \neq j$ ;
- 2)  $n \equiv k \pmod{4}$ ;
- 3)  $\prod_{i=1}^k a_i$  не является полным квадратом.

Первые два условия индуктивны по модулю 4. Самым трудным является условие 3), поскольку появление квадрата непредсказуемо. В этой связи определённый интерес представляет вопрос о том, могут ли возникнуть два идущих подряд квадрата при лексикографическом упорядочении разбиений данного числа.

**Лемма 2.** *Пусть даны два натуральных числа  $a$  и  $b$ , причём  $a$  нечётно. Допустим, что существует такое натуральное число  $x$ , что  $ax(2b - x)$  и  $a(x - 2)(2b - x + 2)$  являются квадратами. Тогда  $a \equiv 3 \pmod{4}$ .*

**Лемма 3.** *Пусть  $x$  и  $b$  — натуральные числа, причём  $x$  нечётно,  $x > 2b - x$  и  $x > 3$ . Предположим, что для натурального  $y$  имеем  $x(2b - x) = 3y^2$  и  $(x - 2)(2b - x + 2) = 3(y + 2)^2$ . Тогда  $x = 3(y + 1) + b_1$ ,  $b = 4b_1 + 2$  для целого  $b_1$  и*

$$(2b_1 + 1)^2 - 3(y + 1)^2 = 1. \quad (\text{Уравнение Пелля})$$

**Лемма 4.** Решения уравнения Пелля  $t^2 - 3u^2 = 1$  с чётным  $u > 0$  — это для каждого натурального  $n$  пары  $(v_n, w_n)$ , для которых

$$v_n + \sqrt{3}w_n = (7 + 4\sqrt{3})^n.$$

**Теорема 1.** Пусть  $x$  и  $b$  — натуральные числа, причём  $x$  нечётно,  $x > 2b - x$  и  $x > 3$ . Предположим, что для натурального  $y$  имеем  $x(2b - x) = 3y^2$  и  $(x - 2)(2b - x + 2) = 3(y + 2)^2$ . Тогда существует такое натуральное  $n$ , что

$$y = w_n - 1, \quad b = 2v_n \quad \text{и} \quad x = 3w_n + 2v_n + 1,$$

где последовательности  $\{v_n\}_{n=0}^\infty$  и  $\{w_n\}_{n=0}^\infty$  определены в лемме 4.

Теперь имеем

$$\begin{aligned} b = 2v_n &\in \{14, 194, 2702, 37634, 524174, \dots\} \\ y = w_n - 1 &\in \{3, 55, 779, 10863, 151315, \dots\} \\ x = 2v_n + 3w_n + 1 &\in \{27, 363, 5043, 70227, 978123, \dots\} \end{aligned}$$

Соответствующие пары разбиений  $([3, x, 2b - x], [3, x - 2, 2b - x + 2])$

$$\begin{aligned} &([3, 27, 1], [3, 25, 3]), ([3, 363, 25], [3, 361, 27]), \\ &([3, 5043, 361], [3, 5041, 363]), ([3, 70227, 5041], [3, 70225, 5043]), \\ &([3, 978123, 70225], [3, 978121, 70227]), \dots \end{aligned}$$

## Список литературы

1. Фробениус Г. Теория характеров и представлений групп: пер. с нем. / под ред. и с предисл. А. К. Сушкевича. 2-е изд., стер. М.: КомКнига, 2005. 216 с.
2. Ferraz R. A. Simple components and central units in group rings // J. Algebra. 2004. V. 279, no. 1. P. 191–203.

# Конечные простые группы, в которых централизаторы элементов с малым числом простых делителей

Р. Ж. Алеев, И. А. Тюрина

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Пусть  $w(n)$  — количество множителей в представлении натурального числа  $n$  в виде произведения простых сомножителей. Если  $H$  — подгруппа конечной группы  $G$ , то  $w(H) = w(|H|)$  и  $v(G) = \max\{w(C(g)) \mid g \in G \setminus Z(G)\}$ . Если  $p$  — нечетное простое число, то

$$l(p^n) = \begin{cases} \max\{w(p^n - 1), w((p^n + 1)/2)\}, & \text{если } p^n \equiv 1 \pmod{4}, \\ \max\{w(p^n + 1), w((p^n - 1)/2)\}, & \text{если } p^n \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases}$$

В работах [1–4] доказаны следующие результаты.

**Лемма 1.** *В конечной простой группе  $G$  условие  $v(G) = 5$  выполняется тогда и только тогда, когда  $G$  изоморфна одной из следующих групп:*

- 1)  $PSL(2, p)$ ,  $l(p) = 5$ ;
- 2)  $PSL(2, p^2)$ ,  $p \in \{7, 11, 13\}$ ;
- 3)  $PSL(2, p^3)$ ,  $l(p^3) = 5$ ;
- 4)  $PSL(2, p^5)$ ,  $p = 2$  или  $l(p^5) \leq 5$ ;
- 5)  $PSL(2, 3^4)$ ,  $PSL(3, 3)$ ,  $M_{11}$ ,  $J_1$ .

**Лемма 2.** *В конечной простой группе  $G$  условие  $v(G) = 6$  выполняется тогда и только тогда, когда  $G$  изоморфна одной из следующих групп:*

- 1)  $PSL(2, p)$ ,  $l(p) = 6$ ;
- 2)  $PSL(2, p^2)$ ,  $l(p^2) = 6$ ;
- 3)  $PSL(2, p^3)$ ,  $l(p^3) = 6$ ;
- 4)  $PSL(2, p^5)$ ,  $l(p^5) = 6$ ;
- 5)  $PSL(2, 5^4)$ ,  $PSL(2, 2^6)$ ,  $PSL(2, 3^6)$ ,  $PSL(3, 4)$ ,  $PSU(3, 3)$ ,  $PSU(3, 5)$ ,  $Sz(8)$ .

В качестве примеров для 1), 3) и 4) леммы 1 и 1)–4) леммы 2 указаны простые  $p < 100$ . Естественно возникает вопрос о построении большего числа примеров групп, а для этого необходимо рассматривать числа вида  $p^n - 1$  при  $n \leq 5$ .

Простое число  $q$  называется простым числом Софи Жермен, если  $p = 2q + 1$  также простое, и в этом случае будем называть пару  $(q, p)$  парой Софи Жермен.

Титчмарш, Харди и Рамунуджан, Туран, Эрдёш [5, Глава V, § 7] показали, что число различных (простых) делителей даже у  $p - 1$  в среднем возрастает с ростом  $p$  (более точные формулировки и понятия в [5]). Поэтому нужно сделать ограничения на количество делителей числа  $p - 1$  для простого  $p$ . Поскольку случай  $2^n - 1$  для небольших  $n$  тривиален, то будем рассматривать только нечётные простые  $p$  с условием, что количество простых делителей  $p - 1$  равно 2. Тогда  $q = (p - 1)/2$  — простое число Софи Жермен, и  $(q, p)$  — пара Софи Жермен

**Теорема 1.** Пусть  $(q, p)$  — пара Софи Жермен и  $q > 5$ .

- 1) Наименьшими простыми делителями  $p^2 + p + 1$  среди простых чисел  $p < 19$  могут быть только 7 и 13.
- 2) Если 7 делит  $p^2 + p + 1$ , то  $p \equiv 11, 23 \pmod{84}$ , и эти возможности реализуются соответственно 11 и 23.
- 3) Если 13 делит  $p^2 + p + 1$ , то  $p \equiv 35, 107 \pmod{156}$ , и эти возможности реализуются соответственно 191 и 107.

**Теорема 2.** Пусть  $(q, p)$  — пара Софи Жермен и  $q > 11$ .

- 1) Наименьшими простыми делителями  $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$  среди простых чисел  $p < 37$  могут быть только 11 и 31.
- 2) Если 11 делит  $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$ , то  $p \equiv 47, 59, 71, 119 \pmod{132}$ , и эти возможности реализуются соответственно 47, 59, 467 и 383.
- 3) Если  $p^4 + p^3 + p^2 + p + 1$  — простое число, то  $p \equiv 35, 83, 95, 107, 131 \pmod{372}$ , и эти возможности реализуются соответственно 563, 83, 227, 503 и 263.

Теоремы 1 и 2 позволяют значительно увеличить число примеров групп, которые удовлетворяют ограничениям из лемм 1 и 2.

|              | $p$                                                                                        |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l(p) = 5$   | 47, 107, 167, 179, 467, 587, 887, 983, 1019, 1907, 2027, 2459, 2579, 2819, 2963, 3203, ... |
| $l(p^5) = 5$ | 5, 7, 11, 23, 47, ...                                                                      |
| $l(p) = 6$   | 359, 503, 839, 1187, 1319, 1367, ...                                                       |
| $l(p^2) = 6$ | 47, 107, 167, 179, 263, ...                                                                |
| $l(p^3) = 6$ | 5, 7, 11, 83, ...                                                                          |
| $l(p^5) = 6$ | 5, 7, 11, 47, 59, 263, 1307, 1523, ...                                                     |

## Список литературы

1. Антонов В. А., Зенков В. И., Тюрина И. А. О конечных группах с малыми централизаторами элементов// Алгебра и линейная оптимизация: тр. междунар. семинара памяти С. Н. Черникова. Екатеринбург, 2002. С. 44–46.
2. Антонов В. А., Зенков В. И., Тюрина И. А. О группах с малыми централизаторами// Междунар. конф. “Алгебра и ее приложения”: тез. докл. Красноярск, 2002. С. 5–7.
3. Антонов В. А., Зенков В. И., Тюрина И. А. О группах с малыми централизаторами// Изв. ЧНЦ (электрон. журн.). 2007. Т. 36, № 2. С. 2–5.
4. Тюрина И. А. Конечные неразрешимые группы с тривиальным центром и малыми централизаторами нецентральных элементов// Вестн. ЮУрГУ. Сер. “Математика, физика, химия”. 2006. № 7. С. 58–63.
5. Прахар К. Распределение простых чисел. М.: Мир, 1967. 512 с.

## О числе слов, не содержащих подслов определенного вида

**И. О. Александрова**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

1. В статье [1] А. И. Созутовым поставлена задача о нахождении числа слов  $w_N = x_1x_2 \dots x_N$  длины  $N$  над алфавитом  $\{x, y\}$ , не

содержащих подслов вида  $x^m$  и  $y^n$ , где  $m, n$  — натуральные числа,  $m > 2$ ,  $n > 2$ .

С помощью метода производящих функций [2] найдено число таких слов

$$\bar{p}_N = 2 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k_1, \dots, k_{m+n-3}} \frac{(k_1 + \dots + k_{m+n-3})!}{k_1! \dots k_{m+n-3}!} (m-1)^{k_{m-1} + \dots + k_{n-1}} \prod_{i=1}^{m-2} i^{k_i + k_{m+n-i-2}} +$$

$$\sum_{j=m}^{n-1} \sum_{k_1, \dots, k_{m+n-3}} \frac{(k_1 + \dots + k_{m+n-3})!}{k_1! \dots k_{m+n-3}!} (m-1)^{k_{m-1} + \dots + k_{n-1}} \prod_{i=1}^{m-2} i^{k_i + k_{m+n-i-2}},$$

где  $k_1, k_2, \dots, k_{m+n-2}$  — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию  $2k_1 + 3k_2 + \dots + (m+n-1)k_{m+n-2} = N - j$ .

2. В случае, когда  $m = n$ ,

$$\bar{p}_N = \sum_{j=0}^{\delta} 2^{j+1} (2^{m-j-1} - 1) \sum_{k_1, \dots, k_{m-1}} \frac{(k_1 + \dots + k_{m-1})!}{k_1! \dots k_{m-1}!},$$

где  $\delta = \min(m-2, N-m)$ ,  $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$  — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию  $k_1 + 2k_2 + \dots + (m-1)k_{m-1} = N - m - j$ .

3. Число слов  $\bar{p}_N$  длины  $N$  над алфавитом  $\{a_1, \dots, a_n\}$ , которые не содержат подслов вида  $a_i^m$ ,

$$\bar{p}_N = \sum_{j=0}^{\delta} n^{j+1} (n^{m-j-1} - 1) \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}} \frac{(\alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1})!}{\alpha_1! \dots \alpha_{m-1}!} (n-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1}},$$

где  $\delta = \min(m-2, N-m)$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m-1}$  — целые неотрицательные числа, удовлетворяющие условию  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + (m-1)\alpha_{m-1} = N - m - j$ .

В частности, если  $m = 3$ , то

$$\bar{p}_N = \frac{n [n^2 + n - 2 + n\sqrt{n^2 + 2n - 3}]}{2\sqrt{n^2 + 2n - 3}} \left( \frac{n-1 + \sqrt{n^2 + 2n - 3}}{2} \right)^{N-2} -$$

$$- \frac{n [n^2 + n - 2 - n\sqrt{n^2 + 2n - 3}]}{2\sqrt{n^2 + 2n - 3}} \left( \frac{n-1 - \sqrt{n^2 + 2n - 3}}{2} \right)^{N-2}.$$

## Список литературы

1. Середа В. А., Созутов А. И. Об ассоциативных ниль-алгебрах и группах Голода// Тр. XXI межвуз. науч.-техн. конф. (апрель 2003 г.). Красноярск: КрасГАСА, 2003. С. 21-44.
2. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1979. 286 с.

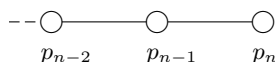
## О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями

И. О. Александрова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В работе [2] найдены графы Коксетера и системы порождающих 3-транспозиций групп  $Sp(2n, 2)$ ,  $O^+(2n, 2)$  и  $O^-(2n, 2)$ , аналогичные графам и системам порождающих отражений групп Вейля  $W(E_n)$  ( $n = 6, 7, 8$ )[1]. В [2] были подробно рассмотрены три серии графов Коксетера:  $E_n$  ( $n \geq 6$ ),  $I_n$  ( $n \geq 6$ ) и  $J_n$  ( $n \geq 8$ ) (см. тезисы [3] настоящего сборника).

Пусть так же, как и в [2], графы  $\Gamma_n$  с вершинами  $p_1, \dots, p_n$  ( $n \geq t \geq 6$ ) содержат подграф  $E_6$ , являются деревьями и составляют серию, т. е.  $\Gamma_{n-1}$  есть подграф графа  $\Gamma_n$ , при этом имеют место следующие вложения



Далее, пусть  $V_n = V(\Gamma_n)$  — векторное пространство над полем  $F_2$  с базисом  $p_1, \dots, p_n$  и квадратичной формой  $F$ , определенной по графу  $\Gamma_n$  [2, с. 11]. Обозначим через  $t_n$  число анизотропных относительно  $F$  векторов пространства  $V_n$ . Цель работы — определение по виду графов  $\Gamma_m$  и  $\Gamma_{m+1}$  последовательности чисел  $t_n$  для серии графов  $\Gamma_n$ . Основное ограничение на серию:

(\*) для некоторого  $n > t$  форма  $F$  невырождена.

Методом производящих функций в работе показано, что при этом ограничении имеются лишь следующие возможные последовательности чисел  $t_n$ :

- |                                              |                                              |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1};$ | 1. $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^k 2^{2k-1};$    |
| 2. $t_{4k+1} = 2^{4k} + (-1)^{k+1}2^{2k};$   | 2. $t_{4k+1} = 2^{4k};$                      |
| 3. $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k};$ | 3. $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^{k+1}2^{2k};$ |
| 4. $t_{4k+3} = 2^{4k+2}.$                    | $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^{k+1}2^{2k+1}.$  |
- 
- |                                              |
|----------------------------------------------|
| 1. $t_{4k} = 2^{4k-1} + (-1)^{k+1}2^{2k-1};$ |
| 2. $t_{4k+1} = 2^{4k};$                      |
| 3. $t_{4k+2} = 2^{4k+1} + (-1)^k 2^{2k};$    |
| 4. $t_{4k+3} = 2^{4k+2} + (-1)^k 2^{2k+1}.$  |

## Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы, порождённые отражениями. Т. VI. М.: Мир, 1972.
2. Созутов А. И., Кузнецов А. А., Сеницин В. М. О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. мат. электрон. изв. Т. 10. С. 285-301.
3. Созутов А. И., Кузнецов А. А., Сеницин В. М. Генетические коды некоторых групп с 3-транспозициями // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. междунар. конф. памяти В. П. Шункова. Красноярск: СФУ, 2013. С. 121–122.

## Об алгоритме распознавания типов многогранников

**Д. В. Архаров, А. М. Гурин, Л. В. Петров, А. Н. Попов,  
А. С. Черный**

Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, Харьков

**Л. Н. Ромакина**

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов

**А. В. Тимофеев**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Настоящим сообщением мы делимся с участниками конференции разработанной нами программой и частичной реализацией её алгебраических методов в теории распознавания, идентификации и классификации геометрических образов. Круг вопросов в обширной

тематике распознавания образов так или иначе обращен к геометрическим интерпретациям наблюдаемых объектов, которые в том или ином виде могут быть представлены набором дискретных геометрических параметров, которые, в свою очередь, имеют то или иное алгебраическое обобщение. Наиболее ярким примером в этом смысле являются кристаллографические группы Федорова и их геометрические представления, чрезвычайно успешно послужившие в прикладных исследованиях.

Давно известно, что вещества с кристаллической внутренней структурой суть малая доля всего многообразия известных природных веществ. Впервые экспериментально полученные в 1950 г. так называемые неупорядоченные наноструктуры металлов (металлические стекла) начали исследовать намного раньше. В частности, в 1934 г. была опубликована монография Б. Н. Делоне и А. Д. Александрова с теоретическими разработками основ геометрии неупорядоченных структур. В ней сообщается, что неупорядоченные структуры имеют геометрическое представление в виде как собственно неупорядоченной геометрической структуры, так и вполне упорядоченной структуры, но в многомерном, необязательно евклидовом пространстве. В 1960 г. Ж. Д. Бернал в геометрическом эксперименте показал, что структура одноатомного инертного газа, полученного в твердом виде, допускает интерпретацию как совокупность из пяти различных выпуклых многогранников с треугольными гранями и центрами атомов в вершинах многогранников. Открытие Ж. Д. Бернала вызвало активное изучение выпуклых многогранников с правильными гранями, которое в той или иной мере завершенности сделано в работах 1960-2010 гг. Н. Джонсоном, В. А. Залгаллером, Б. А. Ивановым, Ю. А. Пряхиным, А. М. Гуриным, А. В. Тимофеевко [1,2]. Были открыты десятки новых многогранников с правильными гранями, которые стали реальными образами так называемых легандов — химических соединений, структура которых подробно изучалась Л. А. Аслановым в 1980–1990 гг. Геометрия и алгебра структуры модели Ж. Д. Бернала в целом изучена в ряде статей А. М. Гурина 1989–1996 гг.

В пространствах, отличных от евклидового, геометрические модели кристаллов изучались А. В. Погореловым, так называемые ква-

зикристаллы, характеризующиеся "запрещенной" для кристаллов в евклидовом пространстве симметрией. Развитие идей А. В. Погорелова в неожиданном направлении, перекликающемся с работами де Ситтера, А. Кели и Ф. Клейна, выполнено в ряде статей Л. Н. Ромакиной 2001-2012 гг. [3]. В процессе изучения геометрических структур, многогранников в частности, авторы столкнулись с фактом необходимости построить компьютерный, автоматический способ идентификации и классификации изучаемых классов геометрических объектов. В сообщении приводится схема алгоритма автоматической идентификации свойств и класса принадлежности испытуемого геометрического объекта. Следующий результат позволяет от применявшейся ранее частичной автоматизации перейти к программированию всего алгоритма идентификации.

Назовём отрезки, соединяющие попарно все вершины многогранника, диагоналями. Диагональ наименьшей длины — суть ребро многогранника. Множество всех возможных диагоналей многогранника назовем комплектом диагоналей многогранника. Тогда справедлива

**Теорема 1.** *Два выпуклых многогранника с правильными гранями конгруэнтны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые комплекты диагоналей.*

## Список литературы

1. Гурин А. М., Залгаллер В. А. К истории изучения выпуклых многогранников с правильными гранями и гранями, составленными из правильных // Тр. Мат. О-ва Санкт-Петербурга, 2008. Т. 14. С. 215–294.
2. Тимофеев А. В. К перечню выпуклых правильных многогранников // Современ. пробл. математики и механики. Т. VI. Математика. Вып. 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова/ под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. – М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 155–170.
3. Ромакина Л. Н. Простые разбиения гиперболической плоскости положительной кривизны // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 9. С. 83–116.

# Задача факторизации, когда одна из подалгебр состоит из кососимметрических матриц

**Р. А. Атнагулова**

Башкирский государственный педагогический университет  
им М. Акмуллы, Уфа

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — ассоциативная алгебра над  $R$ ,  $*$  — инволюция алгебры  $A$  и  $A$  — прямая сумма подпространств  $A_+$  и  $A_-$ , причем выполнены следующие условия:

1.  $A_+$  — подалгебра Ли в  $A^{(-)}$  — присоединенная алгебра Ли ассоциативного кольца  $A$ .

2.  $a^* = -a$ , для всех  $a \in A_+$ ,

3.  $[[A_-, A_-]_+, A_-] \subseteq A_-$ ,  $A_-$  — дополнительное подпространство к  $A_+$ .

Тогда волчок

$$(q_-)^*q + qq_- = q_t, q|_{t=0} = q_0 \quad (1)$$

сводится к решению линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

**Пример 1.**  $g_+$  — кососимметрическая матрица,  $*$  — транспонирование,  $g_-$  — блочно-диагональная матрица, при  $i > j$  блок с номером  $(i, j)$  состоит только из нулевой матрицы,  $i < j$  содержит произвольные матрицы, при  $i = j$  треугольная  $T_{n_i}$ , либо  $S_{n_i}$ .  $g = R_{3 \times 3}$ .

Приведем два конкретных примера волчков на трехмерных матрицах.

Случай 3.1.  $g_- = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right\}.$

$$q_t = (q_-)^*q + qq_- = \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a+c & d+b \\ c-a & b & e+c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a & a+c & d+b \\ c-a & b & e+c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}.$$

Случай 3.2.  $g_- = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & d \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} \right\}$

## Список литературы

1. Голубчик И. З., Соколов В. В. О некоторых обобщениях метода факторизации // ТМФ. 1999. Т. 110, Вып. 3. С. 339–350.
2. Golubchik I. Z., Sokolov V.V. Generalized operator Yang-Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras // J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V.7. № 2. P. 184–197.
3. Семенов-Тян-Шанский М. А. Что такое классическая  $r$ -матрица // Функц. анализ и его приложения. 1983. Т.17. Вып. 4. С. 17–33.

### Однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_2+k_3+k_4-2, k_2, k_3, k_4}$ при $k_4 \neq 0$

М. А. Башкин

Рыбинский государственный авиационный технический  
университет им. П. А. Соловьева, Рыбинск

Как известно, однородные расщепимые супермногообразия над  $\mathbb{CP}^1$  находятся во взаимно однозначном соответствии с невозрастающими наборами неотрицательных чисел (см. [4]). Обозначим через  $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_2+k_3+k_4-2, k_2, k_3, k_4}$  расщепимое супермногообразие, определяемое голоморфным векторным расслоением  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbb{CP}^1$  ранга 4, представленное в виде прямой суммы линейных расслоений на прямые  $\mathbf{E} = \mathbf{L}_{k_2+k_3+k_4-2} \oplus \mathbf{L}_{-k_2} \oplus \mathbf{L}_{-k_3} \oplus \mathbf{L}_{-k_4}$ .

Случай  $k_4 = 0$  рассматривался ранее в [1, 2, 3]. Цель исследования заключается в том, чтобы выяснить, существуют ли однородные нерасщепимые супермногообразия, связанные с каждым однородным расщепимым супермногообразием  $\mathbb{CP}^{1|4}_{k_2+k_3+k_4-2, k_2, k_3, k_4}$  при  $k_4 \neq 0$ . Оказывается, что при  $k_4 \neq 0$  для каждой сигнатуры существует ровно одно однородное нерасщепимое супермногообразие.

Проблема классификации однородных нерасщепимых супермногообразий, связанных с заданным однородным расщепимым супермногообразием, была поставлена А. Л. Онищиком в 1990-х гг. и подробно описана в [4]. При исследовании супермногообразий на однородность существенное значение имеют критерии подъема на нерасщепимое супермногообразие с соответствующего ему расщепимого

супермногообразия векторных полей и действий групп Ли, связанные с инвариантностью класса когомологий, определяющего нерасщепимое супермногообразие относительно этих действий.

## Список литературы

1. Башкин М. А. Однородное нерасщепимое супермногообразие с ретрактом  $\mathbb{CP}_{3220}^{1|4}$  // Соврем. пробл. математики: тез. 42-й Всерос. молодеж. шк.-конф. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 177–178.
2. Башкин М. А. Однородные и четно-однородные супермногообразия с ретрактом  $\mathbb{CP}_{kk20}^{1|4}$  при  $k \leq 2$  // Моделирование и анализ информационных систем. Ярославль, 2009. Т.16. № 3. С. 14–21.
3. Башкин М. А., Онищик А. Л. Однородные нерасщепимые супермногообразия над комплексной проективной прямой // Математика, кибернетика, информатика: тр. междунар. науч. конф. памяти А. Ю. Левина. Ярославль: ЯрГУ, 2008. С. 40–57.
4. Onishchik A. L., A Construction of Non-Split Supermanifolds // Annals of Global Analysis and Geometry. 1998. V. 16. P. 309–333.

## К гипотезе о полупропорциональных характерах

**В. А. Белоногов**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Пусть  $G$  — конечная группа. Характеры  $\varphi$  и  $\psi$  группы  $G$  называются *полупропорциональными*, если они не пропорциональны и для некоторого нормального подмножества  $M$  из  $G$   $\varphi|_M$  пропорционально  $\psi|_M$  и  $\varphi|_{G \setminus M}$  пропорционально  $\psi|_{G \setminus M}$ .

В ряде работ автором рассматривалась следующая гипотеза, впервые сформулированная в [1] в терминах так называемых малых  $D$ -блоков.

**Гипотеза 1** (гипотеза о полупропорциональных характерах). *Если  $\varphi$  и  $\psi$  — полупропорциональные неприводимые характеры конечной группы, то  $\varphi(1) = \psi(1)$ .*

Ранее автором определены все пары полупропорциональных неприводимых характеров спорадических простых групп; групп  $L_2(q)$ ,

$SL_2(q)$ ,  $PGL_2(q)$ ,  $GL_2(q)$ ; групп  $PGL_3(q)$ ,  $GL_3(q)$ ,  $PGU_3(q)$ ,  $GU_3(q)$ ; групп  $L_3(q)$ ,  $SL_3(q)$ ,  $U_3(q)$ ,  $SU_3(q)$ ; и, недавно (см. [4]), групп  $Sp_4(q)$  и  $PSp_4(q)$ . Для всех этих групп верна гипотеза 1. Изучению некоторых общих свойств произвольной группы, имеющей такую пару, посвящена статья [3]. В частности, в ней доказана справедливость гипотезы 1 для всех примарных групп и в некоторых случаях получены утверждения вида  $(\varphi(1), \psi(1)) \neq 1$  (слабое приближение к гипотезе).

Далее для полупропорциональных неприводимых характеров  $\varphi$  и  $\psi$  группы  $G$  будем использовать обозначения:  $G_0 := \{g \in G \mid \psi(g) = \varphi(g) = 0\}$ ,

$G_+ := \{g \in G \mid \psi(g) = \frac{\psi(1)}{\varphi(1)}\varphi(g) \neq 0\}$ ,  $G_- := \{g \in G \mid \psi(g) = -\frac{\varphi(1)}{\psi(1)}\varphi(g) \neq 0\}$ .

Согласно [2, 836]  $G = G_+ \dot{\cup} G_- \dot{\cup} G_0$ , причём  $G_+$  и  $G_-$  — непустые (здесь  $\dot{\cup}$  — знак объединения попарно непересекающихся множеств). Очевидно,  $1 \in G_+$ . Пусть  $a_2$  обозначает 2-часть натурального числа  $a$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — полупропорциональные неприводимые характеры конечной группы  $G$  и  $G$  совпадает со своим коммутантом  $G'$ .

1) Если  $G \setminus G_+$  содержит инволюцию, то 2 делит  $(\varphi(1), \psi(1))$  и, более того, либо 4 делит  $(\varphi(1), \psi(1))$ , либо  $\varphi(1)_2 = \psi(1)_2$ .

2) Если  $G \setminus G_+$  содержит элемент порядка 3, то 3 делит  $(\varphi(1), \psi(1))$ .

## Список литературы

1. Белоногов В. А.  $D$ -блоки характеров конечной группы // Исследования по теории групп. Свердловск: УрО АН СССР. 1984. С. 3–31. (Английский перевод: Belonogov V. A.  $D$ -blocks of characters of finite group // Amer. Math. Soc. Transl. (2). 1989. V. 143. P. 103–128).
2. Белоногов В. А. Представления и характеры в теории конечных групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1990. 379 с.
3. Белоногов В. А. К гипотезе о полупропорциональных характерах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 299–314.

4. Белоногов В. А. Полупропорциональные неприводимые характеры групп  $Sr_4(q)$  и  $Sr_4(q)$  при нечётных  $q$  // Труды ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 25–40.

**О графах, в которых окрестности вершин — сильно  
регулярные графы без треугольников с собственным  
значением 3**

**И. Н. Белоусов, А. А. Махнев**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

В [1] предложена программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 3. Там же задача редуцирована к случаю, когда окрестности вершин принадлежат конечному множеству исключительных графов.

Сильно регулярный граф без треугольников с неглавным собственным значением 3 имеет параметры  $(162, 21, 0, 3)$ ,  $(176, 25, 0, 4)$ ,  $(210, 33, 0, 6)$ ,  $(266, 45, 0, 9)$ . Существование графов с такими параметрами неизвестно. Графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами  $(162, 21, 0, 3)$ , изучены в [2]. В данной работе исследованы оставшиеся случаи.

**Теорема 1.** *Граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами*

$$(176, 25, 0, 4), (210, 33, 0, 6), (266, 45, 0, 9),$$

*не является дистанционно регулярным.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

**Список литературы**

1. Махнев А. А. О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // ДАН. 2013. Т. 452, № 5. С. 475-478.

2. Исакова М. М., Махнев А. А. О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами  $(162, 21, 0, 3)$  // Междунар. конф. Алгебра и комбинаторика: тез. докл. Екатеринбург. 2013. С. 67-69.

## Рекуррентные соотношения для симметрических многочленов $n$ -го порядка

**Ю. Н. Беляев**

Сыктывкарский государственный университет, Сыктывкар

Пусть  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , — элементарные симметрические многочлены матрицы  $A \equiv \|a_{gl}\|$  порядка  $n$ :  $\sigma_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$ ,  $\sigma_2 = \sum_{j>i} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $\sigma_n = \det A$ . Обозначим  $p_i = (-1)^{i-1} \sigma_i$ . Симметрические многочлены  $n$ -го порядка  $\mathcal{B}_g(n)$ , определены [1] рекуррентными соотношениями:  $\mathcal{B}_g(n) = 0$ ,  $g = 0, 1, \dots, n-2$ ;  $\mathcal{B}_{n-1}(n) = 1$ ;  $\mathcal{B}_g(n) = \sum_{l=1}^n p_l \mathcal{B}_{g-l}(n)$ .

**Теорема 1.** Симметрические многочлены  $\mathcal{B}_{j_1+j_2-g}(n)$  невырожденной матрицы  $n$ -го порядка при любых целых значениях  $j_1$ ,  $j_2$  и  $g = 0, 1, \dots, n-1$  выражаются через наборы многочленов  $\mathcal{B}_{j_1-1}(n), \dots, \mathcal{B}_{j_1-n}(n)$  и  $\mathcal{B}_{j_2-1}(n), \dots, \mathcal{B}_{j_2-n}(n)$  формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j_1+j_2-g}(n) = & \sum_{l_1=0}^{n-1} \sum_{l_2=0}^{n-1} \mathcal{B}_{l_1+l_2-g}(n) \sum_{g_1=0}^{l_1} p_{n-l_1+g_1} \mathcal{B}_{j_1-1-g_1}(n) \times \\ & \times \sum_{g_2=0}^{l_2} p_{n-l_2+g_2} \mathcal{B}_{j_2-1-g_2}(n). \quad (2) \end{aligned}$$

Если  $p_n = 0$ , соотношение (1) выполняется для целых  $j_1 \geq n$  и  $j_2 \geq n$ .

**Следствие 1** (Формулы удвоения индексов).

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{2j-k}(n) = & \sum_{l_1=0}^{n-1} \sum_{l_2=0}^{n-1} \mathcal{B}_{l_1+l_2-k}(n) \sum_{g_1=0}^{l_1} p_{n-l_1+g_1} \mathcal{B}_{j-1-g_1}(n) \times \\ & \times \sum_{g_2=0}^{l_2} p_{n-l_2+g_2} \mathcal{B}_{j-1-g_2}(n), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

**Пример.** Формулы удвоения индексов у симметрических многочленов второго порядка:

$$\mathcal{B}_{2j}(2) = p_1 \mathcal{B}_j^2(2) + 2p_2 \mathcal{B}_j(2) \mathcal{B}_{j-1}(2), \quad \mathcal{B}_{2j-1}(2) = \mathcal{B}_j^2(2) + p_2 \mathcal{B}_{j-1}^2(2).$$

Используя определение симметрических многочленов  $n$ -го порядка, несложно показать, что  $\mathcal{B}_j(2) = \sqrt{\sigma_2^{j-1}} U_{j-1}(b)$ , где  $b = \sigma_1 / (2\sqrt{\sigma_2})$ ,  $\sigma_2 \neq 0$ ,  $U_j(b) = \sin[(j+1) \arccos b] / \sqrt{1-b^2}$ . Поэтому для  $n=2$  из (1) следуют рекуррентные формулы для функций  $U_j(b)$ , которые при  $-1 \leq b \leq 1$  являются ортогональными полиномами Чебышёва второго рода.

**Следствие 2** (Полиномы Чебышёва второго рода суммарного индекса).

$$U_{k+l}(b) = U_{k-1}(b)U_{l+1}(b) - U_{k-2}(b)U_l(b) = U_k(b)U_l(b) - U_{k-1}(b)U_{l-1}(b).$$

## Список литературы

1. Belyayev Yu.N. Representation of matrix functions by means of symmetric polynomials // Book of abstracts of the International Conference on Algebra. Kiev. August 20-26, 2012. P. 30.

## О многообразиях представлений групп Баумслага-Солитера

**В. В. Беняш-Кривец, И. О. Говорушко**

Белорусский государственный университет, Минск

Группа  $G$  является хопфовой, если она изоморфна собственной факторгруппе. В [1] определено семейство групп  $BS(p, q) = \langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q \rangle$ , где  $p$  и  $q$  — ненулевые целые числа, которые называют группами Баумслага-Солитера. Группа  $BS(p, q)$  является хопфовой, если либо  $p \mid q$ , либо  $q \mid p$ , либо  $p$  и  $q$  имеют одинаковые простые делители. В противном случае группа  $BS(p, q)$  является нехопфовой. В частности,  $BS(p, q)$  нехопфова, если  $(p, q) = 1$ .

В дальнейшем будем предполагать, что  $(p, q) = 1$ ,  $p, q \neq \pm 1$ . В [2] описаны все неприводимые представления групп  $BS(p, q)$ . Гудман [3] доказал существование некоторых специальных представлений

групп  $BS(p, q)$  и охарактеризовал геометрию многообразия  $n$ -мерных представлений группы  $BS(p, q)$  в окрестности этих представлений. Ф. А. Дудкин [4] описал все подгруппы конечного индекса групп  $BS(p, q)$ , а позже описал все неприводимые представления этих подгрупп.

Для произвольной конечно порожденной группы  $G$  множество  $R_n(G)$  ее  $n$ -мерных представлений в  $GL_n(\mathbb{C})$  может быть снабжено естественной структурой аффинного алгебраического многообразия (см. [5]). Мы приводим некоторые результаты о многообразии представлений  $R_n(BS(p, q))$ .

**Теорема 1.** *Каждая неприводимая компонента  $W$  многообразия представлений  $R_n(BS(p, q))$  имеет размерность  $n^2$  и является  $\mathbb{Q}$ -унирациональным многообразием. Число неприводимых компонент многообразия  $R_n(BS(p, q))$  равно числу классов сопряженности матриц  $B$  таких, что  $B^p$  и  $B^q$  сопряжены.*

**Теорема 2.** *Число компонент связности многообразия  $R_n(BS(p, q))$  в комплексной топологии равно числу классов сопряженности диагональных матриц  $B$  таких, что  $B^p$  и  $B^q$  сопряжены.*

## Список литературы

1. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-hopfian groups // Bull. AMS. 1962. V. 68, № 3. P. 199–201.
2. McLaury D. Irreducible representations of Baumslag-Solitar groups // J. Group Theory. 2012. V. 15, № 4. P. 543–552.
3. Goodman R. E. Deformations of simple representations of two-generator  $HNN$  extensions. PhD thesis, The University of Oklahoma, Norman, OK, 2002.
4. Dudkin F. A. Subgroups of finite index in Baumslag-Solitar groups // Algebra and Logic. 2010. V. 49, № 3. P. 221–232.
5. Lubotzky A., Magid A. Varieties of representations of finitely generated groups // Memoirs AMS. 1985. VI. 58. P. 1-116.

# О бирациональной композиции квадратичных форм над полем функций

А. А. Бондаренко

Белорусский государственный университет, Минск

Пусть  $f(X)$  и  $g(Y)$  — невырожденные квадратичные формы размерности  $m$  и  $n$  над полем  $K$ ,  $\text{char } K \neq 2$ .

**Определение.** Если произведение  $f(X)g(Y)$  бирационально эквивалентно над  $K$  квадратичной форме  $h(Z)$  над  $K$  размерности  $m+n$ , то будем говорить, что квадратичные формы  $f(X)$  и  $g(Y)$  образуют бирациональную композицию  $h(Z)$  над полем  $K$ .

Первые результаты по проблеме композиции восходят к Гурвицу, который изучал задачу о сумме квадратов. Классические результаты Гурвица и Радона по этой задаче хорошо известны [1]. В [2] получены первые общие теоремы о бирациональной композиции квадратичных форм над полем  $K$ , полное решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над локальным полем дано в [3].

Основная цель настоящего сообщения — решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм над глобальными полями положительной характеристики. Решение проблемы бирациональной композиции квадратичных форм  $f(X)$  и  $g(Y)$  над глобальным полем  $F$ ,  $\text{char } F > 2$ , в случае, если либо  $f(X)$ , либо  $g(Y)$  изотропна над  $F$ , следует из теоремы 1 статьи [2]. Полное решение проблемы бирациональной композиции, когда обе квадратичные формы  $f(X)$  и  $g(Y)$ , анизотропны над полем  $F$ , дает

**Теорема 1.** Пусть  $f(X)$  и  $g(Y)$  анизотропные квадратичные формы размерностей  $m$  и  $n$  над глобальным полем  $F$ ,  $\text{char } F > 2$ ,  $m \leq n$ . Тогда  $1 \leq m \leq n \leq 4$ , бирациональная композиция  $h(Z)$  над  $F$  квадратичных форм  $f(X)$  и  $g(Y)$  определена однозначно с точностью до  $F$ -эквивалентности следующим образом:

1) если  $1 = m \leq n \leq 4$ , то бирациональная композиция существует всегда, и  $h(z_1, \dots, z_{n+1}) = ag(z_1, \dots, z_n)$ , где  $a \in D_F(f)$ .

2) если  $m = n = 2$  или  $m = n = 3$ , то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда  $f(X)$  и  $g(Y)$  эквивалентны с точностью до множителя над  $F$ . Если  $m = n = 2$ ,

то  $h(z_1, z_2, z_3, z_4) = ag(z_1, z_2)$ , где  $a \in D_F(f)$ . Если  $m = n = 3$ , то  $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6) = \lambda a^2(z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$ , где  $g(Y) \sim \lambda f(X)$ ,  $\lambda \in F$ ,  $f(X) \sim a(x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2)$ .

3) если  $m = n = 4$ , то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда  $f(X)$  и  $g(Y)$  эквивалентны с точностью до множителя над  $F$  одной и той же пфистеровой форме. При этом если  $f(X) \sim a(x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2 + \alpha\beta x_4^2)$ ,  $g(Y) \sim b(y_1^2 - \alpha y_2^2 - \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2)$ , то  $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8) = ab(z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$ .

4) если  $m = 2$ ,  $n = 3$ , то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда  $f(X)$  является подформой  $g(Y)$  с точностью до множителя над  $F$ . При этом если  $f(X) \sim a(x_1^2 - \alpha x_2^2)$ ,  $g(Y) \sim b(y_1^2 - \alpha y_2^2 - \beta y_3^2)$ , то  $h(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) = ab(z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$ .

5) если  $m = 2, 3$ ,  $n = 4$ , то бирациональная композиция существует тогда и только тогда, когда  $g(Y)$  эквивалентна с точностью до множителя пфистеровой форме  $f(X)$  с точностью до множителя является подформой  $g(Y)$ . При этом если  $f(X) \sim a(x_1^2 - \alpha x_2^2)$  при  $m = 2$  или  $f(X) \sim a(x_1^2 - \alpha x_2^2 - \beta x_3^2)$  при  $m = 3$  и  $g(Y) \sim b(y_1^2 - \alpha y_2^2 - \beta y_3^2 + \alpha\beta y_4^2)$ , то  $h(z_1, \dots, z_{m+n}) = ab(z_1^2 - \alpha z_2^2 - \beta z_3^2 + \alpha\beta z_4^2)$ .

## Список литературы

1. Lam K. Y. Topological methods for studying the composition of quadratic forms // Quadratic and Hermitian forms, Conf. Hamilton/Ont. 1983, CMS Conf. Proc. 1984. № 4. P. 173-192.
2. Бондаренко А. А. Бирациональная композиция квадратичных форм // Изв. НАН Белоруссии. Сер. физ.-мат. наук. 2007. № 4. С. 56.
3. Бондаренко А. А. Бирациональная композиция квадратичных форм над локальным полем // Мат. заметки. 2009. Т. 85. № 5. С. 661.

## О полугруппах с определяющими соотношениями вида $xy = 0$ и их матричных представлениях

**В. М. Бондаренко**

Институт математики НАН Украины, Киев

**Е. Н. Тертичная**

Киевский национальный экономический университет

им. Вадима Гетьмана, Киев

Пусть  $I$  — конечное множество и  $J \subset I \times I$ . Обозначим через  $K_0(I, J)$  полугруппу с образующими элементами  $e_i$ , где  $i$  пробегает  $I \cup 0$ , причем  $e_0 = 0$ , и определяющими соотношениями  $e_i e_j = 0$ , где  $(i, j)$  пробегает  $J$ .

Мы подробно изучаем полугруппы вида  $K_0(I, J)$  и их матричные представления над произвольным полем. Основное внимание уделяется следующим вопросам:

- 1) конечность и бесконечность полугрупп  $K_0(I, J)$ ;
- 2) существование точного матричного представления полугруппы  $K_0(I, J)$ ;
- 3) представленческий тип полугрупп  $K_0(I, J)$  (конечный и бесконечный типы, ручной и дикий типы).

Класс полугрупп, когда  $(i, i) \notin J$  и при этом  $e_i^2 = e_i$  для любого  $i \in I$ , изучался авторами ранее.

## О группоидах отношений

**Д. А. Бредихин**

Саратовский государственный технический университет, Саратов

Для заданного множества  $\Omega$  операций над бинарными отношениями обозначим через  $R\{\Omega\}$  класс алгебр изоморфных алгебрам отношений с операциями из  $\Omega$ . Пусть  $Var\{\Omega\}$  — многообразие, порожденное классом  $R\{\Omega\}$ .

Как правило, операции над отношениями задаются с помощью формул логики предикатов первого порядка. Такие операции могут быть классифицированы по виду задающих их формул. Операция называется диофантовой [1], если она может быть задана с помощью формулы, которая в своей предваренной нормальной форме содержит лишь операции конъюнкции и кванторы существования.

Предметом нашего рассмотрения будут алгебры отношений с одной бинарной диофантовой операцией, т.е. группоиды бинарных отношений. Рассмотрение бинарных операций над отношениями играет в алгебраической логике предикатов роль, аналогичную роли бинарных булевых функций в пропозициональной логике высказываний. Поэтому естественен интерес к алгебраическим свойствам указанных операций. Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [2, 3].

Сосредоточим внимание на следующей диофантовой операции над бинарными отношениями, задаваемой формулой

$$\rho * \sigma = \{(x, y) \in X \times X : (\exists z)(x, z) \in \rho \wedge (z, y) \in \sigma\}.$$

**Теорема 1.** *Группоид  $(A, \cdot)$  принадлежит многообразию  $Var\{*\}$  тогда и только тогда, когда он удовлетворяет тождествам:*

$$\begin{aligned} (xy)y &= xy, \quad (xy)^2 = xy, \quad ((xy)z)z = (xy)z, \quad x((yz)x) = x(yz), \\ ((xy)z)(z(xy)) &= (xy)z, \quad (x(yz))(yz) = x(yz), \quad ((xy)z)u = ((xy)u)z, \\ (x((yz)u))(x(yz)) &= x((yz)u), \quad (x(yz))(uv) = x((yz))(uv). \end{aligned}$$

## Список литературы

1. *Бредихин Д. А.* Об алгебрах отношений с диофантовыми операциями // ДАН. 1998. Т. 360. С. 594–595.
2. *Bredikhin D. A.* On relation algebras with general superpositions // Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. 1994. V. 54. P. 11–124.
3. *Bredikhin D. A.* Varieties of groupoids associated with involuted restrictive bisemigroups of binary relations // Semigroup Forum. 1992. V. 44. P. 87–192.

## Нильпотентная аппроксимируемость фундаментальных групп трёхмерных Sol-многообразий

**О. В. Брюханов**

НОУ Центросоюза РФ СибУПК, Новосибирск

Фундаментальные группы  $\Gamma$  компактных трёхмерных Sol-многообразий являются полициклическими и удовлетворяют включениям

$$\mathbb{Z}^2 \rtimes_M \mathbb{Z} \leq \Gamma \leq (\mathbb{R}^2 \rtimes \mathbb{R}) \rtimes D(4),$$

где  $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ,  $|\mathrm{tr}(M)| > 2$ ,  $D(4)$  — группа диэдра на восьми элементах [1].

Изучению различных свойств фундаментальных групп 3-многообразий, а также групп изометрий модельных трёхмерных геометрий посвящено большое количество исследований, обзор которых приведён в [2]. Так, в [2] отмечено, что группы изометрий шести из восьми модельных трёхмерных геометрий, куда входит и Sol-геометрия, вкладываются в  $\mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ , а фундаментальные группы Sol-многообразий, как почти полициклические, являются группами целочисленных матриц различной степени.

В представленной работе показано, что группа изометрий модельной трёхмерной Sol-геометрии вкладывается в общую линейную группу  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ , а фундаментальные группы  $\Gamma$  компактных трёхмерных Sol-многообразий — в общую линейную группу  $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$ . С учетом полученного представления исследуется поведение нижнего центрального ряда фундаментальных групп компактных трёхмерных Sol-многообразий и дан критерий их нильпотентной аппроксимруемости.

**Теорема 1.** *Пусть  $\Gamma$  — кокомпактная группа изометрий Sol-геометрии, тогда:*

*а) если  $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_M \mathbb{Z}$ , то она является нильпотентно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда  $\mathrm{tr}(M) \neq 3$ ;*

*б) если  $\Gamma > \mathbb{Z}^2 \rtimes_M \mathbb{Z}$ , то она является нильпотентно аппроксимируемой тогда и только тогда, когда  $\mathrm{tr}(M) \equiv 0 \pmod{2}$ . Более того, она аппроксимируется конечными 2-группами.*

## Список литературы

1. Терстон У. Трехмерная геометрия и топология. М.: МЦНМО, 2001. 312 с.
2. Aschenbrenner M., Friedl S. and Wilton H. 3-manifold groups. 2012. <http://arxiv.org/abs/1205.0202v.2>.

### Преобразования Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка

**И. В. Веревкин**

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Одним из эффективных способов построения решений заданного дифференциального уравнения является сведение его к изученному уравнению. Групповой анализ дифференциальных уравнений использует для этих целей понятие точечного преобразования, переводящего одно уравнение в другое. Иной подход использует известное преобразование Дарбу [1], которое позволяет строить решения уравнений, стартуя с известных уравнений. В монографии [2] описан класс линейных дифференциальных уравнений с частными производными и преобразования Эйлера-Дарбу (ЭД), переводящие решения одного уравнения в решения преобразованного уравнения того же типа. В настоящем докладе представляются результаты исследования преобразований ЭД для уравнения Фоккера-Планка (ФП).

Построены прямое преобразование ЭД, высшее преобразование ЭД, а также противоположное преобразование ЭД, которым переводятся решения преобразованного уравнения в решения исходного (наличие противоположного преобразования ЭД позволяет разбить множество уравнений ФП на классы эквивалентности относительно преобразований ЭД). Показано, как можно использовать преобразование ЭД для построения многомерных уравнений ФП некоторого частного вида. В качестве примера построены решения уравнения ФП с заданными краевыми условиями [3].

## Список литературы

1. Matveev V. B., Salle M. A. Darboux Transformation and Solitons. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
2. Капцов О. В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
3. Верёвкин И. В. // Теоретическая и математическая физика. Т. 166. № 1. 2011.

## Группы расщепления неразложимых $p$ -локальных групп без кручения

С. В. Вершина

Московский государственный педагогический университет, Москва

Если группа  $A$  является абелевой  $p$ -локальной группой относительно простого числа  $p$ , то ее можно рассматривать как модуль над кольцом дискретного нормирования  $\mathbb{Z}_p$ , которое является локализацией кольца целых чисел  $\mathbb{Z}$  относительно простого идеала  $(p)$ . Известны понятия кольца и поля расщепления для группы  $A$  [1].

**Определение 1.** Группу  $B$   $p$ -ранга 1 назовем *группой расщепления* для неразложимой  $p$ -локальной группы  $A$ , если  $A \otimes_{\mathbb{Z}_p} B \cong A_1 \oplus B^k$  для  $k \geq 1$ .

**Определение 2.** Внутренней  $p$ -адической характеристикой  $H_*(a)$  ненулевого элемента  $a$  группы  $A$  назовем множество

$$H_*(a) = \{\alpha \in \widehat{\mathbb{Z}}_p \mid \alpha \cdot a \in A\}.$$

**Определение 3.** Внешней  $p$ -адической характеристикой  $H^*(b)$  элемента  $b$  нулевой  $p$ -высоты относительно  $p$ -базиса  $\{b, b_1, \dots, b_n\}$  группы  $A$  назовем  $p$ -адическую характеристику  $H_*(b + B)$  элемента  $b + B$  фактор-группы  $A/B$ , где  $B = \bigoplus_{i=1}^n \langle b_i \rangle$ .

Заметим, что если  $r_p(A) = 1$ , то  $H_*(b) = H^*(b)$  для любого элемента  $b \in A$ .

**Теорема 1.** Для любого ненулевого элемента  $b$  нулевой  $p$ -высоты неразложимой  $p$ -локальной группы без кручения  $A$  конечного  $p$ -ранга имеют место следующие утверждения:

- 1)  $H_*(b) \subseteq H^*(b)$ ;
- 2)  $H^*(b)$  является редуцированной  $p$ -локальной группой  $p$ -ранга 1, сервантной в кольце целых  $p$ -адических  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ , содержащей единицу кольца  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ ;
- 3) Группа  $H^*(b)$  является группой расщепления для группы  $A$ .

Работа выполнена при поддержке ФЦП на 2009–2013 гг. Государственный контракт №14.В37.21.0363.

### Список литературы

1. Lady E. L. Splitting fields for torsion free modules over discrete valuation ring // J. Algebra. 1977. V. 49. P. 261–275.

## О многообразии полуколец с идемпотентным умножением

**Е. М. Вечтомов, А. А. Петров**

Вятский государственный гуманитарный университет, Вятка

*Полукольцом* называется алгебраическая структура  $\langle S, +, \cdot, 0 \rangle$  с бинарными операциями сложения  $+$  и умножения  $\cdot$ , такими, что  $\langle S, +, 0 \rangle$  — коммутативный моноид,  $\langle S, \cdot \rangle$  — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и выполняется свойство мультипликативности нуля ( $\forall x \in S \ x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$ ). Полукольцо с тождеством  $xx = x$  называется *мультипликативно идемпотентным*. Мультипликативно идемпотентные полукольца коммутативны в нуле [1, предложение 1]. Для элемента  $a$  полукольца  $S$  обозначим  $\text{Ann } a = \{s \in S : as = sa = 0\}$ .

На полукольце  $S$  рассмотрим соотношение  $\text{Ann } a = \text{Ann } b \Rightarrow a = b$ . (\*)

Класс мультипликативно идемпотентных полуколец со свойством (\*) содержится в многообразии коммутативных полуколец с тождеством  $x + 2xy = x$ , которое порождается двухэлементной цепью  $\mathbb{B}$  и двухэлементным полем  $\mathbb{Z}_2$ . Заметим, что кольца с условием (\*) — это в точности булевы кольца [2, теорема 1]. Кроме того, будем говорить, что полукольцо  $S$  обладает *свойством (\*\*)*, если каноническое

отображение множества  $\text{Con } S$  конгруэнций на  $S$  во множество  $\text{Id } S$  его идеалов (при котором каждой конгруэнции ставится в соответствие ее класс нуля) биективно.

Для функции  $f \in \prod_{i \in I} S_i$  обозначим  $\text{supp } f = \{i \in I : f(i) \neq 0\}$ .

**Теорема 1.** *Мультипликативно идемпотентные полукольца со свойством (\*) суть в точности подпрямые произведения  $S$  полуколец  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{Z}_2$ , удовлетворяющие условию:  $(\forall f, g \in S)(\text{supp } f \subset \text{supp } g \Rightarrow (\exists h \in S)\text{supp } h \subseteq \text{supp } g \setminus \text{supp } f)$ .*

**Теорема 2.** *Мультипликативно идемпотентное полукольцо удовлетворяет условию (\*\*) тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению булева кольца и обобщенно булевой решетки.*

**Следствие.** *Для произвольного конечного неоднородного мультипликативно идемпотентного полукольца  $S$  равносильны следующие условия:*

- (1)  $S$  обладает свойством (\*);
- (2)  $S$  обладает свойством (\*\*);
- (3)  $S$  изоморфно прямому произведению конечного числа полуколец  $\mathbb{B}$  и  $\mathbb{Z}_2$ .

## Список литературы

1. Вечтомов Е. М., Петров А. А. Свойства мультипликативно идемпотентных полуколец // Ученые зап. Орлов. гос. ун-та. Сер. "Естественные, технические и медицинские науки". 2012. № 6. Ч. 2. С. 60–68.
2. Вечтомов Е. М. Аннуляторные характеристики булевых колец и булевых решеток // Мат. заметки. 1993. Т. 53. № 2. С. 15–24.

# Определяемость абелевых групп своими группами автоморфизмов

В. К. Вильданов

Нижегородский государственный педагогический университет,  
Нижний Новгород

Будем говорить, что группа  $A$  определяется своей группой автоморфизмов в классе групп  $\mathbf{X}$ , если из  $\text{Aut}(A) \cong \text{Aut}(B)$ , где  $B \in \mathbf{X}$ , всякий раз следует, что  $A \cong B$ .

В работах [1, 2], при некоторых ограничениях на рассматриваемые группы, были получены необходимые и достаточные условия определяемости групп в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения. В настоящей работе получены достаточные условия определяемости группы своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{F}_{\text{cdi}}$  всех вполне разложимых абелевых групп без кручения идемпотентного типа.

Обозначим  $\Omega(A)$  множество всех типов прямых слагаемых ранга 1 группы  $A$ .

**Теорема 1.** Пусть  $A \in \mathbf{F}_{\text{cdi}}$ ,  $2A = A$ . Если для любого типа  $\tau \in \Omega(A)$ ,  $r(A^{(\tau)}) > 1$ , то группа  $A$  определяется своей группой автоморфизмов в классе  $\mathbf{F}_{\text{cdi}}$ .

Получены примеры групп, для которых условия теоремы не выполнены, однако они определяются своими группами автоморфизмов в классе  $\mathbf{F}_{\text{cdi}}$ . Таким образом, полученные достаточные условия определяемости не являются необходимыми.

## Список литературы

1. Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой абелевой группы ранга 2 своей группой автоморфизмов // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т. 1. № 3. С. 174–177.
2. Вильданов В. К. Определяемость вполне разложимой блочно жёсткой абелевой группы без кручения её группой автоморфизмов // Фундаментальная и прикладная математика. 2012. Т. 17. № 8. С. 13–19.

# Об одновременном приведении элементов свободных абелевых групп к положительному виду

О. А. Воронина

Северо-Казахстанский государственный университет, Петропавловск

Элемент  $u$  свободной группы  $F_n$  с фиксированным множеством свободных порождающих  $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  называется *положительным*, если в редуцированной записи  $u$  в этих порождающих нет отрицательных степеней.

Элемент  $u$  называется *потенциально положительным*, если он положителен в некоторой системе свободных порождающих  $Y_n = \{y_1, \dots, y_n\}$  группы  $F_n$ .

Данные определения введены А. Мясниковым и В. Шпильрайном в известном сборнике нерешенных проблем в теории групп *Open problems in combinatorial and geometric group theory* ([http: www.grouptheory.org](http://www.grouptheory.org) или [www.grouptheory.info](http://www.grouptheory.info)).

Будем называть элемент  $u$  произвольной конечно порожденной группы  $G$  со множеством ее порождающих элементов  $X_n = \{x_1, \dots, x_n\}$  *положительным* относительно  $X_n$ , если его можно записать как положительное (т. е. полугрупповое) слово от порождающих  $X_n$ .

Пусть  $A_n \simeq \mathbf{Z}^n$  - свободная абелева группа ранга  $n$ . Набор элементов  $a_1, a_2, \dots, a_k$  группы  $A_n$  называется *положительно линейно независимым*, если из равенства  $\sum_{i=1}^k \alpha_i \cdot a_i = 0$ , где  $\alpha_i \geq 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ , следует, что  $\alpha_i = 0$  для всех  $i = 1, \dots, k$ . Здесь  $\alpha_i$  - натуральные числа. В противном случае набор элементов называется *положительно линейно зависимым*.

**Теорема 1.** *Набор ненулевых элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  свободной абелевой группы  $A_n \simeq \mathbf{Z}^n$  приводится к положительному виду, т. е. все его элементы одновременно положительны относительно некоторого множества свободных порождающих группы  $A_n$ , тогда и только тогда, когда он положительно линейно независим.*

В доказательстве теоремы устанавливается достаточность свойства положительной линейной независимости набора элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n$  для одновременного приведения его к положительному виду. Необходимость этого свойства очевидна.

## Список литературы

1. Baumslag G., Myasnikov A. G., Shpilrain V. Open problems in combinatorial group theory, second edition, from: "Combinatorial and geometric group theory" (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001), Contemp. Math. 296, Amer. Math. Soc. (2002).1-38 Problem F34.

## Применение метода Нидеррайтера-Шпарлинского оценки неполных тригонометрических сумм к суммам над кольцами Галуа

М. М. Глухов

Москва

Для приложений теории линейных рекуррентных последовательностей (ЛРП) важно уметь оценивать частоту появления элементов кольца на произвольном отрезке последовательности заданной длины. Основные результаты по оценке частотных характеристик получены с помощью метода тригонометрических сумм. Классические методы В. М. Сидельникова и И. М. Виноградова развивались и обобщались многими специалистами. В частности, О. В. Камловским [3] указанные методы обобщены на случай ЛРП над кольцами Галуа, при этом полученные оценки в некоторых случаях оказываются точнее известных ранее. В работе [1] был предложен иной по технике получения оценки суммы характеров метод оценки частотных характеристик инверсных конгруэнтных генераторов над простым конечным полем. Мы обобщим его на случай ЛРП над произвольным кольцом Галуа. При этом будем придерживаться общепринятой терминологии и обозначений из работ [1–3].

Пусть всюду далее  $p$  – простое,  $q = p^t$ ,  $R = GR(q^n, p^n)$  – кольцо Галуа характеристики  $p^n$  из  $q^n$  элементов,  $\{u(i)\}_{i=0}^\infty$  – ЛРП порядка  $m$  над  $R$ ,  $f(x) \in R[x]$  – многочлен Галуа степени  $m$ . Тогда  $S = R[x]/f(x)$  – кольцо Галуа  $GR(q^{mn}, p^n)$ . Будем рассматривать кольцо  $S$  как расширение кольца  $R$ . Группа автоморфизмов  $\text{Aut}(S/R)$  кольца  $S$ , тождественным образом действующих на элементы из  $R$ , является циклической группой порядка  $m$ . Через  $\text{Tr}_R^S$  обозначим функцию след из  $S$  в  $R$ , определяемую равенством  $\forall x \in S : \text{Tr}_R^S(x) = \sum_{\tau \in \text{Aut}(S/R)} \tau(x)$ .

Известно, что период многочлена Галуа  $f(x) \in R[x]$  степени  $m$  равен  $\frac{q^m-1}{d}p^\nu$  при некоторых  $\nu \in \overline{0, n-1}$  и  $d|(q^m-1)$ . Важным является: если во введенных выше обозначениях  $u = \{u(i)\}_{i=0}^\infty$  – ЛРП над кольцом  $R$  с характеристическим многочленом  $f(x)$ , имеющим корень  $\alpha \in S$ , то существует единственный элемент  $b \in S$ , такой, что  $\forall i \in \mathbb{N}_0 : u(i) = \text{Tr}_R^S(b\alpha^i)$ . Обозначим через  $R_0 = \{0, e, 2e, \dots, (p^n-1)e\}$  подкольцо кольца  $R$ , изоморфное  $\mathbb{Z}_{p^n}$ , а через  $\chi(x) = \exp\left(\frac{2\pi i \text{Tr}_{R_0}^R(x)}{p^n}\right)$  – аддитивный характер кольца  $R$ . Рассмотрим характер аддитивной группы кольца  $S$ , индуцированный аддитивным характером  $\chi(x)$  кольца  $R$ :  $\chi'(x) = \chi(\text{Tr}_R^S(x)) = \exp\left(\frac{2\pi i \text{Tr}_{R_0}^S(x)}{p^n}\right)$ .

Для каждого элемента  $c$  кольца  $R$  определим норму  $\|c\| = \max(j \in \overline{0, n-1} : c \in p^j R)$ . Нормой последовательности  $u$  над  $R$  назовем минимальное значение норм элементов последовательности.

Оценка числа появления  $r$ -грамм на начальном отрезке длины  $N$  линейно независимой системы ЛРП над кольцом  $R$  с характеристическим многочленом  $f(x)$  сводится (см. [3], утв. 1) к оценке величины суммы характеров вида  $S(N) = \sum_{i=0}^{N-1} \chi'(b\alpha^i)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $p$  – простое,  $q = p^t$ ,  $S = GR(q^{mn}, p^n)$ ,  $R = GR(q^n, p^n)$ ,  $\chi'(x)$  – определенный выше характер аддитивной группы кольца  $S$ ,  $\alpha, b \in S$ ,  $b \neq 0$ ,  $\alpha$  – корень некоторого реверсивного многочлена Галуа  $f(x)$  степени  $m$  над кольцом  $R$ ,  $\text{ord } \alpha = p^\nu(q^m-1)/d$ ,  $N \in \{1, 2, \dots, \text{ord } \alpha - 1\}$ . Тогда

$$|S(N)| \leq N^{\frac{1}{3}} q^{\frac{m}{3}} \left( \frac{1}{2} + \left( \frac{p^\nu}{d} \left( 1 + ((dp^{n-\|b\|-1} - 1)q^{\frac{m}{2}} + 1) \frac{N^{\frac{1}{3}}}{q^{\frac{2m}{3}}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Полученная оценка сильнее известной оценки В. М. Сидельникова  $|S(N)| \leq (3(p^m N - N^2))^{\frac{1}{3}} = N^{\frac{1}{3}} p^{\frac{m}{3}} (3(1 - Np^{-m}))^{\frac{1}{3}}$  сумм характеров над конечным полем ( $n = 1$ ,  $\nu = 0$ ,  $q = p$ ) при  $d \geq 2$  и  $N \leq p^{\frac{m}{2}}/8$ . Она точнее оценки О. В. Камловского ([3], следствие 1) для сумм характеров над рассмотренным нами кольцом Галуа при  $N = sq^{m/2}$  и  $s \geq 8p^{\nu+n-1-\|b\|}r^2$ .

## Список литературы

1. Niederreiter H., Shparlinski I. E. On the distribution of inversive congruential pseudorandom numbers in part of the period // Mathematics of Computation. 2000. V.70. № 236. P. 1569–1574.
2. Камловский О. В. Частотные характеристики линейных рекуррентных последовательностей над кольцами Галуа. // Мат. сб. 2009. Т. 200. № 4. С. 31–52.
3. Камловский О. В. Метод В. М. Сидельникова для оценки числа знаков на отрезках линейных рекуррентных последовательностей над кольцами Галуа // Мат. зам. 2012. Т. 91. Вып. 3. С. 371–382.

## Об изоморфизме графов Мэтона и графов, получаемых из двух других конструкций

С. В. Горяинов

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

В работе [1] описаны две новых конструкции антиподальных дистанционно-регулярных графов, вопрос об изоморфизме которых известным конструкциям автор [1] оставил открытым. (Основные определения и обозначения см. в [2].) Напомним основные результаты из [1].

Пусть  $\Gamma_B$  — граф со множеством вершин  $B = g^G \cup (g^{-1})^G$ , где  $g^G$  — класс сопряженных элементов порядка  $p$  группы  $G = PSL_2(p^n)$ , и множеством ребер  $\{\{x, y\} | xy^{-1} \in B\}$ ,  $p$  — нечетное простое число,  $q = p^n \geq 5$ . Пусть  $\widehat{\Gamma}_B$  — граф, полученный из графа  $\Gamma_B$  удалением ребер, соединяющих попарно коммутирующие вершины из  $B$ .

**Теорема 1** (Мухаметьянов). *Если  $q \equiv 1(4)$ , то граф  $\widehat{\Gamma}_B$  является дистанционно-регулярным с массивом пересечения  $\{q, q-3, 1; 1, 2, q\}$ .*

Пусть  $\Gamma_J$  — граф, множество вершин которого совпадает со множеством всех элементов порядка  $p$  группы  $G$ , а множество ребер —  $\{\{x, y\} | xy^{-1} \in J\}$ , где  $J$  — класс сопряженных инволюций группы  $G$ .

**Теорема 2** (Мухаметьянов). Если  $q \equiv 1, 3(8)$ , то граф  $\Gamma_J$  несвязен, и его компоненты связности есть два изоморфных между собой дистанционно-регулярных графа с массивом пересечения  $\{q, q-3, 1; 1, 2, q\}$ .

В [2, Предложение 12.5.3] приводится

**Теорема 3** (Mathon). Пусть  $q = rt + 1$  — степень простого, где  $r > 1$  и  $t$  — четно или  $q$  — степень 2. Пусть  $V$  — векторное пространство размерности 2 над полем  $F_q$ , снабженное невырожденной симплектической формой  $B$ ,  $K$  — подгруппа индекса  $r$  мультипликативной группы  $F_q^*$ , и  $b \in F_q^*$ . Тогда граф  $\Gamma$  со множеством вершин  $\{Kv \mid v \in V \setminus \{0\}\}$  и множеством ребер  $\{(Ku, Kv) \mid B(u, v) \in bK\}$  является дистанционно-регулярным с массивом пересечения  $\{q, q-t-1, 1; 1, t, q\}$ , причем с точностью до изоморфизма  $\Gamma$  не зависит от выбора элемента  $b$ , формы  $B$  и подгруппы  $K$ .

В данной работе доказана

**Теорема 4.** Граф  $\widehat{\Gamma}_B$  и любая из компонент связности графа  $\Gamma_J$  изоморфны графу, получаемому из теоремы 3 при  $t = 2$  и соответствующем значении  $q$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-31098) и Совета при Президенте РФ (проект МК-1719.2013.1).

## Список литературы

1. Мухаметьянов И. Т. О дистанционно-регулярных графах на множестве неединичных  $p$ -элементов группы  $L_2(p^n)$  // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4.
2. Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989. 386 p.

# Нормальная определяемость абелевых групп без кручения своими голоморфами

С. Я. Гриншпон

Томский государственный университет, Томск

И. Э. Гриншпон

Томский университет систем управления и радиоэлектроники, Томск

Две группы называются *голоморфно изоморфными*, если голоморфы этих групп изоморфны. Говорят, что группа  $A$  *определяется своим голоморфом в некотором классе групп*, если любая группа  $B$  из этого класса, голоморфно изоморфная группе  $A$ , изоморфна группе  $A$ . Известны примеры неизоморфных конечных некоммутативных групп, голоморфы которых изоморфны [1]. В [2] В. Миллс показал, что всякая конечно порожденная абелева группа определяется своим голоморфом в классе всех конечно порожденных абелевых групп. Ряд интересных результатов об определяемости абелевых групп своими голоморфами получен И. Х. Беккером [3,4]. Полезные результаты о голоморфах (аффинных группах) модулей содержатся в [5]. Обобщением понятия голоморфного изоморфизма является понятие почти голоморфного изоморфизма. Группы  $A$  и  $B$  называются почти *голоморфно изоморфными*, если каждая из них изоморфна нормальной подгруппе голоморфа другой группы. Понятно, что если две группы являются голоморфно изоморфными, то они почти голоморфно изоморфны. Обратное, вообще говоря, неверно. Почти голоморфно изоморфные конечно порожденные абелевы группы исследовались в работе В. Миллса [2]. Почти голоморфно изоморфные абелевы  $p$ -группы изучались в работах [6,7]. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп из некоторых классов и почти голоморфный изоморфизм таких групп исследовался в [8]. Отметим, что если в некотором классе групп из почти голоморфного изоморфизма двух групп следует их изоморфизм, то всякая группа из этого класса определяется своим голоморфом в данном классе. Будем говорить, что группа  $G$  *нормально определяется в некотором классе групп своим голоморфом*, если для любой группы  $H$  из этого класса из почти голоморфного изоморфизма групп  $G$  и  $H$  следует изоморфизм самих групп  $G$  и  $H$ .

Авторами получены следующие результаты о нормальной определяемости абелевых групп без кручения своими голоморфами.

**Теорема 1.** *Голоморф делимой абелевой группы  $G$  без кручения не содержит ненулевых нормальных абелевых подгрупп, отличных от  $G$ .*

Из этой теоремы следует, что всякая делимая абелева группа без кручения нормально определяется своим голоморфом в классе всех абелевых групп. Отметим, что для абелевых  $p$ -групп утверждение, аналогично теореме 1, уже не имеет места.

**Теорема 2.** *Вполне разложимая однородная группа нормально определяется своим голоморфом в классе всех вполне разложимых однородных групп.*

Обозначим через  $\mathfrak{A}$  класс вполне разложимых абелевых групп без кручения с попарно несравнимыми типами прямых слагаемых их канонических разложений.

**Теорема 3.** *Всякая группа из класса  $\mathfrak{A}$  нормально определяется своим голоморфом в этом классе.*

**Теорема 4.** *Существует вполне разложимая абелева группа без кручения, которая нормально не определяется своим голоморфом в классе всех вполне разложимых абелевых групп без кручения.*

## Список литературы

1. Miller G. A. On the multiple holomorph of a group // Math. Ann. 1908. V. 66. P. 133-142.
2. Mills W. H. On the non-isomorphism of certain holomorphs. // Trans. Amer. Math. Soc. 1953. V. 74. № 3. P. 428-443.
3. Беккер И. Х. Абелевы группы с изоморфными голоморфами. // Изв. вузов. Математика. 1975. № 3. С. 97-99.
4. Беккер И. Х. Абелевы голоморфные группы. // Междунар. конф. Всесибир. чтения по математике и механике. Избр. докл. Т. 1. Математика. 1997. С. 43-47.
5. Крылов П. А. Аффинные группы модулей и их автоморфизмы. // Алгебра и логика. 2001. Т. 40. № 1. С. 60-82.

6. Беккер И. Х., Гриншпон С. Я. Почти голоморфно изоморфные примарные абелевы группы. // Группы и модули. Межвуз. темат. сб. науч. тр. 1976. С. 90-103.
7. Гриншпон С. Я. Почти голоморфно изоморфные абелевы группы. // Тр. ТГУ. 1975. Т. 220. Вопр. математики. Вып. 3. С. 78-84.
8. Гриншпон И. Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм // Фундамент. и приклад. математика. 2007. Т. 13. № 3. С. 9-16.

## Модули над групповыми кольцами групп, отличных от своего коммутанта

О. Ю. Дашкова

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск

Артиновы и нетеровы модули — важный объект исследования алгебры. Естественным обобщением классов артиновых и нетеровых модулей является класс минимаксных модулей (гл. 7 [1]). Модуль  $A$  над кольцом  $\mathbf{R}$  называется минимаксным, если он обладает конечным рядом подмодулей, каждый фактор которого является либо нетеровым  $\mathbf{R}$ -модулем, либо артиновым  $\mathbf{R}$ -модулем.

Пусть  $A$  — модуль над групповым кольцом  $\mathbf{R}G$ , где  $\mathbf{R}$  — кольцо,  $G$  — группа, и пусть  $\mathfrak{M}$  — некоторый класс  $\mathbf{R}$ -модулей. В работе изучается  $\mathbf{R}G$ -модуль  $A$ , такой, что  $A/C_A(G)$  не принадлежит  $\mathfrak{M}$ , а для каждой собственной подгруппы  $H$  группы  $G$  фактор-модуль  $A/C_A(H)$  принадлежит  $\mathfrak{M}$ . В [2] исследовался  $FG$ -модуль  $A$ , такой, что  $G$  — почти локально разрешимая группа,  $F$  — поле простой характеристики и  $\mathfrak{M}$  — класс всех конечно порожденных  $F$ -модулей. Случай, когда  $A$  —  $\mathbf{R}G$ -модуль,  $G$  — бесконечная разрешимая группа,  $\mathbf{R}$  — кольцо целых  $p$ -адических чисел и  $\mathfrak{M}$  — класс всех артиновых  $\mathbf{R}$ -модулей, рассматривался в [3]. В [4] изучался  $\mathbf{R}G$ -модуль  $A$ , такой, что  $G$  — бесконечная разрешимая группа,  $\mathbf{R}$  — кольцо целых чисел и  $\mathfrak{M}$  — класс всех артиновых  $\mathbf{R}$ -модулей. В каждом из этих случаев было доказано, что группа  $G$  изоморфна квазициклической  $q$ -группе для некоторого простого числа  $q$ .

Основными результатами работы являются теоремы 1–3.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  —  $\mathbf{R}G$ -модуль, где  $G$  — бесконечная группа,  $G \neq G'$ ,  $\mathbf{R}$  является либо кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ , либо кольцом  $\mathbb{Z}_{p^\infty}$  целых  $p$ -адических чисел. Если  $A/C_A(G)$  не является артиновым  $\mathbf{R}$ -модулем, а  $A/C_A(H)$  — артинов  $\mathbf{R}$ -модуль для каждой собственной подгруппы  $H$  группы  $G$ , то  $G$  изоморфна квазициклической  $q$ -группе  $C_{q^\infty}$  для некоторого простого числа  $q$ .

**Теорема 2.** Пусть  $A$  —  $\mathbb{Z}G$ -модуль, где  $G$  — бесконечная локально разрешимая группа,  $G \neq G'$ ,  $\mathbb{Z}$  — кольцо целых чисел. Если  $A/C_A(G)$  не является минимаксным  $\mathbb{Z}$ -модулем, а  $A/C_A(H)$  — минимаксный  $\mathbb{Z}$ -модуль для каждой собственной подгруппы  $H$  группы  $G$ , то  $G$  изоморфна квазициклической  $q$ -группе  $C_{q^\infty}$  для некоторого простого числа  $q$ .

**Теорема 3.** Пусть  $A$  —  $\mathbf{R}G$ -модуль, где  $G$  — бесконечная группа,  $G \neq G'$ ,  $\mathbf{R}$  — ассоциативное кольцо. Если  $A/C_A(G)$  — бесконечный  $\mathbf{R}$ -модуль, а  $A/C_A(H)$  — конечный  $\mathbf{R}$ -модуль для каждой собственной подгруппы  $H$  группы  $G$ , то  $G$  изоморфна квазициклической  $q$ -группе  $C_{q^\infty}$  для некоторого простого числа  $q$ .

## Список литературы

1. Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N. Insight into Modules over Dedekind Domains // Kyiv: Inst. Math. Nat. Acad. Sci. Ukraine. 2008.
2. Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A. Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. 2004. V. 277. № 1. P. 172–186.
3. Dashkova O. Yu. On modules over group rings of locally soluble groups for a ring of  $p$ -adic integers // Algebra Discrete Math. 2009. № 1. P. 32–43.
4. Дашкова О. Ю. Локально разрешимые АФА-группы // Укр. мат. журн. 2013. Т. 65. № 4. С. 459–469.

**Нормализатор элементарной сетевой группы,  
связанной с нерасщепимым максимальным тором  
в полной линейной группе над полем рациональных чисел**

**Н. А. Джусоева, В. А. Койбаев**

Северо-Осетинский государственный университет, Владикавказ

В работе (теорема 2) вычисляется нормализатор  $N(\sigma)$  элементарной сетевой группы  $E(\sigma)$  в полной линейной группе  $G = GL(n, \mathbb{Q})$  над полем рациональных чисел  $\mathbb{Q}$ . При этом рассматриваемые сети  $\sigma$  связаны с нерасщепимым максимальным тором  $T = T(d)$ , который является образом мультипликативной группы радикального расширения  $K = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{d})$  (степени  $n$ ) поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  при регулярном вложении в  $G = GL(n, \mathbb{Q})$ . А именно, мы предполагаем, что тор  $T = T(d)$  нормализует сетевое кольцо  $M(\sigma)$  [1]. Класс таких колец был описан в [2]. Там же, в работе [2], определено подкольцо  $R_0$  поля  $\mathbb{Q}$ , связанное с тором  $T = T(d)$ , и доказано следующее утверждение (в дальнейшем,  $d$  — целое рациональное число, равное  $\pm$  произведению различных простых чисел).

**Теорема 1.** ([2], теорема 2). *Следующие условия эквивалентны:*

- 1) *тор  $T = T(d)$  нормализует сетевое кольцо  $M(\sigma)$ ;*
- 2) *для сети  $\sigma = (\sigma_{ij})$  справедлива формула*

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} A_{i+1-j}, & j \leq i; \\ dA_{n+i+1-j}, & j > i, \end{cases}$$

где  $dA_n \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$ , причем для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $A_i$  — целый идеал кольца  $R$ , содержащего подкольцо  $R_0$ ,  $R_0 \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть  $\sigma$  — сеть, удовлетворяющая одному из условий теоремы 1. Тогда нормализатор  $N(\sigma) = N_G(E(\sigma))$  совпадает с произведением  $TG(\sigma^R)$ , где  $G(\sigma^R)$  — сетевая группа,  $\sigma^R$  — сеть, у которой выше главной диагонали стоят идеалы  $dR$ , а на главной диагонали и ниже — кольцо  $R$ .*

Доказательство теоремы 2 основано на следующей лемме.

**Лемма 1.** *Пусть  $t_{i1}(\alpha) \in N(\sigma)$ , тогда  $\alpha \in R$ ,  $2 \leq i \leq n$ .*

Работа В. А. Койбаева выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00469).

### Список литературы

1. Борович З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1978. Т. 75. С. 22–31.
2. Джусоева Н. А. Сетевые кольца, нормализуемые тором // Тр. ИММ УрО РАН. 2013 (в печати).

### Редукция локальных автоморфизмов и локальных дифференцирований алгебр нильтреугольных матриц

А.П.Елисова

Лесосибирский педагогический институт, Лесосибирск

*Локальный автоморфизм* алгебры  $R$  над ассоциативно коммутативным кольцом  $K$  с единицей (см. [1]) – это любой ее автоморфизм как  $K$ -модуля, действующий на каждый элемент  $\alpha \in R$  как некоторый автоморфизм алгебры  $R$ , зависящий, вообще говоря, от выбора  $\alpha$ . *Локальные дифференцирования* аналогично обобщают дифференцирования алгебры.

Через  $NT(n, K)$  обозначают алгебру нильтреугольных  $n \times n$  матриц над  $K$ , т. е. с нулями на главной диагонали и над ней. Локальные автоморфизмы (и локальные дифференцирования) алгебры  $R = NT(n, K)$  описаны в [2–4] для  $n = 3$  и – при ограничениях на  $K$  – для  $n = 4$ . Умножением на них и на автоморфизм ассоциированной алгебры Ли  $\Lambda(R)$ ,  $n \leq 4$ , произвольный локальный лиев автоморфизм, согласно [4], приводится к локальному лиеву автоморфизму специального явного вида. Аналогично при  $n \leq 4$  описаны локальные дифференцирования  $\Lambda(R)$ , [5].

Автор и В. М. Левчук установили редукционные теоремы для  $n \geq 4$ .

**Теорема 1.** *При  $n > 4$  всякий локальный автоморфизм алгебры Ли  $\Lambda(R)$  действует по модулю  $R^2$  как ее автоморфизм.*

Матричные единицы  $e_{ij}$ ,  $1 \leq j < i \leq n$ , порождают алгебру  $R$  как  $K$ -модуль. Согласно [5] при  $n \geq 4$  произвольное локальное дифференцирование алгебры  $R$ , с точностью до прибавления ее дифференцирования, является нулевым на элементах  $e_{ii-1}$ ,  $1 < i \leq n$ , а на

элементах  $e_{ii-2}$ ,  $2 < i \leq n$ , совпадает по модулю  $R^3$  при подходящем  $t \in K$  с отображением вида

$$\omega_t : \alpha \rightarrow ta_{31}e_{31} + ta_{42}e_{42} + \dots + ta_{nn-2}e_{nn-2} \quad (\alpha = \|a_{ij}\| \in R).$$

## Список литературы

1. Larson D. R., Sourour A. R. Local Derivations and local automorphisms of  $B(H)$  // Proc. Sympos. Pure Math. 1990. V. 51. P. 187–194.
2. Елисова А. П., Зотов И. Н., Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Локальные автоморфизмы и локальные дифференцирования нильпотентных матричных алгебр // Изв. ИГУ. 2011. Т. 4. № 1. С. 9–19.
3. Wang X. Local derivations of a matrix algebra over a commutative ring // J. Math. Research and Exposition. 2011. V. 31. № 5. P. 781–790.
4. Елисова А. П. Локальные автоморфизмы нильпотентных алгебр матриц малых порядков // Изв. вузов. Математика. 2013. № 2. С. 40–48.
5. Елисова А. П. Локальные дифференцирования и автоморфизмы нильпотентных алгебр матриц малых порядков // Вестн. Сиб ГАУ. 2012. № 4. С. 17–21.

## О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (88,27,6,9)

**К. С. Ефимов, А. А. Махнев**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

В [1] предложена программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 3. Там же задача редуцирована к случаю, когда окрестности вершин принадлежат конечному множеству исключительных графов.

В работе исследованы графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (88,27,6,9). Ранее, в [2], авторы нашли

возможные автоморфизмы гипотетического сильно регулярного графа с параметрами  $(88, 27, 6, 9)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  — связный вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами  $(88, 27, 6, 9)$ . Если  $u$  — вершина графа  $\Gamma$ ,  $k_i = |\Gamma_i(u)|$ , то  $d(\Gamma) = 3$  и выполняется одно из утверждений:

- (1)  $\mu = 22$ ,  $k_2 = 240$  и  $2 \leq k_3 \leq 21$ ;
- (2)  $\mu = 24$ ,  $k_2 = 220$  и  $2 \leq k_3 \leq 14$ ;
- (3)  $\mu = 30$ ,  $k_2 = 176$  и  $1 \leq k_3 \leq 8$ , причем в случае  $k_3 = 1$  антиподальное частное графа  $\Gamma$  — сильно регулярный граф с параметрами  $(133, 88, 57, 60)$ .

В частности, граф из заключения теоремы не является дистанционно регулярным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

### Список литературы

1. Махнев А. А. О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // ДАН. 2013. Т. 452. № 5. С. 475–478.
2. Ефимов К. С., Махнев А. А. Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами  $(88, 27, 6, 9)$  // ДАН. 2012. Т. 441. № 3. С. 247–250.

### О центральных типах $\Delta - PM$ теорий в обогащении автоморфизмом

А. Р. Ешкеев

Карагандинский государственный университет, Караганда

Данный тезис отражает информацию о некоторых свойствах  $\Delta - PM$  теорий [1] и их центров в обогащённой сигнатуре автоморфизмом и константой. При этом в классе таких теорий рассматривается

понятие  $\Delta - PM$  подобия и найдена связь этого понятия с синтаксическим подобием в смысле [2].

Пусть  $T$  – произвольная  $\Delta - PM$ -теория в языке сигнатуры  $\sigma$ . Пусть  $C$  – семантическая модель теории  $T$ .  $A \subseteq C$ . Пусть  $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$ , где  $\Gamma = \{g\} \cup \{c\}$ . Рассмотрим следующую теорию  $T_\Gamma^{gM}(A) = Th_{\Pi_{\alpha+2}^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g$ , где  $T_g$  – выражает тот факт, что для любой модели  $(M, g^M) \models T_g$  имеет место:

- 1)  $g^M$  – автоморфизм  $M$ ;
- 2)  $\{m \in M \mid g^M(m) = m\}$  есть универсум некоторой экзистенциально замкнутой подмодели  $M$  для любой модели  $M$  сигнатуры  $\sigma$ .

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра  $T^*$  теории  $T$  в новой сигнатуре  $\sigma_\Gamma$ , где  $\Gamma = \{c\}$ . В силу  $\Delta - PM$ -ности теории  $T^*$  существует её центр, и мы обозначим его как  $T^c$ . При ограничении  $T^c$  до сигнатуры  $\sigma$ , теория  $T^c$  становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории  $T$ . Пусть  $T$  – произвольная  $\Delta - PM$ -теория, тогда  $E^+(T) = \bigcup_{n, m < \omega} E_{n, m}^+(T)$ , где  $E_{n, m}^+(T)$  есть решетка позитивных экзистенциальных формул с  $n$  свободными переменными и с  $m$  переменными кванторов.

**Определение.** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  –  $\Delta - PM$ -теории. Мы будем говорить, что  $T_1$  и  $T_2$  являются  $\Delta - PM$ -синтаксически подобными, если существует биекция  $f : E^+(T_1) \rightarrow E^+(T_2)$  такая, что

- 1) ограничение  $f$  до  $E_{n, m}^+(T_1)$  есть изоморфизм решёток  $E_{n, m}^+(T_1)$  и  $E_{n, m}^+(T_2)$ ,  $n, m < \omega$ ;
- 2)  $f(\exists v_{n+1} \varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi)$ ,  $\varphi \in E_n^+(T)$ ,  $n < \omega$ ;
- 3)  $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$ .

Один из полученных результатов в рамках выше указанных определений выглядит следующим образом.

**Теорема 1.** Пусть  $T_1$  и  $T_2$  –  $\Sigma_{m+1}$ -полные, совершенные йонсоновские  $\Delta - PM$ -теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1)  $T_1^*$  и  $T_2^*$  являются  $\Delta - PM$ -синтаксически подобными;
- 2)  $T_1^c$  и  $T_2^c$  синтаксически подобны в смысле [2].

**Следствие 1.** Для любой  $\Sigma_{m+1}$ -полной, совершенной йонсоновской  $\Delta - PM$ -теории существует  $\Delta - PM$ -синтаксически подобная ей

## Список литературы

1. Ешкеев А. Р. Счетная категоричность  $\Delta$ -РМ-теорий // Вестн. КазНУ Сер. "Математика, механика, информатика". Спец. вып. 2008. № 3.
2. Mustafin T. G. On similarities of complete theories. // Logic Colloquium '90: Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, held in Helsinki. 1990. July 15–22.

## Координатное кольцо $n$ -мерной сферы и некоторые примеры дифференциально простых алгебр

В. Н. Желябин, А. А. Попов, И. П. Шестаков

Институт математики СО РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск

В работе с помощью координатного кольца  $n$ -мерной вещественной сферы строятся новые примеры дифференциально простых алгебр, которые не представляются в указанном в теореме Блока [1] виде.

Пусть  $R$  — поле действительных чисел. Рассмотрим алгебру полиномов  $R[x_0, \dots, x_n]$  от переменных  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Через  $\frac{\partial}{\partial x_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$  обозначим операторы дифференцирования алгебры  $R[x_0, x_1, \dots, x_n]$  по переменным  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Положим

$$D_1 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, D_n = x_n \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Пусть  $Sph(n)$  — фактор-алгебра алгебры  $R[x_0, \dots, x_n]$  по идеалу, порожденному многочленом  $x_0^2 + \dots + x_n^2 - 1$ , т. е.  $Sph(n)$  — координатное кольцо  $n$ -мерной вещественной сферы. Дифференцирования  $D_1, \dots, D_n$  индуцируют дифференцирования алгебры  $Sph(n)$ , которые мы также обозначим через  $D_1, \dots, D_n$ . отождествим образы  $x_0, x_1, \dots, x_n$  при гомоморфизме  $R[x_0, \dots, x_n] \mapsto Sph(n)$  с  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Подалгебра  $Sph(n)_0$  в  $Sph(n)$ , порожденная элементами  $1, x_1^2, \dots, x_n^2, x_i x_j, i, j = 0, \dots, n, i \neq j$  дифференциально проста относительно дифференцирований  $D_1, \dots, D_n$ . Пусть  $Sph(n)_1 =$

$Sph(n)_0x_0 + \dots + Sph(n)_0x_n$ . Тогда  $Sph(n) = Sph(n)_0 + Sph(n)_1 - Z_2$ -градуированная алгебра.

Пусть теперь  $A = A_0 \oplus A_1 - Z_2$ -градуированная алгебра над полем  $R$ . Подалгебру  $Sph(A) = Sph(n)_0 \otimes A_0 \oplus Sph(n)_1 \otimes A_1$  в тензорном произведении  $R$ -алгебр  $Sph(n) \otimes A$  назовем *Sph-оболочкой*.

**Теорема 1.** Пусть  $Sph(n)$  — координатное кольцо  $n$ -мерной вещественной сферы и  $A$  — центральная простая конечномерная ассоциативная, альтернативная, йорданова, лиева алгебра или алгебра Мальцева над  $R$ . Тогда  $A$  допускает  $Z_2$ -градуировку, и ее *Sph-оболочка*  $Sph(A)$  — дифференциально проста относительно множества дифференцирований  $\mathfrak{D} = \{D_1 \otimes id, \dots, D_n \otimes id\}$ . Алгебра  $Sph(A)$  — конечно порожденный проективный модуль над своим центроидом  $C(Sph(A))$ , который изоморфен  $Sph(n)_0$ . Если  $n \geq \dim A$ , то  $Sph(A)$  — несвободный  $C(Sph(A))$ -модуль.

Работа поддержана РФФИ (проект 11-01-00938-а).

## Список литературы

1. Block R. E. Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal// Ann. of Math. 1969. V. 90, № 3. P. 433–459.

## О неприводимых частично композиционных формациях нильпотентного дефекта 2

**П. А. Жизневский**

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

Все рассматриваемые группы конечны. Используются определения и обозначения, принятые в [1-3]. Напомним некоторые из них.

Пусть  $\Theta$  — некоторая полная модулярная решетка формаций. Тогда для любых двух  $\Theta$ -формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{M}$  таких, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$  через  $\mathfrak{F}/_{\Theta}\mathfrak{M}$  обозначают подрешетку решетки  $\Theta$  всех  $\Theta$ -формаций, заключенных между  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{F}$ . Для произвольных  $\Theta$ -формаций  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  длину решетки  $\mathfrak{F}/_{\Theta}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$  (конечную или бесконечную) называют  $\mathfrak{H}_{\Theta}$ -дефектом формации  $\mathfrak{F}$ . В частности, если  $\Theta = c_{\omega}$  — решетка всех  $\omega$ -композиционных формаций и  $\mathfrak{N}$  — формация всех nilпотентных групп, то длину решетки  $\mathfrak{F}/_{\omega}\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$  называют  $\mathfrak{N}_{\omega}$ -дефектом, или nilпотентным  $c_{\omega}$ -дефектом формации  $\mathfrak{F}$ .

Непустую формацию  $\mathfrak{F}$  называют неприводимой  $\omega$ -композиционной формацией, если  $\mathfrak{M} = \vee_{\omega}(\mathfrak{X}_i | i \in I) \subset \mathfrak{F}$ , где  $\{\mathfrak{X}_i | i \in I\}$  — набор всех собственных  $\omega$ -композиционных подформаций из  $\mathfrak{F}$ .

Формационно критическая группа  $G \in \mathfrak{F}$  называется  $\mathfrak{H}_{\omega}$ -базисной, если у формации  $c_{\omega}\text{form}G$  имеется лишь единственная максимальная  $\omega$ -композиционная подформация, которая содержится в  $\mathfrak{H}$ .

**Теорема 1.** *Тогда и только тогда неприводимая  $\omega$ -композиционная формация  $\mathfrak{F}$  имеет нильпотентный  $c_{\omega}$ -дефект 2, когда  $\mathfrak{F} = c_{\omega}\text{form}G$ , где  $G$  — такая монолитическая группа с цоклем  $P$ , что выполняется одно из следующих условий:*

1)  $\pi(\text{Com}(P)) \cap \omega = \emptyset$ ,  $P = G^{\mathfrak{M}}$ , группа  $G$  является  $\mathfrak{M}$ -базисной, где  $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}) \vee_{\omega} c_{\omega}\text{form}(G/P)$ , а формация  $c_{\omega}\text{form}(G/P)$  имеет нильпотентный  $c_{\omega}$ -дефект 1;

2)  $G = [P]H$ , где  $P$  — абелева  $p$ -группа,  $p \in \omega$ ,  $P \not\subseteq \Phi(G)$ , а  $H$  — группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:

2.1) монолитическая группа с нефраттиниевым цоклем  $Q = H^{\mathfrak{N}}$  таким, что  $\pi(\text{Com}(Q)) \cap \omega = \emptyset$  и  $H/Q \in \mathfrak{N}_p$ ;

2.2)  $H = [Q]N$  — монолитическая группа с нефраттиниевым цоклем  $Q$ , где  $Q = H^{\mathfrak{N}}$  — абелева  $q$ -группа,  $q \in \omega$ ,  $q \neq p$  и  $|N| = p$ ;

2.3) циклическая примарная группа порядка  $q^2$ , где  $q \neq p$ ;

2.4) неабелева группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q$ , где  $q \neq p$ .

Считается, что частный случай  $a = 2$  теоремы 1 был известен китайским математикам ещё 2000 лет назад.

## Список литературы

1. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно  $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 6, С. 783–797.
2. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Алгебра формаций. Минск: Бел. навука, 1997.
3. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

# Представление корневой подгруппы из $L_n(p^m)$ в виде пересечения двух силовских $p$ -подгрупп

В. И. Зенков

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Хорошо известно [1, предложение 2.17], что в группе  $G$  лиева типа над полем простой характеристики  $p$  для любой параболической подгруппы  $P$  из  $G$  подгруппа  $O_p(P)$  порождается корневыми подгруппами из  $G$  и представима в виде пересечения некоторых двух силовских подгрупп из  $G$ . В частности, это так, если подгруппа  $O_p(P)$  совпадает с корневой подгруппой группы  $G$ . Возникает вопрос: а если подгруппа  $O_p(P)$  не совпадает с корневой подгруппой, то будет ли в этом случае корневая подгруппа представимой в виде пересечения некоторых двух силовских подгрупп из  $G$ ? Для групп  $L_n(p^m)$  на этот вопрос отвечает следующая

**Теорема 1.** Пусть  $G = L_n(p^m)$ , где  $p$  — простое число. Тогда корневая подгруппа группы  $G$  представима в виде пересечения некоторых двух силовских  $p$ -подгрупп из  $G$ .

Естественно возникает вопрос о справедливости этой теоремы для других классов групп лиева типа. Однако уже в симплектических группах ситуация гораздо сложнее. Например, в группе  $G \simeq Sp_4(2)$  ( $\simeq S_6$ ) три типа корневых подгрупп в соответствии с подстановочными типами порождающих их инволюций. Корневая подгруппа первого типа (лежащая в  $G'$ ) не представима никаким пересечением двух силовских 2-подгрупп из  $G$ . Корневые подгруппы второго и третьего типа сопряжены в  $Aut(G)$  и представимы в таком виде.

Возникает также общий вопрос: для каких групп лиева типа существуют корневые подгруппы, представимые в виде пересечения некоторых двух силовских подгрупп?

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

## Список литературы

1. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

# Теорема Фаркаша для алгебр йордановой скобки

И. Б. Кайгородов

Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск

Под алгеброй Пуассона мы понимаем векторное пространство  $P$  с двумя операциями  $\cdot$  и  $\{, \}$ . В современной математике алгебры Пуассона имеют приложение не только в математической физике и геометрии. Так, с использованием свободных алгебр Пуассона и Пуассоновых скобок У. У. Умирбаевым и И. П. Шестаковым была решена известная проблема Нагаты о существовании диких автоморфизмов свободной ассоциативной алгебры с тремя порождающими. Чисто с алгебраической стороны, алгебры Пуассона изучались в работах Д. Фаркаша, Л. Макара-Лиманова, У. У. Умирбаева, И. П. Шестакова, С. П. Мищенко, В. М. Петроградского и др. В частности, Д. Фаркаш показал, что каждая полиномиальная алгебра Пуассона удовлетворяет некоторому тождеству специального вида.

Понятие алгебр йордановой скобки широко связано с йордановыми супералгебрами. Известно, что посредством процесса Кантора из каждой алгебры Пуассона мы можем построить йорданову супералгебру. Стоит отметить, что класс алгебр, из которых с помощью процесса Кантора строятся йордановы супералгебры, существенно шире, чем алгебры Пуассона. Под алгеброй йордановой скобки мы будем подразумевать данное расширение класса алгебр Пуассона. Как показали Д. Кинг и К. Маккриммон, каждая унитарная алгебра йордановых скобок удовлетворяет следующим тождествам

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), a \cdot b = b \cdot a,$$

$$\{a, b\} = -\{b, a\}, \{\{a, b\}, c\} + \{\{b, c\}, a\} + \{\{c, a\}, b\} = 0,$$

$$\{a \cdot b, c\} = \{a, c\} \cdot b + a \cdot \{b, c\} - D(c)ab, \text{ где } D(a) = \{a, 1\}.$$

В данном случае, если  $D = 0$ , мы имеем алгебру Пуассона.

В свое время исследованиями алгебр йордановой скобки занимались К. Мартинез, В. Кац, Н. Кантарини, Е. Зельманов, И. П. Шестаков и др.

Как оказалось, для полиномиальных алгебр йордановой скобки верен аналог теоремы Фаркаша, а именно

**Теорема 1.** *Каждая полиномиальная алгебра йордановой скобки над полем характеристики нуль удовлетворяет некоторому тождеству вида*

$$g = \sum_{i=0}^{[m/2]} \sum_{\sigma \in S_m} c_{\sigma,i} \Pi_{k=1}^i \langle x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)} \rangle \Pi_{k=2i+1}^m D(x_{\sigma(k)}),$$

где  $\langle x, y \rangle = \{x, y\} - (D(x)y - xD(y))$ ,  $c_{\sigma,i}$  — элемент основного поля.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект МК-330.2013.1).

## Число элементов на отрезках выходных последовательностей фильтрующих генераторов

**О. В. Камловский**

Москва

Пусть  $P = GF(q)$  — конечное поле из  $q$  элементов,  $u = (u(i))_{i=0}^{\infty}$  — линейная рекуррентная последовательность (ЛРП) порядка  $m$  над полем  $P$ , удовлетворяющая равенствам

$$u(i+m) = a_0 u(i) + a_1 u(i+1) + \dots + a_{m-1} u(i+m-1), \quad i \geq 0,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_{m-1}$  — фиксированные элементы поля  $P$ . Многочлен  $F(x) = x^m - a_{m-1}x^{m-1} - \dots - a_1x - a_0$  назовем характеристическим многочленом ЛРП  $u$ . Если при этом он имеет наименьшую степень среди всех характеристических многочленов ЛРП  $u$ , то его назовем минимальным многочленом ЛРП  $u$ . Известно, что каждая ЛРП  $u$  имеет единственный минимальный многочлен  $M_u(x)$  [1]. Всюду в дальнейшем будем считать, что  $M_u(x) = F(x)$  и  $F(0) \neq 0$ . Обозначим через  $T(F)$  — период многочлена  $F(x)$ , т. е. наименьшее из натуральных чисел  $t$ , таких, что  $F(x)$  делит многочлен  $x^t - e$ , где  $e$  — единица поля  $P$ .

Пусть  $f : P^k \rightarrow P$ ,  $v$  — выходная последовательность фильтрующего генератора, удовлетворяющая условиям

$$v(i) = f(u(i+t_1), u(i+t_2), \dots, u(i+t_k)), \quad i \geq 0,$$

где  $t_1, t_2, \dots, t_k$  — целые числа, такие, что  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq m-1$ .

Изучим частотные характеристики последовательности  $v$ . Для каждого элемента  $z \in P$  и натурального числа  $l$  обозначим через  $N_l(z, v)$  количество появлений элемента  $z \in P$  среди элементов  $v(0), v(1), \dots, v(l-1)$ . Всюду в дальнейшем будем накладывать следующее условие: для всех ненулевых векторов  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in P^k$  последовательность  $\omega$  с элементами

$$\omega(i) = a_1 u(i + t_1) + a_2 u(i + t_2) + \dots + a_k u(i + t_k), \quad i \geq 0$$

имеет минимальный многочлен равный  $F(x)$ . Если  $F(x)$  неприводим над полем  $P$ , то это условие всегда выполнено. Если  $F(x)$  приводим и  $m_0$  — наименьшая из степеней всех неприводимых делителей многочлена  $F(x)$ , то это условие заведомо выполнено при  $t_k \leq m_0 + t_1 - 1$ .

**Теорема 1.** *Для всех  $z \in P$  и  $l \in \mathbb{N}$ , таких, что  $l \leq T(F)$ , справедлива оценка*

$$\left| N_l(z, v) - |f^{-1}(z)| \frac{l}{q^k} \right| \leq (q-1) q^{\frac{k}{2}-1} C_l(F),$$

где  $f^{-1}(z) = \{(x_1, \dots, x_k) \in P^k : f(x_1, \dots, x_k) = z\}$ , а величина  $C_l(F)$  определена равенствами  $C_l(F) =$

$$= \begin{cases} \left( \frac{4}{\pi^2} \ln T(F) + \frac{9}{5} \right) q^{\frac{m}{2}}, & \text{если } l < T(F), \\ \left( 3(q^m l - l^2) \right)^{\frac{1}{3}}, & \text{если } l < T(F) \text{ и } F(x) \text{ неприводим над } P, \\ (q^m - T(F))^{\frac{1}{2}}, & \text{если } l = T(F). \end{cases}$$

Полученная оценка нетривиальна (правая часть неравенства меньше  $l$ ) при выполнении условий

$$l > (q-1) \left( \frac{4}{\pi^2} \ln T(F) + \frac{9}{5} \right) q^{\frac{m+k}{2}-1},$$

$$l \geq \sqrt{3} q^{\frac{m}{2} + \frac{3k}{4}},$$

$$l = T(F) \geq (q-1) q^{\frac{m+k}{2}-1},$$

соответственно.

Отметим, что ранее были известны лишь оценки рассматриваемых частот в случае  $q = 2$  и  $l = T(F)$  [2–4].

## Список литературы

1. Лидл Р. Нидеррайтер Г. Конечные поля. М.: Мир, 1988.
2. Мак-Вильямс Ф. Д., Слоэн Н. Д. А. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979. 744 с.
3. Dai Z.D., Feng X.N., Liu M.L., Wan Z.X. Some statistical properties of feedforward sequences (I) // Science in China (Series A). 1994. V. 37. № 1. P. 34–41.
4. Dai Z.D., Feng X.N., Liu M.L., Wan Z.X. Some statistical properties of feedforward sequences (II) // Science in China (Series A). 1994. V. 37. № 2. P. 129–136.

## О новых примерах наследственных локальных сверхрадикальных формаций

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Гомельский филиал Международного университета МИТСО, Гомель

В Коуровской тетради [1] под номером 14.99 сформулирована задача описания всех локальных сверхрадикальных формаций. В настоящее время она далека от своего полного решения. Рассмотрены лишь некоторые специальные случаи. В частности, в [2] описаны локальные сверхрадикальные формации, критические группы которых разрешимы.

В данной работе приводятся несколько примеров неразрешимых наследственных локальных сверхрадикальных формаций. Рассматриваются только конечные группы, используются определения, принятые в [3].

**Теорема 1.** Пусть  $G \cong PSL_2(7)$ . Если  $\pi = \{2, 3, 7\}$  и  $\mathfrak{F}$  – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых  $\pi$ -групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных  $G$ , то:

1)  $\mathfrak{F}$  является наследственной локальной сверхрадикальной формацией;

2) если  $H$  – минимальная не  $\mathfrak{F}$ -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а) группа  $H$  имеет простой порядок  $p$ , причем  $p \notin \pi$ ;

б)  $H$  – группа из списка:  $PSL_2(8)$ ,  $PSU_3(3)$ ;

в)  $H$  – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем  $N$ , причем  $N \in formG$  и  $H/N$  – группа простого порядка  $q \in \pi$ .

**Теорема 2.** Пусть  $G \cong Sz(8)$  и  $\pi = \pi(G)$ . Пусть  $\mathfrak{F}$  – формация, обладающая таким локальным экраном  $f$ , что  $f(q)$  – класс всех групп, являющихся расширением разрешимых групп с помощью конечных прямых произведений групп, изоморфных  $G$ , если  $q \in \pi$ , и  $f(q)$  – класс всех разрешимых групп, если  $q \notin \pi$ . Тогда:

1)  $\mathfrak{F}$  является наследственной локальной сверхрадикальной формацией;

2) если  $H$  – минимальная не  $\mathfrak{F}$ -группа с единичной подгруппой Фраттини, то справедливо одно из следующих утверждений:

а)  $H$  – группа из списка:  $PSL_2(2^p)$ ,  $p$  – простое число;  $PSL_2(3^p)$ ,  $p$  – нечетное простое число;  $PSL_2(p)$ ,  $p$  – простое число, большее 3, для которого  $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$ ;  $Sz(2^p)$ ,  $p$  нечетное простое число;  $PSL_3(3)$ ;  $Sz(2^9)$ ;

б)  $H$  – примитивная монолитическая группа с неабелевым цоколем  $N$ , причем  $N \in formG$  и  $H/N$  – группа простого порядка  $q \in \pi(G)$ ;

в)  $H$  – примитивная группа с абелевым цоколем  $N$ , причем  $H = [N]M$ ,  $(|N|, |M|) = 1$  и  $M/\Phi(M) \cong G$ .

## Список литературы

1. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2006.
2. Суменчук В. Н., Мокеева О. А. О проблеме классификации сверхрадикальных формаций // Изв. вузов. Математика. 2008. № 12. С. 70–75.
3. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

# **Пассивные множества алгебры дифференциальных рядов**

**О. В. Капцов**

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В последние десятилетия оформилось новое направление исследований - компьютерная алгебра [1]. Это направление тесно связано с коммутативной алгеброй и алгебраической геометрией. Однако разработанные методы и системы компьютерной алгебры могут применяться в других областях, например, для изучения дифференциальных уравнений.

Применение современного глобального геометрического языка [2] усложнило изложение классических результатов и отпугнуло исследователей с прикладным уклоном. Следует отметить, что все основные результаты данной теории носят локальный характер. Поэтому представляется естественным сначала аккуратно развить локальный подход, подобно тому как это делается в алгебраической геометрии и многомерном комплексном анализе.

В данном докладе вводится алгебра формальных  $\mathcal{F}$  дифференциальных рядов, включающая алгебру дифференциальных многочленов. В алгебре  $\mathcal{F}$  вместо инволюционных систем определяются пассивные множества. Эти множества определяются чисто алгебраически и не используют пространства струй, которые принято вводить в геометрических теориях. Главным результатом статьи является теорема о достаточных условиях пассивности конечного числа дифференциальных рядов. Доказанная теорема близка к классическому критерию Рикье [3] пассивности системы уравнений с частными производными. Однако приводимое доказательство является новым, и в нем требование о полной упорядоченности множества производных с помощью помет Рикье [3] заменено на более слабое условие.

## **Список литературы**

1. Дэвенпорт Дж., Сире И., Турнье Э. Компьютерная алгебра. М.: Мир, 1991.

2. Виноградов А., Красильщик И., Лычагин В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
3. Ritt J. F. Differential algebra. New York: AMS, 1950.

## Обращение перестановочного многочлена над примарным кольцом

**А. В. Карпов**

Томский государственный университет, Томск

Изучаются вопросы построения и обращения перестановочных многочленов над примарным кольцом  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , где  $p$  — простое и  $k > 1$ , введенных в [1] и активно исследуемых в последнее время в связи с их приложениями в криптографии и теории кодирования.

Рассматриваются многочлены с целыми коэффициентами от одной переменной. Каждый такой многочлен  $f(x)$  определяет функцию  $[f]_m : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ , где  $[f]_m : x \mapsto x \bmod m$ , и называется *перестановочным* по модулю  $m$ , если функция  $[f]_m$  является подстановкой. Перестановочные по модулю  $m$  многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  называются *взаимно обратными* по модулю  $m$ , если взаимно обратными являются подстановки  $[f]_m$  и  $[g]_m$ ; при этом многочлен  $g(x)$  называется обратным к многочлену  $f(x)$  по модулю  $m$ .

В докладе рассматриваются целочисленные многочлены, перестановочные по примарному модулю  $m = p^k$ , где  $p$  — простое и  $k > 1$ . Находятся необходимые и достаточные условия того, что два таких многочлена являются взаимно обратными. Их даёт

**Теорема 1.** *Многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  являются взаимно обратными по модулю  $p^k$ , если и только если выполняются следующие два условия:*

- (1)  $f'(x)g'(f(x)) \equiv 1 \pmod{p^{\lfloor k/2 \rfloor}}$  для любого целого  $x$ ;
- (2)  $g(x)$  обращает  $f(x)$  в  $p^{\lfloor k/2 \rfloor}$  различных по модулю  $p^{\lfloor k/2 \rfloor}$  точках.

Устанавливается рекуррентная формула

$$g_{k+1}(x) = 2g_k(x) - g_k(f(g_k(x)))$$

для нахождения обратного к многочлену  $f(x)$  по модулю  $p^{k+1}$  многочлена  $g_{k+1}$ . Этим задача обращения по модулю  $p^{k+1}$  сводится по индукции к задаче обращения по модулю  $p^2$ .

Предлагается метод построения взаимно обратных по модулю  $p^k$  пар многочленов на основе одной такой пары. Метод основывается на следующей теореме.

**Теорема 2.** Пусть многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  — взаимно обратные по модулю  $p^k$ , а многочлены  $f_0(x)$  и  $f'_0(x)$  индуцируют нулевые функции по модулям  $p^{\lceil k/2 \rceil}$  и  $p^{\lfloor k/2 \rfloor}$  соответственно. Тогда обратным к многочлену  $f(x) + f_0(x)$  по модулю  $p^k$  является многочлен  $g(x) - f_0(g_p(x))g'_p(x)$ .

### Список литературы

1. Carlitz L. Functions and polynomials (mod  $p^n$ ) // Acta Arithmetica. 1964. V. 9. P. 67–68.

## О представлении подкодов одного класса АГ-кодов в виде след-кода

**Ю. С. Касаткина**

Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград

**А. С. Касаткина**

Филиал РАНХиГС при Президенте РФ, Калининград

Данные, поступающие в систему связи от источника данных, могут подвергаться искажению. Это обусловлено возникновением в канале связи различного типа шумов. Таким образом, при импорте и экспорте информации по каналу связи с шумом возникает необходимость в обеспечении некоторого уровня помехоустойчивости передачи. Одним из основных способов обеспечения достоверности передачи информации по каналам связи является использование помехоустойчивых кодов, обнаруживающих и исправляющих ошибки. Конструкция некоторых классов кодов основана на кривых, обладающих достаточным числом рациональных точек. В работе исследуются абелевы кривые.

Согласно алгоритму построения абелевых кривых [1] возникает необходимость в представлении подкода наименьшего веса в виде

след-кода. Пусть  $C_L(D, aP_\infty)$  — рациональный код Гоппы над полем  $F_p$  с параметрами  $[n, k]$  и  $D_r$  —  $r$ -мерный подкод этого кода, такой, что  $|\chi(D_r)| = d_r(C)$ . Требуется представить подкод, обладающий наименьшим весом, в виде

$$Tr_{ConD}(U) = D_r,$$

где  $U$  —  $r$ -мерное  $F_p$ -векторное пространство.

Предположим, что код  $D_r$  порождается кодовыми словами  $c_1, \dots, c_r$ , где  $c_i = \varphi(f_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Элементы  $f_1, \dots, f_r \in L(aP_\infty)$  являются линейно независимыми над  $F_p$  и  $f_i(x) = \prod_{j=1}^a (x - \alpha_{ij})$ , где  $\alpha_{ij} \in F_p$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Каждому элементу  $f_i(x)$  поставим в соответствие элемент  $R_i \in F_{p^m}[x]$ , определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} R_i(x) = & \left( \sum_{s=0}^{m-1} (bx)^{p^s} \right)^{a-1} bx - \sum_{j=1}^a \alpha_{ij} \left( \sum_{s=0}^{m-1} (bx)^{p^s} \right)^{a-2} bx + \\ & \sum_{j \neq k}^a \alpha_{ij} \alpha_{ik} \left( \sum_{s=0}^{m-1} (bx)^{p^s} \right)^{a-3} bx + \dots + \\ & (-1)^{a-1} \sum_{j_1 < \dots < j_{a-1}}^a \alpha_{ij_1} \cdot \dots \cdot \alpha_{ij_{a-1}} bx + (-1)^a \alpha_i, \end{aligned}$$

где  $Tr(\alpha_i) = \prod_{j=1}^a \alpha_{ij}$ . Здесь  $Tr : F_{p^m} \rightarrow F_p$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m > 1$ .

Таким образом, существует элемент  $R \in F_{p^m}[x]$ , такой, что кодовое слово  $c \in D_r$  можно представить в виде  $Tr_{Con(D)}(R) = c$ . Элементы, соответствующие базису кода  $D_r$ , как и прежде, обозначаем  $R_1, \dots, R_r$ . Положив  $U = \langle R_1, \dots, R_r \rangle$ , получим  $Tr_{ConD}(U) = D_r$ .

## Список литературы

1. Касаткина Ю. С. Алгоритм построения элементарных абелевых кривых // Вестн. РГУ им. И. Канта. Вып. 10. Сер. "Физико-математические науки". 2006. С. 109–112.
2. Geer G., Vlugt M. Fibre Products of Artin–Schreier curves and Generalized Hamming weight of codes // Journal of Combinatorial Theory. 1995. V. 70. P. 337–348.

3. Stichtenoth H. Algebraic Function fields and Codes. Springer, 1993. 260 p.
4. Yang K., Kumar V., Stichtenoth H. On the weight hierarchy of Geometric Goppa Codes / IEEE Trans.Inform. 1994. V. 40, № 3. P. 913–920.

## **Оптимизация выбора параметров для факторизационного алгоритма Полларда**

**Климина А.С., Жданов О.Н.**

Сибирский государственный аэрокосмический университет  
им. академика М.Ф. Решетнева, Красноярск

В настоящее время для защиты информации от несанкционированного доступа все большее распространение получают алгоритмы шифрования с открытым ключом. Одним из важных примеров является алгоритм RSA. Необходимым этапом в работе является анализ стойкости алгоритма шифрования. Это обуславливает актуальность задачи факторизации (нахождения простых делителей числа  $N$ ). Для ее решения часто используется  $(p-1)$ -алгоритм Полларда [1].

Алгоритм Полларда состоит из следующих шагов:

Шаг 1. Выбираем число  $k$ .

Шаг 2. Выбираем произвольное  $a$ ,  $1 < a < N$ .

Шаг 3. Вычисляем  $d = \text{НОД}(a, N)$ . Если  $d > 1$ , мы получили нетривиальный делитель  $N$ . Если  $d = 1$ , переходим к шагу 4.

Шаг 4. Вычисляем  $D = (a^k - 1, N)$ , и если  $1 < D < N$ , то  $D$  является делителем  $N$ . Если  $D = 1$ , возвращаемся к шагу 1, а при  $D = N$  к шагу 2 и выбираем новое  $a$  [1].

Ранее в статье А. С. Климиной [2] были описаны следующие подходы к выбору числа  $k$ :

- 1)  $k$  - произведение нескольких случайных чисел;
- 2)  $k$  - факториал некоторого числа;
- 3) перебор различных степеней простых чисел;
- 4)  $k$  - наименьшее общее кратное нескольких чисел.

Авторами проанализированы результаты работы программы и первые два метода отклонены как требующие неприемлемо большого

количества времени. Был отклонен и последний метод, поскольку давал меньше удачных разложений, чем метод перебора степеней простых чисел. Увеличение числа  $k$  может происходить в двух направлениях:

- 1) увеличения количества простых множителей, входящих в  $k$ ;
- 2) увеличение степеней простых множителей, с которыми они входят в  $k$ .

Предлагается увеличивать количество простых множителей в каноническом разложении  $k$  в процессе работы программы, выбирая одинаковые степени простых.

Предложенный способ оптимизации алгоритма Полларда позволяет сократить количество вычислений в сравнении с существующими методами.

### **Список литературы**

1. Маховенко Е. Б. Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии. М.: Гелиос АРВ, 2006.
2. Климина А. С. Оптимизация выбора параметров для алгоритма Полларда: IV ОМНТК "Молодежь. Техника. Космос". СПб.: БГТУ, 2012. С. 285-286.

## **Категория вычислительных систем**

**С. П. Ковалёв**

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Новосибирск

Вычислительные алгоритмы обычно описываются в терминах абстрактных типов данных (числа, списки и т. д.), образующих бесконечные множества и не предполагающих распределенного доступа. Поэтому в ходе реализации алгоритмов в гетерогенной распределенной вычислительной среде необходимо выполнять их отображение на архитектуру среды [1] – редукцию на конечные массивы машинной памяти, подбор средств управления потоком вычислений, комплексирование вычислительных компонентов в распределенные системы, оценку и минимизацию сложности. В целях верификации и автоматизации процедур отображения их необходимо формализовать. Здесь основным понятием является формальная модель вы-

числений – конечная алгебра, состоящая из совокупности поддерживаемых чисел и вычислительных примитивов над ними. Действия по интеграции моделей вычислений в системы состоят в перекодировании значений чисел при обмене данными. Все модели вычислений и все действия по их интеграции образуют категорию, конструкции в которой позволяют анализировать сложность компьютерных реализаций алгоритмов – их представлений последовательностями термов (примитивов) и морфизмов (актов передачи данных).

Для формального синтеза моделей вычислений с учетом ресурсных ограничений предложен метод частичной интерпретации [2] теории первого порядка  $T$ . Он состоит в построении модели для совокупности всех формул, выводимых из  $T$ , вычисление которых не выходит за рамки конечного набора сигнатурных констант. В качестве  $T$  берутся арифметики на различных классах чисел, обогащенные числовыми константами. Их частичными интерпретациями выступают распространенные машинные реализации арифметики. Они обогащаются средствами управления потоком вычислений, в частности функциями  $\text{If}^a(x, y, z)$ , отвечающими условным операторам `if x = a then y else z`. Все функции  $\text{If}^a$ ,  $a \in |\mathfrak{A}|$ , входят в состав термальных операций конечной алгебры  $\mathfrak{A}$  тогда и только тогда, когда ее клон состоит из всех функций, сохраняющих все ее подалгебры; такие алгебры называются полупримальными (semi-primal) [3].

Переход от частичной интерпретации к полупримальной алгебре можно формально описать как функтор. Для этого вводится следующее обобщение гомоморфизмов алгебр:

**Определение 1.** Пусть  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  – конечные алгебры. Отображение  $\varphi : |\mathfrak{A}| \rightarrow |\mathfrak{B}|$  называется структурным, если биекция множеств  $\text{id } \varphi : |\mathfrak{A}|/\ker \varphi \leftrightarrow \varphi(|\mathfrak{A}|)$  индуцирует вложение клона  $\text{Clo } \mathfrak{A}/\varphi = (\text{Clo } \mathfrak{A} \cap \text{Pol } \{\ker \varphi\})/\ker \varphi$  в клон  $\text{Clo } \mathfrak{B} \upharpoonright_{\varphi} = (\text{Clo } \mathfrak{B} \cap \text{Pol } \{\varphi(|\mathfrak{A}|)\}) \upharpoonright_{\varphi(|\mathfrak{A}|)}$ .

Пусть  $\text{Str}$  – класс всех структурных отображений,  $\text{HAlg}$  – класс всех гомоморфизмов конечных алгебр,  $\text{MStr}$  – класс всех структурных инъекций,  $\text{FinAlg}$  – категория всех конечных алгебр и всех отображений их основных множеств.  $\text{FinAlg}$  эквивалентна категории  $\text{FinSet}$  всех конечных множеств и всех их отображений.

**Определение 2.** Категория  $\text{SCA} \subseteq \text{FinAlg}$  называется струк-

турной, если  $\text{HAlg} \cup \text{MStr} \subseteq \text{Mor } SCA \subseteq \text{Str}$ .

**Определение 3.** Подкатегорией вычислительных систем произвольной структурной категории алгебр  $SCA$  (обозначается  $\text{cs}(SCA)$ ) называется полная подкатегория в  $SCA$ , класс объектов которой состоит из всех полупримальных алгебр. Категория  $SCA$  называется нормальной, если  $\text{cs}(SCA)$  рефлексивна в  $SCA$ .  $SCA$  называется категорией синтеза моделей вычислений, если она обладает следующими свойствами.

- (i) Подкатегория вычислительных систем любой структурной категории содержится в  $SCA$ .
- (ii) Любая структурная категория, содержащая  $\text{cs}(SCA)$ , содержит  $SCA$ .

**Теорема 1.** Существует единственная категория синтеза моделей вычислений, причем она является нормальной.

## Список литературы

1. Воеводин В. В. Отображение проблем вычислительной математики на архитектуру вычислительных систем // Вычисл. методы и программирование. 2000. Т.1. С. 37–44.
2. Ковалёв С. П. Математические основания компьютерной арифметики // Мат. тр. 2005. Т. 8. № 1. С. 3–42.
3. Ковалёв С. П. Полупримальные модели компьютерных вычислений // Междунар. конф. "Алгебра и ее приложения": тез. докл. Красноярск: ИВМ СО РАН, 2007. С. 73,74.

## Стабильные элементы свободных нильпотентных групп ранга 2

**А. И. Ковыршина**

Восточно-Сибирская государственная академия образования, Иркутск

Вопрос о существовании стабильных элементов в свободных нильпотентных группах был поставлен А. Мясниковым в проекте MAGNUS [1]. В 1998 г. В. В. Блудов [2] привел примеры таких элементов

в свободных нильпотентных группах ранга 2. В 2001 г. А. Папистас [3] и Е. Форманек [4] доказали существование нетривиальных стабильных элементов в свободной нильпотентной группе при определенных условиях на ранг и степень.

Настоящая работа посвящена поиску стабильных элементов с неоднородным вхождением образующих в свободной нильпотентной группе  $F_{2,12}$ . Ранее был рассмотрен случай однородного вхождения образующих, т. е. когда каждый из образующих входит 6 раз в коммутаторы из представления элемента  $g$  [5].

Результатом работы является

**Теорема 1.** *Среди линейных комбинаций базисных коммутаторов с неоднородным вхождением образующих в свободной нильпотентной группе  $F_{2,12}$  нет нетривиальных стабильных элементов.*

Учитывая результат, полученный в работе [5], доказана

**Теорема 2.** *В свободной нильпотентной группе  $F_{2,12}$  существует всего 9 линейно независимых стабильных элементов.*

## Список литературы

1. Nilpotent groups [Электрон. ресурс] – Режим доступа: <http://www.sci.ccny.cuny.edu/shpil/gworld/problems>.
2. Блудов В. В. Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах // Третий Сиб. конгресс по приклад. и индустр. математике: тез. докл. Ч. 5. Новосибирск, 1998.
3. Papistas A. A note on fixed points of certain relatively free nilpotent groups // Commun. in algebra. 2001. V. 29. P. 4693–4699.
4. Formanek E. Fixed points and centers of automorphism groups of free nilpotent groups // Commun. in algebra. 2002. V. 30. P. 1033–1038.
5. Ковыршина А. И. Стабильные элементы в свободных нильпотентных группах ранга два // Изв. Иркут. гос ун-та. Сер. "Математика". 2010. Т. 3. № 4. С. 48–57.

# Распознаваемость по графу простых чисел группы $E_7(3)$

А. С. Кондратьев

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Пусть  $G$  — конечная группа. Обозначим через  $\omega(G)$  спектр группы  $G$ , т. е. множество всех порядков ее элементов. Множество  $\omega(G)$  определяет *граф простых чисел* (*граф Грюнберга — Кегеля*)  $\Gamma(G)$  группы  $G$ , в котором вершинами служат простые делители порядка группы  $G$  и две различные вершины  $p$  и  $q$  соединены ребром тогда и только тогда, когда  $pq \in \omega(G)$ .

В теории конечных групп сложилось и динамично развивается направление исследования распознаваемости конечных групп по спектру или графу простых чисел.

Конечная группа  $G$  называется *распознаваемой по спектру* (соответственно *графу простых чисел*), если она определяется своим спектром (соответственно графом простых чисел) с точностью до изоморфизма. Ясно, что из распознаваемости конечной группы по графу простых чисел следует ее распознаваемость по спектру.

В [1] автором была доказана распознаваемость группы  $E_7(3)$  по спектру.

В настоящей работе доказана

**Теорема 1.** *Группа  $E_7(3)$  распознаваема по графу простых чисел.*

Заметим, что граф  $\Gamma(E_7(3))$  имеет точно 14 вершин и 3 компоненты связности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00476), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН, СО РАН (проект 12-С-1-1018) и НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

## Список литературы

1. Кондратьев А. С. Об одном вопросе В. Д. Мазурова // Алгебра и геометрия: тез. междунар. конф., посвященной 80-летию со дня рождения А. И. Старостина. Екатеринбург: УМЦ-УПИ, 2011. С. 82,83.

**О конечных непростых 4-примарных группах  
с несвязным графом простых чисел**

**А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Доказана следующая

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — конечная неразрешимая 4-примарная группа с несвязным графом  $\Gamma(G)$ ,  $\overline{G} := G/F(G)$  — почти простая, но непростая 4-примарная группа из п. (7) заключения теоремы 1 из [1],  $F(G) \neq 1$ ,  $\pi_1(G) = \{2, 3, 7\}$ ,  $\pi_2(G) = \{p\} \subset \{13, 19, 73\}$  и выполнено одно из следующих утверждений:

(1)  $p = 13$ ,  $\overline{G} \cong L_2(27).3$ ,  $F(G) = O_3(G)$ , каждый 3-главный фактор группы  $G$  изоморфен 12 или 36-мерному неприводимому  $GF(3)\overline{G}$ -модулю;

(2)  $p = 13$ ,  $\overline{G} \cong {}^3D_4(2).3$ ,  $F(G) = O_2(G)$ , каждый 2-главный фактор группы  $G$  изоморфен 24-мерному неприводимому  $GF(2)\overline{G}$ -модулю;

(3)  $p = 19$ ,  $\overline{G} \cong U_3(8).2$ ,  $F(G) = O_2(G)$ , каждый 2-главный фактор группы  $G$  изоморфен одному из трех 18-мерных неприводимых  $GF(8)\overline{G}$ -модулей либо 54-мерному неприводимому  $GF(2)\overline{G}$ -модулю;

(4)  $p = 19$ ,  $\overline{G} \cong U_3(8).3_1$ ,  $F(G) = O_2(G)$ , каждый 2-главный фактор группы  $G$  изоморфен одному из четырех 27-мерных неприводимых  $GF(4)\overline{G}$ -модулей;

(5)  $p = 19$ ,  $\overline{G} \cong U_3(8).3_3$ ,  $F(G) = O_2(G)$  каждый 2-главный фактор группы  $G$  изоморфен одному из двух 27-мерных неприводимых либо  $GF(4)\overline{G}$ -модулей или одному из шести 27-мерных неприводимых либо  $GF(64)\overline{G}$ -модулей;

(6)  $p = 73$ ,  $\overline{G} \cong L_3(8).2$ , каждый 2-главный фактор группы  $G$  изоморфен неприводимому  $GF(8)\overline{G}$ -модулю размерности 6, 18 (два модуля), 48 (два модуля), 54, 144 (два модуля) или неприводимому  $GF(2)\overline{G}$ -модулю размерности 54, каждый  $r$ -главный фактор группы  $G$  изоморфен 72-мерному неприводимому  $GF(r^\alpha)\overline{G}$ -модулю, где  $r \in \{3, 7\}$  и  $\alpha = 2$  при  $r = 3$ ,  $\alpha = 1$  при  $r = 7$ ;

(7)  $p = 73$ ,  $\overline{G} \cong L_3(8).3$ , каждый 2-главный фактор группы  $G$  изоморфен неприводимому  $GF(2)\overline{G}$ -модулю размерности 9, 27,

72, 81, 216, каждый  $r$ -главный фактор группы  $G$  изоморфен 72-мерному неприводимому  $GF(r)\overline{G}$ -модулю, где  $r \in \{3, 7\}$ ;

(8)  $p = 73$ ,  $\overline{G} \cong L_3(8).6$ , каждый 2-главный фактор группы  $G$  изоморфен неприводимому  $GF(2)\overline{G}$ -модулю размерности 18, 54, 144, 162, 432, каждый  $r$ -главный фактор группы  $G$  изоморфен 72-мерному неприводимому  $GF(r^\alpha)\overline{G}$ -модулю, где  $r \in \{3, 7\}$  и  $\alpha = 2$  при  $r = 3$ ,  $\alpha = 1$  при  $r = 7$ ;

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00469), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003), программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009), совета по грантам Президента РФ (проект МК-3395.2012.1) и гранта ИММ УрО РАН для молодых ученых 2013 г.

## Список литературы

1. Кондратьев А. С., Храмцов И. В. О конечных четырехпримарных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17. № 4. С. 142–159.

## Теоремы Ли и Энгеля для лиевых пучков

**Н. А. Корешков**

Казанский государственный университет, Казань

Понятие лиевого пучка было введено в рассмотрение в работе [1]. Приведем соответствующее определение. Обозначим через  $K = K(L)$  множество всех билинейных кососимметрических отображений конечномерного векторного пространства  $L$  над полем  $P$ .

**Определение 1.** Лиевым пучком  $L(S)$  будем называть пару векторных пространств  $L, S, S \subset K(L)$ , что для любого отображения  $s \in S$  алгебра  $L(s)$  (т. е. векторное пространство  $L$  с заданным на нем умножением  $s$ ) является алгеброй Ли.

**Определение 2.** Представлением лиевого пучка  $L(S)$  в пространстве  $V$  называется билинейное отображение  $\rho : S \times L \rightarrow \text{End}_P(V)$ , если для любых  $s \in S$  и  $x, y \in L$  выполняется соотношение

$$\varrho_s(xsy) = \varrho_s(x)\varrho_s(y) - \varrho_s(y)\varrho_s(x),$$

где  $\varrho_s(a)$  - линейный оператор, являющийся образом пары  $(s, a) \in S \times L$ .

Здесь  $xsy$  - образ пары  $(x, y) \in L \times L$  при отображении  $s \in S$ .

Для любых двух подпространств  $M$  и  $N$  пространства  $L$  обозначим через  $MN$  подпространство  $\langle msn | \forall m \in M, \forall n \in N, \forall s \in S \rangle_P$ ,

Лиев пучок  $L = L(S)$  назовем разрешимым, если  $\exists k \in \mathbb{N}$ , что  $L^{(k)} = 0$ , где  $L^{(i+1)} = L^{(i)}L^{(i)}$ ,  $L^{(0)} = L$ ,  $i \geq 0$ . Соответственно, лиев пучок  $L = L(S)$  назовем нильпотентным, если  $\exists k \in \mathbb{N}$ , что  $L^k = 0$ , где  $L^{i+1} = L^iL$ ,  $L^1 = L$ ,  $i \geq 1$ .

Пусть  $\varrho : S \times L \rightarrow \text{End}_P(V)$  - представление лиевого пучка  $L = L(S)$  в пространстве  $V$ . Обозначим через  $L_\varrho(S, x)$  алгебру Ли линейных преобразований, порожденную операторами  $\varrho_s(x)$ , когда  $s$  пробегает все пространство  $S$ , а  $x$  - некоторый фиксированный элемент алгебры  $L(S)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\varrho : S \times L \rightarrow \text{End}_P(V)$  - представление конечномерного разрешимого лиевого пучка  $L = L(S)$  в конечномерном пространстве  $V$  над алгебраически замкнутым полем  $P$  характеристики 0. Если алгебра Ли  $L_\varrho(S, x)$  разрешима для любого  $x \in L$ , то в пространстве  $V$  существует базис, в котором все операторы  $\varrho_s(x)s \in S, x \in L$  одновременно приводятся к треугольному виду.

Заметим, что каждое из условий разрешимости, рассматриваемое отдельно, недостаточно для утверждения этой теоремы.

**Теорема 2.** Конечномерный лиев пучок  $L(S)$  над бесконечным полем  $P$  нильпотентен тогда и только тогда, когда нильпотентен каждый оператор  $ad_s x, s \in S, x \in L$ .

Здесь  $ad_s x$  - это оператор умножения, определенный элементом  $x$  и отображением  $s$ .

## Список литературы

1. Кантор И. Л., Персиц Д. Б. О замкнутых пучках линейных скобок Пуассона. IX Всесоюзная геометрическая конференция (Штиинца, Кишинев, 1998). С. 141.

# О стабильности группы автоморфизмов конечномерного векторного пространства над телом

А. А. Коробов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть  $D$  — тело положительной характеристики  $p$ . Будем говорить, что векторное пространство  $V$  над телом  $D$  обладает свойством  $\mathcal{P}$ , если из того, что два его унитарных автоморфизма порядка  $p$  порождают унитарную подгруппу следует либо нетривиальность центра, либо почти разрешимость этой группы.

Приведём некоторые примеры таких векторных пространств.

1. Свойством  $\mathcal{P}$  обладает конечномерное векторное пространство над любым коммутативным телом положительной характеристики  $[1, 49.1.1]$ .
2. Свойством  $\mathcal{P}$  обладает конечномерное векторное пространство над телом, являющимся локально конечномерным над своим центром  $[2]$ .
3. Свойством  $\mathcal{P}$  обладает конечномерное векторное пространство над телом характеристики 2  $[3]$ .
4. Свойством  $\mathcal{P}$  обладает  $n$ -мерное векторное пространство над телом характеристики  $p$ , если  $p > (n - 1)(n - [n/2])$   $[4]$ .
5. Свойством  $\mathcal{P}$  обладает четырёхмерное векторное пространство над любым телом положительной характеристики  $[2, 5]$ .
6. Свойством  $\mathcal{P}$  обладает пятимерное векторное пространство над телом характеристики 3.

Получены следующие результаты.

**Теорема 1.** Пусть конечномерное векторное пространство  $V$  обладает свойством  $\mathcal{P}$ . Тогда всякая унитарная группа автоморфизмов пространства  $V$  унитаризируема.

**Теорема 2.** Всякая бинарно конечная унитарная группа автоморфизмов конечномерного векторного пространства над произвольным телом является унитаризируемой.

## Список литературы

1. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1987.
2. Супруненко Д. А. Об унитарных группах матриц над телом // Докл. АН СССР. 1979. Т. 247. С. 289–291.
3. Derakhshan J., Wagner F. J. Skew linear unipotent groups // Bull. London Math. Soc. 2006. V. 38. P. 447–449.
4. Mochizuki H. Y. Unipotent matrix groups over division rings // Canad. Math. Bull. 1978. V. 21. P. 249–250.
5. Serezhkin V. N. Triangulability of unipotent linear groups of degree 4 over an arbitrary skewfield // Vestsi Akad. Navuk BSSR, Ser. Fiz.-Mat. Navuk. 1985. № 3. P. 12–18.

### О группах с маленьким централизатором почти регулярной инволюции

О. А. Коробов

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Централизаторы инволюций накладывают жёсткие ограничения на строение группы. В классе групп, рассмотренных В. П. Шунковым, группы с наименьшим централизатором почти регулярной инволюции ранее исследовал В. М. Бусаркин [1]. Обобщением его результата является следующая

**Теорема 1.** Пусть  $G$  — неабелева группа, содержащая инволюцию  $a$  и  $(\forall g \in G) |gp(a, a^g)| < \infty$ , и пусть  $|C_G(a)| = 2$ . Тогда  $G$  — нильпотентная метабелева группа;  $|G : G'| = 2$ ;  $(\forall g \in G') g = [g_1, g_2]$ , где  $g_1, g_2 \in G$ ;  $(\forall g \in G') g^a = g^{-1}$ ;  $G' = [a, G]$ ;  $G'$  — 2'-группа. Причём, если группа  $G$  бесконечна, то  $FC(G) = G'$ .

Б. Хартли и Т. Мейкснер [2] показали, что ступень нильпотентности некоторой подгруппы конечного индекса любой периодической группы с централизатором инволюции, порядок которого равен  $m$ , можно ограничить функцией от  $m$ . В 1982 г. В. В. Беляев и Н. Ф. Сесякин продолжили изучение строения периодической группы с почти регулярной инволюцией. Автором данной публикации получены теоремы, усиливающие эти результаты.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — группа, содержащая инволюцию  $a$  с  $|C_G(a)| = m$ ,  $(\forall g \in G) |gp(a, a^g)| < \infty$ . Тогда: 1)  $|[FC(G), FC(G)]| < \infty$ ; 2) существуют  $g(m)$  и подгруппа  $M$  в  $G$  степени nilпотентности не выше 2, такая, что  $|G : M| \leq g(m)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $G$  — бесконечная группа, содержащая инволюцию  $a$ ,  $(\forall g \in G) |gp(a, a^g)| < \infty$ . и пусть  $C_G(a)$  есть конечная разрешимая группа. Тогда группа  $G$  разрешима.

## Список литературы

1. Бусаркин В. М. Изолированные покрытия и расщепления групп: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Свердловск: Урал.ГУ, 1963.
2. Hartley B., Meihner Th. Periodic groups in which the centralizer of an involution has bounded order // J. Algebra. 1980. V. 64. № 1. P. 285–291.
3. Беляев В. В., Сесекин Н. Ф. Периодические группы с почти регулярным инволютивным автоморфизмом // Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1982. V. 17. № 1-4. P. 137-141.

## О произведениях $\tau$ -замкнутых классов групп

**М. А. Корпачева, Л. В. Грищенко**

Брянский государственный университет, Брянск

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения можно найти в [1,2]. Пусть  $\mathfrak{X}$  — некоторый непустой класс групп,  $\theta$  — отображение, ставящее в соответствие каждой группе  $G$  из  $\mathfrak{X}$  — некоторую систему  $\theta(G)$  ее подгрупп.  $\theta$  называется подгрупповым  $\mathfrak{X}$ -функтором (подгрупповым функтором на  $\mathfrak{X}$ ), если для любой группы  $G \in \mathfrak{X}$  и любого изоморфизма  $\varphi$  группы  $G$  выполняется равенство  $(\theta(G))^\varphi = \theta(G^\varphi)$ . Подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор называется подгрупповым функтором, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$  — класс всех конечных групп.

В монографии [2] рассмотрен класс  $\mathfrak{F}^\theta = (G \in \mathfrak{F} \mid \theta(G) \subseteq \mathfrak{F})$ , где  $\mathfrak{F}$  — класс групп,  $\theta$  — подгрупповой функтор.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}, \mathfrak{H}$  - классы групп. Если  $\tau$  - регулярный радикальный подгрупповой функтор, то  $\mathfrak{F}^\tau \mathfrak{H}^\tau \subseteq (\mathfrak{F}\mathfrak{H})^\tau$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\tau$  - регулярный транзитивный подгрупповой функтор и  $S_n \leq \tau$ . Если  $\mathfrak{F}$  - класс групп,  $\mathfrak{H}$  -  $\tau$ -замкнутый класс групп, причем  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^\tau \subseteq \mathfrak{F}^\tau \mathfrak{H}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $\tau$  - регулярный радикальный транзитивный подгрупповой функтор и  $S_n \leq \tau$ . Если  $\mathfrak{F}$  - класс групп,  $\mathfrak{H}$  -  $\tau$ -замкнутый класс групп, причем  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ , то  $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})^\tau = \mathfrak{F}^\tau \mathfrak{H}^\tau$ .

## Список литературы

1. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
2. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.

## О классах групп, индуцированных подгрупповыми функторами

М. А. Корпачева, М. В. Кирюшина

Брянский государственный университет, Брянск

Рассматриваются только конечные группы. Используемые определения и обозначения можно найти в [1,2]. Пусть  $\mathfrak{X}$  - некоторый непустой класс групп,  $\theta$  - отображение, ставящее в соответствие каждой группе  $G$  из  $\mathfrak{X}$  - некоторую систему  $\theta(G)$  ее подгрупп.  $\theta$  называется подгрупповым  $\mathfrak{X}$ -функтором (подгрупповым функтором на  $\mathfrak{X}$ ), если для любой группы  $G \in \mathfrak{X}$  и любого изоморфизма  $\varphi$  группы  $G$  выполняется равенство  $(\theta(G))^\varphi = \theta(G^\varphi)$ . Подгрупповой  $\mathfrak{X}$ -функтор называется подгрупповым функтором, если  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$  - класс всех конечных групп.

В монографии [2] рассмотрен класс  $\mathfrak{F}^\theta = (G \in \mathfrak{F} \mid \theta(G) \subseteq \mathfrak{F})$ , где  $\mathfrak{F}$  - класс групп,  $\theta$  - подгрупповой функтор.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  - класс групп. Если  $\tau$  - регулярный подгрупповой функтор, то  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}^\tau \subseteq (\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^\tau$ .

**Следствие 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  - формация, причем  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}$ . Если  $\tau$  - регулярный подгрупповой функтор, то  $\mathfrak{N}_p \mathfrak{F}^\tau = (\mathfrak{N}_p \mathfrak{F})^\tau$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  - класс групп,  $\tau$  - регулярный транзитивный подгрупповой функтор,  $\theta$  - регулярный подгрупповой функтор, причем  $\theta \leq \tau$ . Тогда  $\mathfrak{F}^{\tau \circ \theta} = (\mathfrak{F}^\tau)^\theta$ .

## Список литературы

1. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
2. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.

## О $\tau$ -замкнутых подформациях $\omega$ -веерных формаций

М. А. Корпачева, Ю. А. Левшенкова

Брянский государственный университет, Брянск

Рассматриваются только конечные группы. Пусть  $\omega$  - непустое подмножество множества всех простых чисел  $P$ ,  $f : \omega \cup \{\omega'\} \longrightarrow \{\text{формации групп}\}$  и  $\delta : P \longrightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга}\}$  —  $\omega F$ -функция и  $PFR$ -функция соответственно. Формация  $\omega F(f, \delta) = (G : G/O_\omega(G) \in f(\omega') \text{ и } G/G_{\delta(p)} \in f(p) \text{ для всех } p \in \omega \cap \pi(G))$  называется  $\omega$ -веерной формацией с  $\omega$ -спутником  $f$  и с направлением  $\delta$  [1].

Пусть  $\delta$  - некоторая  $PFR$ -функция. Подгрупповой функтор  $\tau$  назовем  $\omega\delta$ -радикальным, если для всякой  $\tau$ -подгруппы  $N$  любой группы  $G$  выполняются равенства  $O_\omega(G) \cap N = O_\omega(N)$ , и  $G_{\delta(p)} \cap N = N_{\delta(p)}$  для всех  $p \in P$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\delta$  - некоторая  $PFR$ -функция, причем  $\delta_0 \leq \delta$ ,  $\tau$  - регулярный  $\omega\delta$ -радикальный подгрупповой функтор. Если  $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ , то  $\mathfrak{F}^\tau = \omega F(h, \delta)$ , где  $h(\omega') = (f(\omega'))^\tau$ ,  $h(p) = (f(p))^\tau$  для всех  $p \in \omega$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\delta$  - некоторая  $PFR$ -функция,  $\tau$  - регулярный  $\delta$ -радикальный подгрупповой функтор, причем  $\delta_0 \leq \delta$ . Если  $\mathfrak{F} = \omega F(f, \delta)$ , то формация  $\mathfrak{F}^\tau$  является подформацией  $\omega$ -веерной формации  $\mathfrak{H} = \omega F(h, \delta)$ , где  $h(\omega') = \mathfrak{F}$ ,  $h(p) = \mathfrak{N}_p(f(p))^\tau$  для всех  $p \in \omega$ .

## Список литературы

1. Ведерников В. А., Сорокина М. М.  $\omega$ -веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. 2002. Т. 71. № 1. С. 43–60.
2. Каморников С. Ф., Селькин М. В. Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Беларуская навука, 2003.
3. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.

## Новые константы в суперинтуиционистской логике L3

А. К. Кощеева

Удмуртский государственный университет, Ижевск

Московский городской психолого-педагогический университет, Москва

Пусть  $Fm$  — множество формул стандартного пропозиционального языка. Добавим к языку набор логических констант  $\bar{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ . Пусть  $Fm(\bar{\varphi})$  — множество формул расширенного языка; формулы из  $Fm$  назовем *чистыми*.

*Явным соотношением для константы  $\varphi_i$*  назовем формулу вида  $\varphi_i \leftrightarrow B$ , где подформула  $B$  не содержит  $\varphi_i$  (но может содержать константы, отличные от  $\varphi_i$ ).

$\bar{\varphi}$ -Логикой называется множество  $\mathcal{L}$  формул расширенного языка, включающее  $Int$  и замкнутое относительно правил *modus ponens* и подстановки.

$\bar{\varphi}$ -Логика  $\mathcal{L}$  называется *консервативным расширением* с.и.л.  $L$ , если  $L \subseteq \mathcal{L}$  и для всякой чистой формулы  $A$  из  $A \in L$  следует  $A \in \mathcal{L}$ .

Проблема новых одноместных связок в с.и. логиках была поставлена П. С. Новиковым и впервые сформулирована в статье Я. С. Сметанича [1].

Подход П. С. Новикова адаптирован к языку с дополнительными константами в работе А. Д. Яшина [3]:  $\bar{\varphi}$ -логика  $\mathcal{L}$  *определяет новые независимые логические константы в  $L$* , если  $\mathcal{L}$  консервативна над  $L$  и для любого явного соотношения  $\varphi_i \leftrightarrow B$   $\bar{\varphi}$ -логика  $\mathcal{L} + \varphi_i \leftrightarrow B$  является неконсервативной над  $L$ .

$\overline{\varphi}$ -Логика  $\mathcal{L}$  называется *полным по П.С. Новикову расширением* с.и.логики  $L$ , если  $\mathcal{L}$  консервативна над  $L$  и для любой формулы  $A \in Fm(\overline{\varphi}) \setminus \mathcal{L}$   $\overline{\varphi}$ -логика  $\mathcal{L} + A$  неконсервативна над  $L$  (т. е.  $\mathcal{L}$  не допускает присоединения новых формул).

Под *проблемой П.С. Новикова для  $L$*  понимается описание класса всех полных по Новикову консервативных расширений логики  $L$ . В данной работе проблема Новикова рассматривается применительно к с. и. логике  $L3$ , которая согласно [2] характеризуется классом  $\mathbf{D} = \{D_n \mid n \in \omega\}$ , где  $D_n$  — конечная корневая шкала высоты 3 с наибольшим элементом и  $n$  точками в среднем слое — *даймонд*.

В работе дана классификация семейства полных по Новикову расширений  $L3$  в языке с двумя константами; установлено, что на каждом  $\overline{\varphi}$ -даймонде, у которого все точки "среднего слоя" имеют разные цвета, константы  $\varphi_1, \varphi_2$  можно задать 16 разными способами; показано, что каждое из полных расширений является алгоритмически разрешимым; установлена алгоритмическая разрешимость массовой проблемы: является ли  $\overline{\varphi}$ -логика  $L3 + A(\overline{\varphi})$  консервативной над  $L3$ ?

## Список литературы

1. Сметанич Я. С. О полноте исчисления высказываний с дополнительной операцией от одной переменной // Тр. Моск. мат. об-ва. 1960. Т. 9. С. 357–371.
2. Максимова Л. Л. Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. 1972. Т. 11. № 5. С. 558–570.
3. Yashin A. D. New intuitionistic logical constants: undecidability of the conservativeness problem // In: Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1258. P. 460–471.

## Некоторые подгруппы автоморфизмов полуполевых плоскостей

О. В. Кравцова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Хорошо известна гипотеза [1]: *полная группа автоморфизмов всякой конечной полуполевой недезарговой плоскости разрешима*. К

настоящему моменту эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей. В силу теоремы Фейта–Томпсона о разрешимости любой группы нечетного порядка для подтверждения гипотезы достаточно рассматривать только полуполевыми плоскостями, допускающие автоморфизмы порядка 2. В соответствии с классическим результатом [1] инволюции в группе автоморфизмов всякой проективной плоскости являются либо перспективностями, либо бэровскими коллинеациями.

В 1990-х гг. опубликован ряд работ ([2] и другие), посвященных построению и исследованию полуполевых плоскостей ранга 2, допускающих бэровскую инволюцию. Построения использовали векторное пространство размерности 4 и специальное семейство линейных преобразований – регулярное множество, представленное  $2 \times 2$ -матрицами над полем порядка  $p^n$ . В этом случае функции, задающие регулярное множество плоскости, есть многочлены степени  $\leq p^{n-1}$ .

Автор рассматривает полуполевою плоскость, допускающую бэровскую инволюцию, с использованием линейных пространств произвольной четной размерности над полем простого порядка, следствием чего является переход к линейным функциям. Доказаны следующие результаты.

**Теорема 1.** *Полуполева плоскость  $\pi$  нечетного порядка  $p^{2n}$  ( $p$  – простое), допускающая бэровскую инволюцию  $\tau$  в трансляционном дополнении, может быть задана  $4n$ -мерным векторным пространством над  $\mathbb{Z}_p$  так, что*

$$\tau = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E \end{pmatrix},$$

где  $E$  – единичная  $n \times n$ -матрица. Регулярное множество плоскости  $\pi$  образовано матрицами вида

$$\theta(V, U) = \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix},$$

где  $\{U\} = K$ ,  $\{V\} = Q$  – множества из  $p^n$  матриц в  $GL_n(p) \cup \{0\}$ , содержащие 0,  $E$  и замкнутые по сложению.  $K$  является регулярным множеством бэровской подплоскости  $\pi_0$ , фиксируемой инво-

люцией  $\tau$ .  $m$  и  $f$  – линейные отображения из  $K$  и  $Q$  соответственно в  $GL_n(p) \cup \{0\}$ , причем  $m(E) = E$ ,  $f(E) \neq E$ .

**Теорема 2.** Полуполева плоскость  $\pi$  четного порядка  $2^{2n}$ , допускающая бэровскую инволюцию  $\tau$  в трансляционном дополнении, может быть задана  $4n$ -мерным векторным пространством над  $\mathbb{Z}_2$  так, что

$$\tau = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & E \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

где  $E$  – единичная  $n \times n$ -матрица. Регулярное множество плоскости  $\pi$  образовано матрицами вида

$$\theta(V, U) = \begin{pmatrix} U + V + m(V) + w(V) & f(V) + m(U) \\ V & U + w(V) \end{pmatrix},$$

где  $\{U\} = \{V\} = K$  – регулярное множество бэровской подплоскости  $\pi_0$ , фиксируемой инволюцией  $\tau$ ;  $m$ ,  $w$ ,  $f$  – линейные преобразования пространства  $n \times n$ -матриц над  $\mathbb{Z}_2$ , причем  $m(E) = 0$  и для всех  $V \in K$

$$w(V) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ 0 \quad \dots \quad 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве иллюстрации полученных теоретических результатов построены на основе компьютерных расчетов примеры полуполевого плоскостей четного и нечетного порядка, допускающих бэровскую инволюцию в трансляционном дополнении.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00968).

## Список литературы

1. Hughes D. R.6 Piper F. C. Projective planes. Springer–Verlag New–York Inc. 1973. 324 p.
2. Huang H., Johnson N. L. 8 semifield planes of order  $8^2$  // Discrete Math. 1990. V. 80, № 1. P. 69–79.

# **О действии группы Джевонса на множестве бинарных последовательностей и булевых функций**

**А. М. Кукарцев**

Сибирский государственный аэрокосмический университет, Красноярск

Бинарные последовательности (упорядоченные множества нулей и единиц, далее БП) и булевы функции (далее БФ) являются объектом исследования многих разделов математики и теоретической информатики, таких как дискретная математика, теория БФ, теория информации и пр. Для этих объектов применяются различные методы анализа, включая и групповые. Одной из групп, которая применяется для анализа БП и БФ, является группа Джевонса [1, с. 129]. Она используется для задач классификации БФ (см. например, Гарвадский каталог [1, с. 119]), задач перечисления (например, перечисления По́йа [1, с. 120]), а также применяется для построения алгоритмов обработки информации. Анализ действий группы Джевонса на БП и БФ представляется весьма сложным. Сложность обусловлена, во-первых, экспоненциальным ростом количества обрабатываемых объектов, так, например, при построении вложения группы Джевонса, действующей на аргументах БФ, в группу Джевонса, действующую на самих БФ. Такой рост создаёт трудности при проверке и отбраковке гипотез. Во-вторых, неоднозначностью и сложностью самих вычислительных методов. Проверка вручную простых (порядок группы не превосходит 4) примеров занимает много времени и, как правило, сопровождается ошибками. Одним из путей решения указанных проблем является автоматизированная обработка вычисления действий группы Джевонса на БП и БФ с помощью ПЭВМ. Целью настоящей работы является создание автоматизированного вычислительного инструментария для анализа действия группы Джевонса на БП и БФ. Вычислительное средство реализует следующие алгоритмы обработки БП, БФ и подстановок: алгоритмы ввода-вывода, алгоритмы основных групповых операций, алгоритмы перечислений и рандомизации, алгоритмы действий группы Джевонса на множестве бинарных последовательностей и БФ (включая алгоритмы непосредственного действия, алгоритмы коммутации, алгоритмы построения изоморфных образов элементов групп и пр.), алгоритмы расчётов групп инерций и по-

строения классов БФ (относительно подгрупп группы Джевонса). Вычислительное средство представляет собой систему примитивных функций, объединённых в библиотеку под общим названием domain object processor (dop). Библиотека dop снабжена полной документацией, тестами и контрольными примерами. Библиотека написана на C/C++ стандарта C99. В ней учтены методы оптимизации исполнимого кода по времени.

## Список литературы

1. Логачёв О.А., Сальников А.А., Яценко В.В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии. М.: МЦНМО, 2004. 470 с.

## Циклически упорядоченные группы и о-минимальность

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы

Мы продолжаем исследование понятия *слабой циклической минимальности*, первоначально исследованного в совместной работе с Д. Макферсоном [1]. Отношение *циклического* порядка описывается тернарным отношением  $K$ , удовлетворяющим следующим свойствам:

- (co1)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow K(y, z, x));$
- (co2)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x);$
- (co3)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow \forall t [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)]);$
- (co4)  $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \vee K(y, x, z)).$

Множество  $A$  циклически упорядоченной структуры  $M$  называется *выпуклым*, если для любых  $a, b \in A$  имеет место следующее: для каждого  $c \in M$  с условием  $K(a, c, b)$  мы имеем  $c \in A$  или для каждого  $c \in M$  с условием  $K(b, c, a)$  мы имеем  $c \in A$ . Циклически упорядоченная структура  $M = \langle M, K, \dots \rangle$  называется *циклически минимальной* (*слабо циклически минимальной*), если любое определимое (с параметрами) подмножество структуры  $M$  является объединением конечного числа интервалов и точек (выпуклых множеств). Любая слабо о-минимальная структура является слабо циклически минимальной, обратное неверно в общем случае. Некоторые интересные примеры слабо циклически минимальных структур, не являющихся слабо о-минимальными, изучались в [1–3].

В [4] были изучены циклически минимальные группы и доказано, что они являются абелевыми и делимыми. Здесь мы обсуждаем некоторые свойства слабо циклически минимальных групп.

### Список литературы

1. Kulpeshov B. Sh., Macpherson H. D., Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. 2005. V. 51. P. 377–399.
2. Kulpeshov B. Sh. On  $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structures // Mathematical Logic Quarterly. 2006. V. 52. P. 555–574.
3. Kulpeshov B. Sh. Definable functions in the  $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structures // Siberian Mathematical Journal. 2009. V. 50. P. 282–301.
4. Macpherson H. D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // Annals of Pure and Applied Logic. 1996. V. 79. P. 165–209.

### О «модальных» вариантах результатов

А. В. Кузнецова 50-летней давности

С. И. Кучерявый

Обнинский институт атомной энергетики, Обнинск

А. В. Чагров

Тверской государственный университет, Тверь

В 1963 г. в журнале "Алгебра и логика" (т. 2, вып. 4) вышла статья А. В. Кузнецова, где рассматривались исчисления, в формулах которых используются только связки  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\supset$ ,  $\neg$ , аксиомы — произвольные формулы, а правила вывода — только правило подстановки и *modus ponens*. Не самый сильный, но наиболее впечатляющий (для авторов) результат А. В. Кузнецова: для всякой конечно-аксиоматизируемой суперинтуиционистской логики  $L$  не существует алгоритма, который по произвольной конечной (!) совокупности формул давал бы ответ на вопрос, будет ли эта совокупность аксиоматизацией логики  $L$ . Конечность здесь существенна в силу ещё одной теоремы А. В. Кузнецова (аналога теоремы Райса–Успенского), никогда им не публиковавшейся.

Некоторое время назад нам стали известны вопросы Е. Е. Золина об аналогах результатов А. В. Кузнецова для случая добавления в язык логик связки  $\Box$ . (Их можно было бы отнести к фольклорным, но нам не известны публикации по этому поводу.) Уточним один из этих вопросов.

Одной из возможных аксиоматизаций минимальной (по включению) нормальной модальной логики  $K$  является следующее исчисление **K**:

- аксиомы: 1)  $p \supset (q \supset p)$ , 2)  $(p \supset (q \supset r)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset r))$ , 3)  $(p \& q) \supset p$ , 4)  $(p \& q) \supset q$ , 5)  $p \supset (q \supset (p \& q))$ , 6)  $p \supset (p \vee q)$ , 7)  $p \supset (p \vee q)$ , 8)  $(p \supset r) \supset ((q \supset r) \supset ((p \vee q) \supset r))$ , 9)  $(p \supset q) \supset ((p \supset \neg q) \supset \neg p)$ , 10)  $\neg \neg p \supset p$ , 11)  $\Box(p \supset q) \supset (\Box p \supset \Box q)$ ;
- правила вывода: подстановка, *modus ponens* (если есть формулы  $\varphi$  и  $\varphi \supset \psi$ , то есть и формула  $\psi$ ), правило Гёделя (если есть формула  $\varphi$ , то есть и формула  $\Box\varphi$ ).

Рассматриваем исчисления, которые задаются аналогично исчислению **K**, но произвольным конечным множеством аксиом вместо приведённого выше списка аксиом 1)–11). Вопрос (проблема аксиоматизации  $K$ ): можно ли алгоритмически выяснить, является ли данное исчисление аксиоматизацией логики  $K$ ? Если здесь логику  $K$  заменить на противоречивую логику (т. е. множество всех "модальных" формул), то получим проблему противоречивости "модальных" исчислений.

**Теорема 1.** *Проблема аксиоматизации логики  $K$  алгоритмически неразрешима.*

**Теорема 2.** *Проблема противоречивости модальных исчислений алгоритмически неразрешима.*

Общая схема доказательств обеих теорем одна и та же, но детализация этой схемы проводится *ad hoc*.

# Об одном классе подрешеток решетки подпространств конечномерного векторного пространства над конечным полем

**С. В. Ларин**

Красноярский государственный педагогический университет

им. В. П. Астафьева, Красноярск

Поле классов вычетов по простому модулю  $p$  будем обозначать  $Z_p$ ,  $n$ -мерное векторное пространство над полем  $F$  —  $V_n(F)$ , а решетку его подпространств —  $L(V_n, F)$ .

**Теорема 1.** *При  $n \geq 3$  решетка  $L(V_n, Z_2)$  изоморфна некоторой подрешетке решетки  $L(V_n, F)$  тогда и только тогда, когда характеристика поля  $F$  равна 2.*

Считая формально  $B = \{e_1, \dots, e_n\}$  единым базисом пространств  $V_n(Z_2)$  и  $V_n(F)$ , можно рассматривать решетку  $L(V_n, Z_2)$  как подмножество элементов решетки  $L(V_n, F)$ . Векторы  $a = \varepsilon_1\alpha_1e_1 + \varepsilon_2\alpha_2e_2 + \dots + \varepsilon_n\alpha_ne_n$  и  $b = \varepsilon'_1\beta_1e_1 + \varepsilon'_2\beta_2e_2 + \dots + \varepsilon'_n\beta_ne_n$ , где  $\varepsilon_i, \varepsilon'_i \in \{0, 1\}$ ,  $\alpha_i, \beta_i \in F^*$ , назовем эквивалентными, если  $\varepsilon_i = \varepsilon'_i$  для любого  $i = 1, \dots, n$ . Два подпространства эквивалентны, если они имеют эквивалентные базисы. Класс элементов, эквивалентных  $x \in V_n(F)$ , будем обозначать  $\bar{x}$ . Интервал  $[a, b]$  высоты 2 в подрешетке  $L$  назовем *широким* в  $L$ , если существует не менее трех элементов  $x \in L$ , таких, что  $a < x < b$ . Подрешетку  $L$  решетки  $L(V_n, F)$  будем называть *сильно вложенной*, если ее высота равна  $n$  и для всякого широкого интервала  $[a, b]$  высоты 2 подрешетки  $L$  и всякого  $x \in L(V_n, F)$ , если  $a < x < b$ , то  $x \in L$ . К описанию сильно вложенных подрешеток приводит задача описания решеток линейных обыкновенных дифференциальных операторов. Сильно вложенную подрешетку  $L$  решетки  $L(V_n, F)$  назовем *оптимально вложенной*, если для любой изоморфной ей подрешетки  $M$  при любом натуральном  $k \leq n$  количество подпространств вида  $\langle e_{i_1}, \dots, e_{i_k} \rangle$ ,  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ , принадлежащих  $L_0 = L \cap L(V_n, Z_2)$ , не меньше, чем принадлежащих  $M_0 = M \cap L(V_n, Z_2)$ . Описание сильно вложенных подрешеток сводится к описанию оптимально вложенных подрешеток и опирается на следующие теоремы.

**Теорема 2.** Если  $n \leq 4$ ,  $L$  — оптимально вложенная подрешетка высоты  $n$  решетки  $L(V_n, F)$  и  $L_0 = L \cap L(V_n, Z_2)$ , то  $L = \bigcup_{x \in L_0} \bar{x}$ .

**Теорема 3.** Пусть  $L$  — оптимально вложенная подрешетка решетки  $L(V_n, F)$ ,  $K = \bigcup_{\bar{x} \in L} \bar{x}$ . Тогда  $L_0 = K \cap L(V_n, Z_2)$  является оптимально вложенной подрешеткой решетки  $L(V_n, Z_2)$  и всякий элемент  $z \in L$  либо принадлежит подрешетке  $L_1$ , порожденной множеством  $K$  в решетке  $L(V_n, F)$ , либо представим в виде  $z = x + y_1 + \dots + y_m$ , где  $x \in L_1$ ,  $y_i = \langle a_i \rangle \notin L$  для  $i = 1, \dots, m$ .

## Список литературы

1. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

## Автоморфизмы нильподалгебр алгебр Шевалле малых лиевых рангов

**А. В. Литаврин**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Как и в [1,2], в алгебре Шевалле над полем (или кольцом)  $K$ , ассоциированной с системой корней  $\Phi$ , выберем подалгебру  $N\Phi(K)$  с базисом  $\{e_r, r \in \Phi^+\}$ . Мы исследуем автоморфизмы алгебр  $N\Phi(K)$  малых рангов  $\Phi$ , являющихся, как правило, исключительными.

В типичном случае  $\Phi$  типа  $B_2$  базу составляют  $e_a, e_b, e_{a+b}$  и  $e_{2a+b}$ . Наряду с внутренними автоморфизмами [1,2], для алгебры  $NB_2(K)$  выделяют при любом  $c \in K$  центральные автоморфизмы

$$\begin{aligned} \eta_c : e_a &\rightarrow e_a + ce_{2a+b}, & e_r &\rightarrow e_r \ (r = b, a+b, 2a+b), \\ \eta'_c : e_b &\rightarrow e_b + ce_{2a+b}, & e_r &\rightarrow e_r \ (r = a, a+b, 2a+b). \end{aligned}$$

При  $2K = K$  алгебру  $NB_2(K)$  порождают элементы  $e_a, e_b$ . Пусть  $2K = 0$ . Тогда минимальное порождающее множество составляют  $e_a, e_b, e_{2a+b}$ . Показано, что любой матрице  $A \in GL(2, K)$  однозначно соответствует автоморфизм алгебры  $NB_2(K)$ , переводящий столбец  $(e_a, e_b)^T$  в  $A(e_a, e_b)^T$  и тождественный на  $Ke_{2a+b}$ ; его обозначаем через  $\tilde{A}$ . Для элементов  $t, c \in K$  с обратимым элементом  $t$  используем также автоморфизмы вида

$$\eta_{t,c} : e_{2a+b} \rightarrow te_{2a+b} + ce_{a+b}, \quad e_r \rightarrow e_r \ (r = a, b, a+b).$$

**Теорема 1.** Пусть  $K$  - ассоциативно коммутативное кольцо с единицей. Если  $2K = 0$ , то группу автоморфизмов алгебры  $NB_2(K)$  порождают  $\widetilde{GL}(2, K)$ , центральные вида  $\eta_{t,c}, \eta_c, \eta'_c$  и внутренние автоморфизмы.

Исследования поддержаны РФФИ (проект 12-01-00968).

## Список литературы

1. Carter R. Simple groups of Lie type. New York: Wiley and Sons, 1972.
2. Левчук В. М., Автоморфизмы унипотентных подгрупп лиева типа // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 2. С. 141–161 ; № 3. С. 315–338.

## Аксиоматизация линейной логики Знания и Времени $LT K_r$

**А. Н. Лукьянчук, В. В. Римацкий**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Представлена конечная система аксиом для линейной логики Знания и Времени  $LT K_r$  с рефлексивным и интранзитивным отношением Времени.

**Аксиома  $AS_{LT K_r}$ :**

Аксиомы **CPC** (классического пропозиционального исчисления);

$$L_{\Box_T}: \Box_T(\Box_T A \rightarrow B) \vee \Box_T(\Box_T B \rightarrow A);$$

$$K_{\Box_\xi}: \Box_\xi(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box_\xi A \rightarrow \Box_\xi B), \xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\};$$

$$T_{\Box_\xi}: \Box_\xi A \rightarrow A, \xi \in \{T, \sim, 1, \dots, k\};$$

$$4_{\Box_\xi}: \Box_\xi A \rightarrow \Box_\xi \Box_\xi A, \xi \in \{\sim, 1, \dots, k\};$$

$$5_{\Box_\xi}: \neg \Box_\xi A \rightarrow \Box_\xi \neg \Box_\xi A, \xi \in \{\sim, 1, \dots, k\};$$

$$M.1: \Box_T A \rightarrow \Box_\sim A;$$

$$M.2: \Box_\sim A \rightarrow \Box_i A, 1 \leq i \leq k;$$

$$AL: \Box_\sim A \wedge \Box_\sim B \wedge \Diamond_T(\neg A \wedge \Box_\sim B) \rightarrow \Box_T B.$$

**Правила вывода  $AS_{LT K_r}$ :**

$$MP: \frac{A, A \rightarrow B}{B} \quad Nec: \frac{A}{\Box_\xi A}$$

Определим  $LTK_{r_{ax}} := \{A \in Fma(\mathcal{L}^{LTK}) \mid \vdash_{AS_{LTK_r}} A\}$ .

Доказаны следующие результаты:

**Лемма 1.**  $LTK_{r_{ax}}$  непротиворечива.

**Лемма 2.**  $LTK_{r_{ax}} = LTK_r$

**Следствие 1.** Логика  $LTK_r$  является конечно аксиоматизируемой.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации.

### Список литературы

1. Lukyanchuk A. N. Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge // Journal of Siberian Federal University. 2013. V. 6. № 2. P. 220–226.
2. Calardo E., Rybakov V. V. An axiomatisation for the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK // Logic Journal of the IGPL. 2007. V. 15. № 3. P. 239–254.

## О группах периода 72

**Д. В. Лыткина**

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,  
Новосибирск

**В. Д. Мазуров**

Институт математики СО РАН, Новосибирск

**Энрико Ябара**

Università di Ca' Foscari San Giobbe, Венеция

Пусть  $G$  — периодическая группа. Спектром  $\omega(G)$  группы  $G$  называется множество порядков её элементов. Если множество  $\omega(G)$  конечно, то через  $\mu(G)$  обозначается множество максимальных по делимости элементов из  $\omega(G)$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mu(G) = \{8, 9\}$ . Тогда  $G$  локально конечна.

**Теорема 2.** Пусть  $G$  — локально конечная  $\{2, 3\}$ -группа, не содержащая элементов порядка 6. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(a)  $G = O_3(G)T$ , где  $O_3(G)$  абелева, а  $T$  — локально циклическая или локально кватернионная группа, действующая свободно на  $O_3(G)$ .

(b)  $G = O_2(G)R$ , где  $O_2(G)$  нильпотентна степени не выше 2,  $R$  — локально циклическая 3-группа, действующая свободно на  $O_2(G)$ .

(c)  $G = O_2(G)D$ , где  $D$  содержит подгруппу  $R$  индекса 2, а  $O_2(G)R$  удовлетворяет п. (b).

(d)  $G$  — 2-группа или 3-группа.

В пп. (a)–(c) группа  $G$  разрешима степени не выше 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-90006, 13-01-00505, 11-01-00456 и 11-01-91158), Федеральной целевой программы "Научно-образовательные кадры инновационной России" (гос. контракт № 14.740.11.0346) и программы СО РАН проектов партнёрских фундаментальных исследований на 2012–2014 гг. (проект 14).

## Знакопеременные группы в атласе конечных простых $(2 \times 2, 2)$ -порожденных групп

**А. И. Макосий**

Хакасский государственный университет, Абакан

Напомним, что  $(2 \times 2, 2)$ -тройкой инволюций группы  $G$  называется тройка инволюций  $(i, j, k)$  группы  $G$  с условием  $G = \langle i, j, k \rangle$ ,  $ij = ji$ . Если графы Коксетера  $(2 \times 2, 2)$ -троек инволюций изоморфны, то такие тройки не различаются.

В рамках решения задачи построения в явном виде  $(2 \times 2, 2)$ -троек инволюций конечных простых групп и создания электронного атласа таких троек получено описание  $(2 \times 2, 2)$ -троек инволюций каждой знакопеременной группы степени  $\leq 17$  [1].

В работе [2] обосновывается тезис об использовании атласа  $(2 \times 2, 2)$ -троек инволюций и аналогичных как инструмента исследования в теории групп и ее приложениях. Одним из приложений атласа является построение множества, мощность которого определяет

введенный В. П. Шунковым параметр вложения инволюции в группе  $G$ . Для изучения этого множества необходимо различать несопряженные  $(2 \times 2, 2)$ -тройки инволюций с изоморфными графами Коксетера. Предполагается, что электронный атлас  $(2 \times 2, 2)$ -троек инволюций конечных простых групп будет содержать также и программное обеспечение, позволяющее использовать сведения из этого атласа в прикладных исследованиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта НШ №10 Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева.

### Список литературы

1. Макосий А. И., Тимофеев А. В. Атлас конечных простых  $(2 \times 2, 2)$ -порожденных групп, 2012. <http://algebra.krasn.ru>.
2. Макосий А. И. Электронные атласы групп как инструмент исследования в теории групп и ее приложениях // Вестн. Краснояр. гос. пед. ун-та им. В. П. Астафьева. 2013. Т. 23. № 1. С. 211–215.

## О строгой вещественности унитарной группы матриц над полем характеристики 2

Н. С. Манагарова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В 1995 г. А. А. Кириллов высказал гипотезу о вещественности характеров унитарной группы  $UT_n(K)$  над полем  $K = GF(2)$ , т. е. гипотезу о вещественности  $UT_n(2)$ . Напомним, что вещественность группы равносильна сопряженности каждого элемента со своим обратным. А. Вера-Лопез и Дж. М. Арреги, опираясь на результаты [5, 6], установили вещественность группы  $UT_n(2)$  при  $n \leq 12$ . В 1998 г. И. М. Айзекс и Д. Карагуиузян [4] привели пример матрицы  $A \in UT_{13}(2)$ , которая не сопряжена в  $UT_{13}(2)$  со своей обратной, тем самым гипотеза А. А. Кириллова при  $n \geq 13$  была опровергнута.

Группу  $G$  назовем *строго вещественной*, если любой ее неединичный элемент строго вещественный, т. е. сопряжен некоторой инволюцией из  $G$  со своим обратным элементом. Я. Н. Нужин записал в

Коуровскую тетрадь следующий вопрос: в каких группах лиева типа над полем характеристики 2 максимальные унитарные подгруппы строго вещественны? [7, вопрос 16.76].

Ранее М. А. Газданова и Я. Н. Нужин [1–3] установили, что при  $n \leq 7$  и  $n \geq 13$  группы унитарных матриц  $n \times n$  над полем  $K$  характеристики 2 являются строго вещественными. Автором была доказана строгая вещественность указанной группы при  $n = 8$ , а также найдены более простые доказательства для  $n \leq 7$ . Суммируя все результаты, получаем, что справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $K$  — поле характеристики 2. Группа  $UT_n(K)$  является строго вещественной, если  $n \leq 8$ , а при  $n \geq 13$  — нет.

## Список литературы

1. Газданова М. А., Нужин Я. Н. О строгой вещественности унитарных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 5. С. 1031–1051.
2. Газданова М. А. О строгой вещественности группы унитарных матриц размерности  $6 \times 6$  над полем характеристики 2 // Algebra and Model Theory. Novosibirsk: NSTU. 2005. Т. 5. С. 44–53.
3. Газданова М. А. О строгой вещественности группы унитарных матриц размерности  $7 \times 7$  над полем характеристики 2 // Вестн. КрасГУ. Физ.-мат. науки. Красноярск. 2006. № 7. С. 43–53.
4. Isaacs I. M., Karagueuzian D. Conjugacy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. 1998. V. 202. P. 704–711.
5. Arregi J. M., Vera-Lopez A. Conjugacy classes in Sylow  $p$ -subgroups of  $GL(n, q)$  // J. Algebra. 1992. V. 152. P. 1–19.
6. Arregi J. M., Vera-Lopez A. Some algorithms for the calculation conjugacy classes in the Sylow  $p$ -subgroups of  $GL(n, q)$  // J. Algebra. 1995. V. 177. P. 899–925.
7. Коуровская тетрадь. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006.

# О неабелевых композиционных факторах конечной группы, минимальной относительно простого спектра

Н. В. Маслова

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Д. О. Ревин

Институт математики СО РАН, Новосибирск

Пусть  $G$  — конечная группа. Множество всех простых делителей числа  $|G|$  будем называть *простым спектром* группы  $G$  и обозначать через  $\pi(G)$ . Конечную группу  $G$  назовем *минимальной по простому спектру*, если  $\pi(H) \neq \pi(G)$  для любой собственной подгруппы  $H$  из  $G$ . Класс таких групп будем обозначать через  $\mathfrak{V}$ . П. Шумяцкий записал в Коуровскую тетрадь гипотезу [1, проблема 17.125], эквивалентную следующей гипотезе 1: любая группа из класса  $\mathfrak{V}$  порождается парой сопряженных элементов. В [2] было получено подтверждение гипотезы 1 для класса конечных групп с холловыми максимальными подгруппами. Этот результат основывается на полученном в [3] описании неабелевых композиционных факторов таких групп. Поэтому представляется естественной и интересной следующая проблема: *каковы неабелевы композиционные факторы групп из класса  $\mathfrak{V}$ ?*

**Теорема 1.** *Пусть  $S$  — конечная простая спорадическая группа. Тогда*

- (i) *если  $S \in \{M_{11}, M_{12}, M_{24}, HS, Co_3, Co_2\}$ , то  $S$  не изоморфна никакому композиционному фактору никакой группы из  $\mathfrak{V}$ ;*
- (ii) *если  $S \in \{M_{22}, M_{23}, J_1, J_2, J_3, J_4, He, Ru, Suz, ON, HN, Ly, Th, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, Co_1, B, M\}$ , то  $S \in \mathfrak{V}$ ;*
- (iii) *группа  $McL$  не принадлежит классу  $\mathfrak{V}$ , но изоморфна композиционному фактору некоторой группы из класса  $\mathfrak{V}$ . При этом любая группа  $X \in \mathfrak{V}$ , содержащая композиционный фактор  $S \cong McL$ , обладает нормальным рядом  $X \geq Y > Z \geq 1$ , таким, что*
  - а) *группы  $X/Y$  и  $Z$  не имеют композиционных факторов, изоморфных  $McL$ ;*
  - б) *фактор-группа  $Y/Z$  является главным фактором группы  $X$  и равна прямому произведению групп, изоморфных  $McL$ ;*

в) фактор-группа  $X/Y$  неразрешима, ее порядок не делится на 7 и 11, а ее неабелевы композиционные факторы с точностью до изоморфизма принадлежат списку  $\{PSL_2(q), PSL_3(q), PSL_4(q), PSL_5(q), PSU_3(q), PSU_4(q), PSU_5(q), {}^2B_2(q), {}^2F_4(q), J_3\}$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 13-01-00469 и 13-01-00505), ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (проект 14.740.11.0346) и Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых (проект МК-3395.2012.1), а также программы совместных исследований СО РАН и УрО РАН (проект 12-С-1-1018), гранта ИММ УрО РАН для молодых ученых за 2013 г. и целевой программы СО РАН на 2012–2014 гг. (проект 14).

### Список литературы

1. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2010.
2. Маслова Н. В., Ревин Д. О. Порождаемость конечной группы с холловыми максимальными подгруппами парой сопряженных элементов // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19. № 3 (принята к печати).
3. Маслова Н. В. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53 № 5. С. 1065–1076.

### О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (144,39,6,12)

**А. А. Махнев, Д. В. Падучих**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

В [1] предложена программа изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин сильно регулярны с собственным значением 3. Там же задача редуцирована к случаю, когда окрестности вершин принадлежат конечному множеству исключительных графов.

В работе исследованы графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны с параметрами (144,39,6,12). Сильно регулярный граф

с параметрами  $(144, 39, 6, 12)$  существует. Это граф  $\Delta$  с группой автоморфизмов  $G = SL_3(3)$ , и стабилизатор вершины  $u$  является расширением группы порядка 13 с помощью группы порядка 3.

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  — вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы с параметрами  $(144, 39, 6, 12)$ . Тогда  $d(\Gamma) = 3$  и выполняется одно из утверждений:

- (1)  $\mu = 36, 2 \leq k_3 \leq 28$ ;
- (2)  $\mu = 39, 2 \leq k_3 \leq 22$ ;
- (3)  $\mu = 48, 2 \leq k_3 \leq 11$ .

В частности, граф из заключения теоремы не является дистанционно регулярным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ-ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы Отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

## Список литературы

1. Махнев А. А. О сильно регулярных графах с собственным значением 3 и их расширениях // Докл. Акад. наук. 2013. Т. 452. № 5. С. 475–478.

## Классовые кольца характеров спорадических групп

**М. И. Молодорич**

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Пусть  $G$  — конечная группа,  $X(G)$  — множество представителей всех классов сопряжённости в  $G$ ,  $Irr(G)$  — множество всех неприводимых характеров группы  $G$  и  $\chi \in Irr(G)$ . Положим

$$\mathbf{Z}[cl, \chi] = \left\{ \frac{1}{\deg \chi} \sum_{x \in X(G)} |x^G| \chi(x) \gamma(x) \mid \gamma(x) \in \mathbf{Z} \forall x \in X(G) \right\}.$$

$\mathbf{Z}[cl, \chi]$  — называется *классовым кольцом характера*  $\chi$ .

**Лемма 1.** Пусть  $\chi \in Irr(G)$ . Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) отображение  $f_\chi : Z(\mathbf{Z}G) \rightarrow \mathbf{C}$ , где для  $u = \sum_{\xi \in \text{Irr}(G)} \beta_u(\xi) e(\xi)$  полагаем  $f_\chi(u) = \beta_u(\chi)$ , будет гомоморфизмом кольца  $Z(\mathbf{Z}G)$  в поле комплексных чисел  $\mathbf{C}$ ;
- 2) образ  $f_\chi$  совпадает с  $\mathbf{Z}[cl, \chi]$  и потому  $\mathbf{Z}[cl, \chi]$  — подкольцо в  $\mathbf{C}$ ;
- 3)  $\mathbf{Z}[cl, \chi]$  — подкольцо кольца целых  $I(\mathbf{Q}(\chi))$  поля характера  $\chi$ .

Эта лемма и определение классового кольца характера взяты из [1].

Классовое кольцо характера назовём *тривиальным по умножению*, если оно совпадает с кольцом целых чисел  $\mathbf{Z}$ , или является подкольцом кольца целых мнимого квадратичного поля. Найдены все нетривиальные по умножению классовые кольца характеров всех спорадических групп. Поскольку полное описание всех случаев очень громоздко, то приведём описание только для двух групп.

**Теорема 1.** Пусть  $\zeta_n$  — первообразный корень из 1 степени  $n$ .

1) Нетривиальным по умножению классовым кольцом характера для группы Ru является одно из следующих колец:

$$\mathbf{Z} + 2^4 35^3 29 \sqrt{9} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} + 2^{10} 5 \cdot 29 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} + 2^2 5^3 7 \cdot 13 \frac{1 + \sqrt{29}}{2} \mathbf{Z},$$

$$\mathbf{Z} + 2^9 13 \cdot 29 A \mathbf{Z} + 2^9 13 \cdot 29 B \mathbf{Z}, \mathbf{Z} + 2^9 5^3 \cdot 29 G \mathbf{Z} + 2^9 5^3 \cdot 29 H \mathbf{Z},$$

где

$$A = -\zeta_7 + \zeta_7^2 + \zeta_7^3 + \zeta_7^4 + \zeta_7^5 - \zeta_7^6, \quad B = \zeta_7 - \zeta_7^2 + \zeta_7^3 + \zeta_7^4 - \zeta_7^5 + \zeta_7^6,$$

$$G = \zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 - \zeta_{13}^4 + \zeta_{13}^5 - \zeta_{13}^6 - \zeta_{13}^7 + \zeta_{13}^8 - \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} + \zeta_{13}^{12},$$

$$H = -\zeta_{13} - \zeta_{13}^2 - \zeta_{13}^3 + \zeta_{13}^4 - \zeta_{13}^5 + \zeta_{13}^6 + \zeta_{13}^7 - \zeta_{13}^8 - \zeta_{13}^9 - \zeta_{13}^{10} - \zeta_{13}^{11} + \zeta_{13}^{12}.$$

2) Нетривиальным по умножению классовым кольцом характера для группы He является одно из следующих колец:

$$\mathbf{Z} + 2^{13} 3^5 \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} + 2^{12} 3^4 \frac{1 + \sqrt{21}}{2} \mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z} + 2^{13} 3^2 5 \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \mathbf{Z}.$$

## Список литературы

1. Алеев Р. Ж. Центральные элементы целочисленных групповых колец // Алгебра и логика. 2000. Т. 39. № 5. С. 513–525.

# Классы скрученной сопряженности в элементарных группах Шевалле

Т. Р. Насыбуллов

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Пусть  $G$  – группа,  $\varphi$  – ее автоморфизм. Говорим, что элементы  $x, y$  из  $G$   $\varphi$ -сопряжены (обозначаем  $x \sim_\varphi y$ ), если для некоторого  $z \in G$  справедливо равенство  $x = zy\varphi(z^{-1})$ . Отношение  $\varphi$ -сопряженности является отношением эквивалентности и разбивает группу  $G$  на классы  $\varphi$ -сопряженности. Если  $\varphi$  – тождественный автоморфизм, то классы  $\varphi$ -сопряженности – это обычные классы сопряженности. Символом  $R(\varphi)$  обозначим число классов  $\varphi$ -сопряженности. Если  $R(\varphi) = \infty$  для всякого автоморфизма  $\varphi \in \text{Aut } G$ , то говорим, что группа  $G$  обладает свойством  $R_\infty$ .

В работе [1] сформулирован вопрос об описании групп со свойством  $R_\infty$ , а в работе [2] этот вопрос рассмотрен для некоторых линейных групп. Установлено, в частности, что общая линейная группа  $\text{GL}_n(K)$  и специальная линейная группа  $\text{SL}_n(K)$  при  $n \geq 3$  обладают свойством  $R_\infty$ , если  $K$  – целостное кольцо, содержащее подкольцо целых чисел, у которого группа автоморфизмов  $\text{Aut } K$  периодична.

В данной работе этот результат обобщен на элементарные группы Шевалле над полем. Доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $G = E_\pi(\Phi, F)$  – элементарная группа Шевалле с неприводимой системой корней типа  $\Phi$  над полем  $F$ . Если группа автоморфизмов поля  $F$  периодична, то  $G$  обладает свойством  $R_\infty$ .

При доказательстве данного результата использовалось описание автоморфизмов групп Шевалле над полем, полученное Дж. Хамфрисом в 1969 г.

## Список литературы

1. Fel'shtyn A., Goncalves D. Twisted conjugacy classes in symplectic groups, mapping class groups and braid groups. // Geom. Dedicata. 2010. V. 146. P. 211–223.
2. Насыбуллов Т. Р. Классы скрученной сопряженности в общей и специальной линейных группах // Алгебра и логика. 2012. Т. 51. № 3. С. 331–346.

# О полурешетках Роджерса конечных семейств в иерархии Ершова

С. С. Оспичев

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Одним из основных направлений исследований в теории нумераций является изучение полурешеток Роджерса в различных иерархиях множеств [1]. Цель данной работы – построение семейств  $\Sigma_a^{-1}$ -множеств [2] с полурешетками Роджерса, изоморфными некоторым более или менее изученным объектам.

Пусть  $\mathcal{S} = \{A, B\}$  – семейство множеств,  $M \subset \omega$ . Определим нумерацию  $\nu^M$ :

$$\begin{aligned}\nu_n^M &= B, n \in M; \\ \nu_n^M &= A, n \notin M.\end{aligned}$$

В работе доказана

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{S} = \{A, B\}$  – семейство непустых непересекающихся вычислимо перечислимых множеств. Нумерация  $\nu^M$  семейства  $\mathcal{S}$  будет  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой тогда и только тогда, когда  $M \in \Delta_a^{-1}$  для любого ординального обозначения  $a$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{S} = \{A, B\}$  – семейство непустых вычислимо перечислимых множеств и  $A \subset B$ ,  $a$  – ординальное обозначение нечетного или предельного ординала. Нумерация  $\nu^M$  семейства  $\mathcal{S}$  будет  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой тогда и только тогда, когда  $M \in \Sigma_a^{-1}$ .

Для ординальных обозначений четных ординалов доказана

**Лемма 1.** Пусть  $\mathcal{S} = \{A, B\}$  – семейство непустых вычислимо перечислимых множеств и  $A \subset B$ ,  $a$  – ординальное обозначение четного непредельного ординала.

1. Если нумерация  $\nu^M$  семейства  $\mathcal{S}$  будет  $\Sigma_a^{-1}$ -вычислимой, то  $M \in \Sigma_a^{-1}$ .
2. Существуют семейство  $\mathcal{S}$  с упомянутыми свойствами и множеством  $M \in \Sigma_2^{-1}$ , такие что  $\nu^M$  не является  $\Sigma_2^{-1}$ -вычислимой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-276.2012.1) и при поддержке ФЦП Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг. (Соглашение № 8227).

## Список литературы

1. Goncharov S. S., Badaev S. Theory of numberings, open problems // Contemporary Mathematics. V. 257. P. 23–38.
2. Арсланов М. М. Иерархия Ершова. Казань: Казан. гос. ун-т, 2007.

## Применение алгебраических методов для оценки устойчивости некоторых компьютерных вычислений

**А. Н. Остыловский**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Для решения системы линейных алгебраических уравнений

$$a_k u_{k-1} + b_k u_k + c_k u_{k+1} = f_k, \quad k = 1, \dots, N$$

хорошо известен метод прогонки. Рассмотрен процесс накопления ошибок при реализации этого алгоритма в следующей модели машинной арифметики

$$(x * y)_M = (x * y)(1 + \varepsilon), \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_M, \quad * \in \{+, -, \times, \div\}.$$

С использованием алгебраического аппарата (жорданова форма, матричное представление проективных преобразований) получена

**Теорема 1.** Пусть  $a'_k = a_k/b_k$ ,  $c'_k = c_k/b_k$  и машинное  $\varepsilon_M$  при некотором  $\delta \in (0, 1)$  удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \varepsilon_M &< \min\{(1 - \delta)^2/64, \delta/2, 0.01\}, \\ (1 - \delta)^2|a'_k| + |c'_k| &\leq 1 - \delta - 8\varepsilon_M, \\ |a'_k| &\leq \frac{1 - \delta - 9\sqrt{\varepsilon_M}}{1 + (1 - \delta)^2}, \quad k = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Тогда абсолютная погрешность машинного решения не зависит от  $N$  и с точностью до малых высшего порядка относительно  $\sqrt{\varepsilon_M}$  удовлетворяет неравенству

$$|\Delta u_k| \leq \frac{24F'\sqrt{\varepsilon_M}}{\delta(\delta - 2\varepsilon_M)^2},$$

где  $F' = \max|f_k|$ ,  $k = 1, \dots, N$ .

Отметим, что предложенная оценка в отличие от [1–4] требует условия слабее классического условия диагонального преобладания, не требует условия гладкости коэффициентов и не содержит никаких неопределённых констант.

### Список литературы

1. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
2. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993.
3. Ильин В. П., Кузнецов Ю. И. Трёхдиагональные матрицы и их приложения. М.: Наука, 1985.
4. Ostylovsky A. N. An estimate of the absolute value and width of the solution of a linear system of equations with tridiagonal interval matrix by the interval sweep method. Reliable Computing, 1(4) (1995), Institute of New Technologies in Education. St.Petersburg - Moscow. P. 393–401.

### О сопряжении центральных модуляторов

**Ин. И. Павлюк, Л. И. Теняева**

Павлодарский государственный университет, Павлодар

Известно [1], что в группе  $G$  централизаторы  $C(a) = \{x/a^x = a\}$ ,  $C(b) = \{y/b^y = b\}$  сопряженных элементов

$$(a_c \equiv b) \stackrel{\text{Def}}{=} ((\exists x \in G) (a^x = b))$$

сопряжены между собой -  $C(a)_c \equiv C(b)$ . Отношение центральной сравнимости элементов  $a, b$  группы  $G$  вводится формулой [2]

$$(a \equiv : b) \stackrel{\text{Def}}{=} (|C(b) : C(b) \cap C(a)| = 1),$$

а множество элементов  $x$  группы  $G$ , удовлетворяющих сравнению  $x \equiv : a$ , называется центральным модулятором  ${}_1\equiv M(a)$  элемента  $a$  в группе  $G$ , т. е.

$${}_1\equiv M(a) = \{x/x \equiv : a\}.$$

Установлено [2], что  ${}_1\equiv M(a)$  - подгруппа группы  $C(a)$ .

**Предложение.** В группе  $G$  центральные модуляторы сопряженных элементов сопряжены между собой, т. е.

$$((\forall a, b \in G) (a_c \equiv b)) \Rightarrow ({}_1\equiv M(a)_c \equiv {}_1\equiv M(b)).$$

**Теорема.** В группе  $G$  для любых ее элементов  $a, x$  верна формула  $(\forall a, x \in G) (({}_1\equiv M(a))^x = {}_1\equiv M(a^x))$ .

### Список литературы

1. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967. 648 с.
2. Павлюк И. И., Павлюк Ин. И. К теории центральной сравнимости в группах // Вестн. ПГУ. Сер. "Физико - математическая". Павлодар: ПГУ, 2010. Т. 3. С. 58–72.

## Полуполя и полуполевого плоскости нечетного порядка

**С. В. Панов**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Хорошо известна гипотеза о разрешимости группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевого плоскости [1]. Доклад посвящен перечислениям методами [1,2] конечных полуполевого плоскостей нечетного порядка наряду с проверкой гипотезы для них, а также взаимосвязанному перечислению конечных полуполей. В частности, доказано, что недезарговая полуполевого плоскость порядка 27 единственна с точностью до изоморфизмов, а ее группа коллинеаций разрешима [3].

Исследование поддержано РФФИ (проект 12-01-00968).

## Список литературы

1. Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes // Springer - Verlag: New-York Inc, 1973.
2. Podufalov N. D. On spread sets and collineations of projective planes // Contemp. Math. 1992. (Part 1). V. 131. P. 697–705.
3. Левчук В. М., Панов С. В., Штуккерт П. К. Вопросы перечисления проективных плоскостей и латинских прямоугольников // Механика и моделирование: сб. науч. тр. Красноярск: СибГАУ, 2012. С. 18–39.

## Полиномиальные подстановки и их циклы над примарным кольцом

Н. Г. Парватов

Томский государственный университет, Томск

Изучается цикловая структура полиномиальной подстановки над примарным кольцом  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , где  $p$  — простое и  $k > 1$ .

Пусть  $m$  — целое положительное число и  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  — кольцо классов вычетов по модулю  $m$ . Всякий целочисленный многочлен  $f(x)$  из  $\mathbb{Z}[x]$  определяет функцию  $[f]_m : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_m$ , где  $[f]_m : x \mapsto f(x) \bmod m$ , которая называется полиномиальной над  $\mathbb{Z}_m$ . Для примарного модуля  $m = p^k$  (это основной случай) такие функции, имеющие приложения в криптографии и теории кодирования, охарактеризованы в [1].

Многочлен  $f(x)$  называется перестановочным по модулю  $m$ , если функция  $[f]_m$  является подстановкой над кольцом  $\mathbb{Z}_m$ . В этом случае для любого целого числа  $x$  из  $\mathbb{Z}$  чисто периодической является рекуррентная последовательность  $f^{(l)}(x) \bmod m$ , где  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $f^{(l)}(x) = x$  при  $l = 0$  и  $f^{(l)}(x) = f^{(l-1)}(f(x))$  при  $l > 0$ . Обозначим через  $T(x, f, m)$  множество её элементов.

В докладе рассматриваются целочисленные многочлены, перестановочные по примарному модулю  $m = p^k$ , где  $p$  — простое и  $k > 1$ , и определяющие заданную подстановку по модулю  $p$ . Для произвольного такого многочлена  $f(x)$  изучается цикловая структура подстановки  $[f]_{p^k}$ .

Принципиальным для рассматриваемой задачи является случай  $k = 2$  и следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $f$  — целочисленный многочлен, перестановочный по модулю  $p^2$ ,  $x$  — целое число,  $T = \cup_{l \in \mathbb{Z}} T(x + pl, f, p^2)$  и  $n = |T(x, f, p)|$ . Тогда выполняется альтернатива:

1) множество  $T$  разбивается подстановкой  $[f]_{p^2}$  на  $p$  её циклов длины  $n$  или составляет отдельный её цикл длины  $pn$ ;

2) для некоторого  $k$ , такого, что  $1 < k$  и  $k|p-1$ , множество  $T$  разбивается подстановкой  $[f]_{p^2}$  на  $\frac{p-1}{k}$  её циклов длины  $kn$  и один цикл длины  $n$ .

Иными словами, цикл длины  $n$  полиномиальной подстановки  $[f]_p$  порождает в подстановке  $[f]_{p^2}$  либо один цикл длины  $pn$ , либо один цикл длины  $n$  и  $\frac{p-1}{k}$  циклов длины  $kn$  для некоторого  $k|p-1$ . Какая именно из альтернатив, указанных в теореме, имеет место, определяется значениями производной  $f'$  на элементах цикла  $T(x, f, p)$ . Более детальное рассмотрение позволяет сформулировать методы перечисления перестановочных многочленов с заданной цикловой структурой по модулю  $p^k$ .

## Список литературы

1. Carlitz L. Functions and polynomials (mod  $p^n$ ) // Acta Arithmetica. 1964. Т. 9. Р. 67–68.

## Развитие понятия равномерного произведения подгрупп

**О. В. Пашковская**

Красноярский институт железнодорожного транспорта, Красноярск

Определение равномерного произведения было предложено С. Н. Черниковым (см., например, [1]).

Пусть  $G$  — группа,  $I$  — непустое множество индексов, состоящее не менее чем из двух элементов, и  $A_i$ ,  $i \in I$ , — некоторые (необязательно попарно различные) подгруппы группы  $G$ . Группа  $G$  является равномерным произведением подгрупп  $A_i$ ,  $i \in I$ , если она порождается ими, и при любых различных индексах  $i \in I$  и  $j \in I$  произвольная циклическая подгруппа группы  $A_i$  перестановочна с произвольной циклической подгруппой группы  $A_j$ .

Строение групп, которые являются равномерным произведением силовских подгрупп, было описано В. П. Шунковым в [2].

Продолжая изучать строение групп с условиями перестановочности на системы подгрупп, мы получили определение обобщенно равномерного произведения.

Группа  $G$  называется обобщенно равномерным произведением своих подгрупп  $Q_i$ ,  $i \in I$ , если:  $G = \text{gr}(Q_i \mid i \in I)$ , где  $Q_i$  —  $q_i$ -подгруппы, и выполняются условия:

- 1)  $Q_i Q_j = Q_j Q_i$ ,  $i, j \in I$ ;
- 2) если  $Q_i$  обладает элементарной абелевой подгруппой  $R_i$  порядка  $\geq q_i^2$ , то  $R_i$  перестановочна с любой нециклической элементарной абелевой подгруппой из  $Q_j$ ,  $i \neq j$ ;
- 3) группа, порожденная всеми  $Q_j$ , не содержащими элементарных абелевых подгрупп порядка  $\geq q_j^2$ , является равномерным произведением подгрупп  $Q_j$ .

В [3] получено описание строения групп, являющихся обобщенно равномерным произведением своих силовских подгрупп.

В настоящее время рассматриваются группы, представимые в виде произведения групп с различными системами перестановочных подгрупп [4]. Получено описание некоторых частных случаев таких произведений (например, с системами перестановочных подгрупп ранга 3).

## Список литературы

1. Черников Н. С. Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. Киев: Наук. думка, 1987.
2. Шунков В. П. О группах, разложимых в строгое равномерное произведение своих  $p$ -групп // Докл. АН СССР. 1964. Т. 154. С. 542-545.
3. Пашковская О. В. Обобщенно равномерные автоморфизмы и обобщенно равномерные произведения. М., 2005. 6 с. Деп. в ВИНИТИ (02.02.05). № 152-В2005.
4. Пашковская О. В. Группы, разложимые в обобщенно равномерное произведение своих силовских подгрупп // Алгебра, логика и приложения: тез. докл. междунар. конф. Красноярск, 2010. С. 73,74.

## Об экспонентах некоторых ассоциативных алгебр

С. М. Рацеев

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

Пусть  $A(X)$  — свободная ассоциативная алгебра от счетного множества свободных образующих  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,  $P_n$  — подпространство в  $A(X)$ , состоящее из всех полилинейных элементов степени  $n$  от переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Пусть также  $V$  — некоторое многообразие ассоциативных алгебр,  $Id(V)$  — идеал тождеств многообразия  $V$ . Обозначим

$$P_n(V) = P_n / (P_n \cap Id(V)), \quad c_n(V) = \dim P_n(V), \quad \exp(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Напомним, что в случае основного поля нулевой характеристики  $S_n$ -модуль  $P_n(V)$  является вполне приводимым и разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров имеет следующий вид:

$$\chi_n(V) = \chi(P_n(V)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda(V) \chi_\lambda. \quad (1)$$

Обозначим через  $U_s$  многообразие ассоциативных алгебр, определенное тождеством

$$[x_1, x_2] \dots [x_{2s-1}, x_{2s}] = 0.$$

В работах [1,2], в частности, показано, что для любого многообразия ассоциативных алгебр  $V$  над произвольным полем  $\exp(V \cap U_s)$  существует и является целым числом.

**Теорема 1.** Пусть  $V$  — многообразие ассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики и  $d$  — некоторое неотрицательное целое число. Тогда следующие условия эквивалентны.

- 1)  $\exp(V \cap U_{d+1}) \leq d$ ;
- 2) для любого целого  $s > d$  выполнено неравенство  $\exp(V \cap U_s) \leq d$ ;
- 3) существует такая константа  $C$ , что в сумме (1)  $m_\lambda(V \cap U_{d+1}) = 0$  в случае, если выполнено условие  $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d) > C$ ;
- 4) для любого целого  $s > d$  существует такая константа  $C = C(s)$ , что в сумме (1)  $m_\lambda(V \cap U_s) = 0$  в случае, если выполнено условие  $n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_d) > C$ .

**Теорема 2.** Пусть для некоторого многообразия ассоциативных алгебр  $V$  над полем нулевой характеристики и некоторого целого неотрицательного  $d$  выполнено равенство  $\exp(V \cap U_{d+1}) = d$ . Тогда для любого целого  $s > d$  будет выполнено равенство  $\exp(V \cap U_s) = d$ .

## Список литературы

1. Petrogradsky V. M. Exponents of subvarieties of upper triangular matrices over arbitrary fields are integral // *Serdika Math.* 2000. V. 26. №2. P. 1001–1010.
2. Рацеев С. М. Тождества в многообразиях, порожденных алгебрами верхнетреугольных матриц // *Сиб. мат. журн.* 2011. Т. 52. № 2. С. 416–429.

## Базис допустимых правил логик конечной глубины над $S4$ .

**В. В. Римацкий**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Пусть  $\lambda$  – финитно аппроксимируемая модальная логика над  $S4$  конечной глубины. Для построения последовательности правил вывода определим формулы  $f(i)$  следующим образом. Выберем произвольную нетривиальную антицепь  $\mathcal{X} \subseteq Ch_w(\lambda)$ , имеющую одноэлементное ко-накрытие  $z$  в  $w$ -характеристической модели  $Ch_w(\lambda)$  (т. е. фрейм  $z^R = \{z\} \cup \mathcal{X}^R$  является  $\lambda$ -фреймом). Затем построим ко-накрытийный последователь  $Co_\lambda(z^R)$  и выберем наименьшее  $n$  так, чтобы выполнялось  $Co_\lambda(z^R) \sqsubseteq Ch_n(\lambda)$ . Перенесем означивание  $V$  с  $Ch_n(\lambda)$  на  $Co_\lambda(z^R)$ , т. е. введем означивание  $S$ , которое далее будем считать фиксированным на  $Co_\lambda(z^R)$ .

Индукцией по глубине элемента  $a \in Co_\lambda(z^R)$  определим формулу  $f(a)$  следующим образом. Для каждого элемента  $a$  определим  $p(a) := \{i \mid a \Vdash_S p_i\}$  и  $\alpha(a) := \bigwedge_{i \in p(a)} p_i \wedge \bigwedge_{i \notin p(a)} \neg p_i$ . Для любого невырожденного сгустка  $C$  определим формулу  $\alpha(C) := \bigwedge_{a \in C} \Diamond \alpha(a)$ . Для каждого рефлексивного элемента  $a \in Co_\lambda(z^R)$  глубины 1 определим формулу  $f(a) := \alpha(a) \wedge \alpha(C(a)) \wedge \Box(\alpha(C(a)))$ .

Определим также формулу

$$\delta(a) := \bigwedge_{c \in \{a\}^{R<}} \Diamond f(c) \wedge \bigwedge_{c \in S_{\leq i}(Co_\lambda(z^R)) \& c \notin \{a\}^{R<}} \neg \Diamond f(c).$$

Рассмотрим рефлексивный элемент  $a$  из  $S_{i+1}(Co_\lambda(z^R))$  и сгусток  $C(a)$ , содержащий  $a$ . Для такого элемента  $a$  зафиксируем формулы:

$$\gamma(i) := \bigwedge_{c \in S_{\leq i}(Co_\lambda(z^R))} \neg f(c),$$

$$\theta(a) := \bigwedge \{ \Diamond(\alpha(d) \wedge \delta(a) \wedge \gamma(i)) \mid d \in C(a) \},$$

$$\phi(a) := \Box \left( \bigvee_{c \in \{a\}^{R<}} f(c) \vee \bigvee_{d \in C(a)} (\alpha(d) \wedge \delta(a) \wedge \theta(a)) \right),$$

$$f(a) := \alpha(a) \wedge \delta(a) \wedge \gamma(i) \wedge \theta(a) \wedge \phi(a).$$

Определим правила вывода следующим образом:

$$\mathcal{R}_1 := \frac{\Diamond p \wedge \Diamond \neg p}{p \wedge \neg p}; \quad R(z; \mathcal{X}) := \frac{\bigvee_{i \in [Co_\lambda(z^R) \setminus \{z\}]} f(i)}{\neg f(z)}.$$

Определим теперь множество правил вывода  $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1 \cup \{R(z; \mathcal{X})\}\}$  по всем возможным различным нетривиальным антицепям  $\mathcal{X} \subseteq Ch_w(\lambda)$ , допускающих  $\lambda$ -ко-накрытие  $z$ . Основным результатом является

**Теорема 1.** Пусть  $\lambda$  – финитно аппроксимируемая модальная логика над  $S4$  конечной глубины. Множество правил вывода  $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_1 \cup \{R(z; \mathcal{X})\}\}$  по всем возможным различным нетривиальным антицепям  $\mathcal{X} \subseteq Ch_w(\lambda)$ , допускающих  $\lambda$ -ко-накрытие  $z$ , является базисом для допустимых правил логики  $\lambda$ .

## О локальном распределении простых чисел

А. В. Рожков

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь

Распределение простых чисел определяется теоремой П. Л. Чебышева.

Хорошо изучены небольшие семейства простых чисел. Простые числа вида  $(p, p + 2)$  — близнецы,  $(p, p + 2, p + 6)$ ;  $(p, p + 4, p + 6)$  — триплеты и  $(p, p + 2, p + 6, p + 8)$  — сдвоенные близнецы.

Предлагается обобщение этих понятий.

*Если  $n$  простых чисел, больших  $n$ , содержится внутри отрезка минимально возможной длины, то мы назовем их плотной  $n$ -кой.*

Близнецы, триплеты и сдвоенные близнецы — это плотные 2-ки, 3-ки и 4-ки соответственно. Условие "больших  $n$ " принципиально, чтобы отсечь начало координат и распространить понятие на весь натуральный ряд.

Определение плотных  $n$ -к рекуррентно. Не зная длину  $n$ -ки, мы не можем найти  $(n + 1)$ -ку. База индукции — сдвоенные близнецы.

Поиск вида плотных  $n$ -к реализован в виде программы на GAP. Алгоритм имеет почти нулевую сложность счета, но требует перебора экспоненциально растущего числа вариантов, фактически вершин слойно однородного дерева с ветвлением  $3, 5, 7, \dots, p$ , где  $p$  — максимальное простое число, не превосходящее  $n$ . Найден вид всех плотных  $n$ -к до  $n = 191$  включительно. Разных видов плотных 105-к оказалось 486 — это локальный максимум. Плотные  $n$ -ки вложены друг в друга. Группа автоморфизмов графа вложений (проверено до  $n = 30$ ) — элементарная абелева.

Также на GAP написана программа по поиску плотных  $n$ -к конкретного вида. Программа имеет экспоненциально растущую сложность вычислений. При переходе от  $n$ -ки к  $(n + 1)$ -ке количество чисел, которые необходимо проверить на простоту, увеличивается примерно в 100 раз. Например, для поиска 15-к нужно проверить на простоту порядка  $10^{20}$  20-значных чисел. В настоящее время найдены плотные  $n$ -ки всех типов до  $n = 15$  включительно.

Вычисления показали, что плотные  $n$ -ки появляются в диапазоне до  $10^{\frac{2k}{3}}$ . По Чебышеву они должны были появиться в районе  $10^k$  для подходящего  $k = k(n)$ . Для плотных 15-к это означает, что их

на промежутке  $[0, 10^{20}]$  примерно в миллион раз больше, чем предсказывает закон распределения простых чисел. Простые числа явно склонны к локальным сгущениям, что важно для криптографии.

**Гипотеза.** Для любого натурального  $N$  найдется натуральное  $K$ , такое, что на отрезке  $[K, K+N]$  будет не менее  $\pi(N) - \ln \pi(N)$  простых чисел, где  $\pi(N)$  — количество простых чисел на отрезке  $[3, N]$ .

Искомый отрезок — плотная  $n$ -ка для подходящего  $n$ . Гипотеза проверена до  $N = 1200$ , в том смысле, что на отрезке длины 1200 уместается плотная 191-ка. Структура ее вычислена, остается ее найти.

## Шунковские условия конечности в группах автоморфизмов однородных деревьев

А. В. Рожков

Северо-Кавказский федеральный университет, Ставрополь

В работе [1] введен ряд условий конечности в духе В. П. Шункова и приведены примеры АТ-групп, разграничивающие классы групп с этими условиями. В Коуровской тетради [2] записан вопрос 16.79.

Верно ли, что в любой конечно порожденной АТ-группе над последовательностью циклических групп, порядки которых ограничены, все силовские подгруппы локально конечны?

С использованием методов работы [1] этот вопрос решается отрицательно.

**Теорема 1.** Если последовательность циклических подгрупп, порядки которых ограничены, содержит только конечное число членов простого порядка, то существует АТ-группа над этой последовательностью, в которой хотя бы одна силовская подгруппа не локально конечна.

**Теорема 2.** Силовские подгруппы любой конечно порожденной финитно аппроксимируемой периодической АТ-группы над последовательностью конечных групп бесконечны.

Получены некоторые промежуточные результаты в связи с вопросом 13.55.

Существует ли группа Голода, изоморфная АТ-группе?

**Теорема 3.** *Для любого простого числа  $p$  существует АТ-группа, в которой все силовские  $p$ -подгруппы конечны и сопряжены.*

Гипотеза автора состоит в том, что вопрос о группах Голода и Алешина решается отрицательно. Ключ к разгадке лежит в центре группы. У групп Алешина центр всегда тривиален, а у групп Голода часто нет.

### Список литературы

1. Рожков А. В. Условия конечности в группах автоморфизмов деревьев // Алгебра и логика. 1998. Т. 37. № 5. С. 568–605.
2. Коуровская тетрадь. 17-е изд. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 2010.

### Экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп

**В. А. Романьков**

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск

**Н. Г. Хисамиев**

Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева, Усть-Каменогорск

Подмножество  $B$  алгебраической системы  $A$  называется *экзистенциально замкнутым* в  $A$ , если любая экзистенциальная формула с константами из  $B$  справедлива в  $A$  тогда и только тогда, когда она справедлива в  $B$ .

**Теорема 1.** *Подгруппа  $N$  свободной нильпотентной группы  $N_{r,c}$  ранга  $r \geq 3$  степени нильпотентности  $c \geq 3$  экзистенциально замкнута в  $N_{r,c}$  тогда и только тогда, когда  $N$  является свободным множителем группы  $N_{r,c}$  относительно многообразия  $\mathcal{N}_c$  всех нильпотентных групп степени  $\leq c$ , следовательно,  $N \simeq N_{m,c}$ ,  $1 \leq m \leq r$ , и  $m \geq c - 1$ . Для  $c = 2$  последнее ограничение следует заменить на  $m \geq 2$ .*

Заметим, что экзистенциально замкнутыми подгруппами свободных абелевых групп являются их прямые множители.

Исследование выполнено при поддержке МОиН Российской Федерации (проекты 14.В37.21.0359/0859) и МОиН Республики Казахстан (проект 90-419-13).

## О свойствах однопорожденных $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формаций

**В. Г. Сафонов**

Белорусский государственный университет, Минск

Все рассматриваемые группы конечны. Используется терминология, принятая в [1, 2].

Пусть  $\omega$  — некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел  $\mathbb{P}$ ,  $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ . Функция вида  $f : \omega \cup \{\omega'\} \longrightarrow \{\text{формации}\}$  называется  $\omega$ -локальным спутником. Через  $LF_{\omega}(f)$  обозначается класс всех таких групп  $G$ , что  $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$  и  $G/F_p(G) \in f(p)$  для любого  $p \in \omega \cap \pi(G)$ . Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ , то говорят, что  $\mathfrak{F}$   $\omega$ -насыщенная формация, а  $f$  — её  $\omega$ -локальный спутник. Всякую формацию считают 0-кратно  $\omega$ -насыщенной. При  $n \geq 1$  формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенной, если  $\mathfrak{F} = LF_{\omega}(f)$ , где все значения  $\omega$ -локального спутника  $f$  являются  $(n-1)$ -кратно  $\omega$ -насыщенными формациями. Формацию  $n$ -кратно  $\omega$ -насыщенную для любого целого неотрицательного  $n$  называют *тотально  $\omega$ -насыщенной*. *Подгрупповым функтором* называют отображение  $\tau$ , сопоставляющее каждой группе  $G$  такую систему ее подгрупп  $\tau(G)$ , что: 1)  $G \in \tau(G)$ ; 2) для любых групп  $H \in \tau(A)$  и  $T \in \tau(B)$  и любого эпиморфизма  $\varphi : A \rightarrow B$  имеет место  $H^{\varphi} \in \tau(B)$  и  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ . Тотально  $\omega$ -насыщенную формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $\tau$ -замкнутой, если  $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$  для любой группы  $G \in \mathfrak{F}$ . Совокупность  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  всех  $\tau$ -замкнутых тотально  $\omega$ -насыщенных формаций образует полную модулярную решетку. Формации из  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$  называют  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формациями.

Для любого множества групп  $\mathfrak{X}$  через  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau} \text{form} \mathfrak{X}$  обозначают пересечение всех  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ . В частности, если  $\mathfrak{X} = \{G\}$ , формацию  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau} \text{form} \mathfrak{X} = l_{\omega_{\infty}}^{\tau} \text{form} G$  называют *однопорожденной  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формацией*.

Пусть  $\mathfrak{H}$  — некоторый класс групп,  $\mathfrak{F}$  —  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формация. Тогда, если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , но каждая ее собственная  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -подформация содержит-

ся в  $\mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{F}$  называют *минимальной  $\tau$ -замкнутой тотально  $\omega$ -насыщенной не  $\mathfrak{H}$ -формацией*, или  $\mathfrak{H}_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -критической формацией.

Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{H}$  —  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формации,  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ . Тогда длину решетки  $\mathfrak{F}/_{\omega_{\infty}}^{\tau} \mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$   $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формаций, заключенных между  $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{F}$ , называют  $\mathfrak{H}_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -дефектом формации  $\mathfrak{F}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — однопорожденная  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формация,  $\mathfrak{H}$  —  $\tau$ -замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда, если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , то в  $\mathfrak{F}$  содержится конечное число  $\mathfrak{H}_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -критических формаций.

**Следствие 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — однопорожденная  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формация,  $\mathfrak{H}$  — разрешимая  $\tau$ -замкнутая тотально насыщенная формация. Тогда, если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , то в  $\mathfrak{F}$  содержится конечное число  $l_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -формаций с  $\mathfrak{H}_{\omega_{\infty}}^{\tau}$ -дефектом 1.

## Список литературы

1. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно  $\omega$ -локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. 1999. Т. 2. № 2. С. 114–147.
2. Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.

## О приводимых $c_{\infty}^{\omega}$ -формациях с $\mathfrak{N}_{\infty}^{\omega}$ -дефектом $\leq 2$

**И. Н. Сафонова**

Международный государственный экологический университет

им. А. Д. Сахарова, Минск

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Необходимую терминологию можно найти в [1].

Пусть  $\omega$  — непустое подмножество множества всех простых чисел. Всякую функцию вида  $f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  называют  $\omega$ -композиционным спутником. Для произвольного  $\omega$ -композиционного спутника  $f$  полагают  $CF_{\omega}(f) = \{G \mid G/R_{\omega}(G) \in f(\omega') \text{ и } G/C^p(G) \in f(p) \text{ для всех } p \in \pi(\text{Com}(G)) \cap \omega\}$ , где  $\text{Com}(G)$  обозначает множество всех композиционных абелевых факторов группы  $G$ . Если формация  $\mathfrak{F}$  такова, что  $\mathfrak{F} = CF_{\omega}(f)$  для некоторого

$\omega$ -композиционного спутника  $f$ , то  $\mathfrak{F}$  называют  $\omega$ -композиционной формацией, а  $f$  —  $\omega$ -композиционным спутником формации  $\mathfrak{F}$ .

Всякую формацию считают 0-кратно  $\omega$ -композиционной. При  $n \geq 1$  формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной, если  $\mathfrak{F} = CF_\omega(f)$ , где все значения  $f$  являются  $(n-1)$ -кратно  $\omega$ -композиционными формациями. Формация  $\mathfrak{F}$  называется *тотально  $\omega$ -композиционной* (или  $c_\infty^\omega$ -формацией), если она является  $n$ -кратно  $\omega$ -композиционной для всякого целого неотрицательного  $n$ .

Пусть  $\mathfrak{X}$  — некоторая совокупность групп. Тогда через  $c_\infty^\omega \text{form} \mathfrak{X}$  обозначают пересечение всех  $c_\infty^\omega$ -формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ . Для любых  $c_\infty^\omega$ -формаций  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{H}$  полагают  $\mathfrak{M} \vee_\infty^\omega \mathfrak{H} = c_\infty^\omega \text{form}(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$ . Пусть  $\mathfrak{H}$  — некоторый класс групп. Тогда, если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , но каждая ее собственная  $c_\infty^\omega$ -подформация содержится в  $\mathfrak{H}$ , то  $\mathfrak{F}$  называют минимальной тотально  $\omega$ -композиционной не  $\mathfrak{X}$ -формацией, или  $\mathfrak{H}_\infty^\omega$ -критической формацией.

Если  $\mathfrak{H}$  —  $c_\infty^\omega$ -формация, то  $\mathfrak{H}_\infty^\omega$ -дефектом  $c_\infty^\omega$ -формации  $\mathfrak{F}$  называют длину решетки  $\mathfrak{F}/_\infty \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$   $c_\infty^\omega$ -формаций, заключенных между  $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$  и  $\mathfrak{F}$ , и обозначают через  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_\infty^\omega$ . Если  $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}$ , то  $\mathfrak{N}_\infty^\omega$ -дефект  $c_\infty^\omega$ -формации называют ее нильпотентным  $c_\infty^\omega$ -дефектом.

$c_\infty^\omega$ -Формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $c_\infty^\omega$ -неприводимой, если

$$\mathfrak{F} \neq c_\infty^\omega \text{form}(\cup_{i \in I} \mathfrak{X}_i) = \vee_\infty^\omega (\mathfrak{X}_i | i \in I),$$

где  $\{\mathfrak{X}_i | i \in I\}$  — набор всех собственных  $c_\infty^\omega$ -подформаций из  $\mathfrak{F}$ . В противном случае формацию  $\mathfrak{F}$  называют  $c_\infty^\omega$ -приводимой.

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  —  $c_\infty^\omega$ -формация. Тогда и только тогда нильпотентный  $c_\infty^\omega$ -дефект формации  $\mathfrak{F}$  равен 1, когда  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_\infty^\omega \mathfrak{H}$ , где  $\mathfrak{M}$  — нильпотентная  $c_\infty^\omega$ -формация,  $\mathfrak{H}$  —  $\mathfrak{N}_\infty^\omega$ -критическая формация, при этом всякая нильпотентная  $c_\infty^\omega$ -подформация из  $\mathfrak{F}$  входит в  $\mathfrak{M} \vee_\infty^\omega (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{N})$ ; всякая ненильпотентная  $c_\infty^\omega$ -подформация  $\mathfrak{F}_1$  из  $\mathfrak{F}$  имеет вид  $\mathfrak{H} \vee_\infty^\omega (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{N})$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathfrak{F}$  — приводимая  $c_\infty^\omega$ -формация. Тогда и только тогда  $|\mathfrak{F} : \mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}|_\infty^\omega = 2$ , когда выполняется одно из следующих условий: 1)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{X}_1 \vee_\infty^\omega \mathfrak{X}_2 \vee_\infty^\omega \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{X}_1$  и  $\mathfrak{X}_2$  — различные  $\mathfrak{N}_\infty^\omega$ -критические формации,  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ ; 2)  $\mathfrak{F} = \mathfrak{X} \vee_\infty^\omega \mathfrak{M}$ , где  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ , а  $\mathfrak{X}$  — такая неприводимая  $c_\infty^\omega$ -формация с  $\mathfrak{N}_\infty^\omega$ -дефектом 2, что  $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{X}$ .

## Список литературы

1. Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно  $\mathfrak{L}$ -композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. 2000. Т. 52. № 6. С. 783–797.

### Конечные группы, у которых подгруппы Шмидта обобщенно субнормальны

В. Н. Семенчук, В. Ф. Велесницкий

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

Важнейшей задачей теории конечных групп является задача изучения строения конечных групп, которые не принадлежат некоторому классу групп  $\mathfrak{F}$ , а все собственные подгруппы которых принадлежат  $\mathfrak{F}$ . В настоящее время такие группы называются минимальными не  $\mathfrak{F}$ -группами (критическими группами). Важность изучения критических групп следует из того, что любая конечная группа, не принадлежащая некоторому классу групп  $\mathfrak{F}$ , содержит минимальную не  $\mathfrak{F}$ -группу.

В теории классов конечных групп естественным обобщением понятия субнормальности является понятие  $\mathfrak{F}$ -достижимости.

Подгруппу  $H$  называют  $\mathfrak{F}$ -достижимой, если существует цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq H_m = H,$$

такая, что для любого  $i = 1, 2, \dots, m$  либо подгруппа  $H_i$  нормальна в  $H_{i-1}$ , либо  $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{H}$  — насыщенная наследственная формация,  $\mathfrak{F}$  — наследственная насыщенная формация с решеточным свойством, причем  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ . Если все минимальные не  $\mathfrak{H}$ -подгруппы группы разрешимы и  $\mathfrak{F}$ -достижимы в  $G$ , то  $G/F(G) \in \mathfrak{H}$ .

**Следствие 1.** Если в группе  $G$  все подгруппы Шмидта  $\mathfrak{F}$ -достижимы ( $\mathfrak{F}$  — класс всех  $p$ -разложимых групп), то  $G/F(G)$  —  $p$ -разложима.

Из данной теоремы также следует известный результат В. Н. Семенчука из работы [1].

**Следствие 2.** Если в группе  $G$  все подгруппы Шмидта субнормальны, то  $G$  — метанильпотентна.

### Список литературы

1. Семенчук В. Н. Конечные группы с системой минимальных не  $\mathfrak{F}$ -подгрупп // Подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1981. С. 138–149.

## О выпуклых соединениях многогранников $M_3, M_8, M_{20}$

**А. В. Сенашов**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Найдены все выпуклые соединения многогранников Залгаллера  $M_3, M_8, M_{20}$ . Кроме 8 таких соединений, имеющих в классификационной теореме о выпуклых правильных многогранниках (А. М. Гурин, В. А. Залгаллер, А. В. Тимофеев, 2008-2011, см., например, [1]), получены еще четыре многогранника, некоторые грани которых составлены из правильных многоугольников так, что некоторые вершины этих многоугольников попадают внутрь ребра многогранника. Теорема, описывающая все выпуклые многогранники с такими вершинами, пока не создана. Следующая теорема является ее частью.

**Теорема 1.** Выпуклый многогранник составлен из тел  $M_3, M_8, M_{20}$  тогда и только тогда, когда он является одним из следующих соединений:

$$S_1 = M_3 + M_3, S_2 = M_3 + M_8, S_3 = M_3 + M_{20};$$

$$S_4 = S_2 + M_3, S_5 = S_2 + M'_3, S_6 = S_2 + M''_3, S_7 = S_3 + M_3;$$

$$S_8 = S_4 + M_3, S_9 = M_3 + S_7;$$

$$S_{10} = M_3 + S_6.$$

Штрихи  $M'_3, M''_3$  обозначают, что пирамида  $M_3$  присоединена в  $S_5$  и  $S_6$  не к таким граням, как в  $S_4$ .

## Список литературы

1. Тимофеев А. В. К перечню выпуклых многогранников // Современные проблемы математики и механики. Т. VI. Математика. Вып. 3. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова / под ред. И. Х. Сабитова и В. Н. Чубарикова. М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 155–170.

## О почти слойно конечных группах

**В. И. Сенашов**

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Группа называется *слойно конечной*, если она имеет не более чем конечное число элементов каждого порядка. Это понятие впервые было введено С. Н. Черниковым в работе [1]. Слойно конечные группы исследовали С. Н. Черников, Р. Бэр, Х. Х. Мухамеджан, Я. Д. Половицкий и др. Теория таких групп в развернутом виде изложена в монографиях [2, 3].

*Почти слойно конечная группа* — это группа, являющаяся расширением слойно конечной группы при помощи конечной группы.

Почти слойно конечные группы представляют собой существенно более широкий класс групп, чем слойно конечные группы, в него, в частности, входят все черниковские группы.

Напомним, что группа называется *черниковской*, если она либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

В то же время легко привести пример черниковской группы, которая не является слойно конечной.

Автором получены новые свойства почти слойно конечных групп. В докладе будет приведено много примеров групп, разделяющих почти слойно конечные группы и близкие по свойствам классы групп.

## Список литературы

1. Черников С. Н. К теории бесконечных  $p$ -групп // Докл. АН СССР. 1945. Т. 50. С. 71–72.
2. Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. М.: Наука, 1980. 384 с.

3. Сенашов В. И. Слоино конечные группы. Новосибирск: Наука, 1993. 159 с.

## Базис полилинейной части многообразия $\tilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница

Т. В. Скорая

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

Основное поле  $\Phi$  имеет нулевую характеристику. Все неопределяемые понятия можно найти в книге [1].

Обобщением понятия алгебры Ли является алгебра Лейбница, которая определяется тождеством  $(xy)z \equiv (xz)y + x(yz)$  и, вероятно, впервые появилась в работе [2].

Пусть  $T = \Phi[t]$  — кольцо многочленов от переменной  $t$ . Рассмотрим трехмерную алгебру Гейзенберга  $H$  с базисом  $\{a, b, c\}$  и умножением  $ba = -ab = c$ , произведение остальных базисных элементов равно нулю. Превратим кольцо многочленов  $T$  в правый модуль алгебры  $H$ , в котором базисные элементы алгебры  $H$  действуют справа на многочлен  $f$  из  $T$  следующим образом:  $fa = f'$ ,  $fb = tf$ ,  $fc = f$ , где  $f'$  — частная производная многочлена  $f$  по переменной  $t$ . Рассмотрим прямую сумму векторных пространств  $H$  и  $T$  с умножением по правилу:  $(x + f)(y + g) = xy + fy$ , где  $x, y$  из  $H$ ;  $f, g$  из  $T$ . Обозначим ее символом  $\tilde{H}$ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что  $\tilde{H}$  является алгеброй Лейбница.

Построенная таким образом алгебра  $\tilde{H}$  порождает многообразие  $\tilde{\mathbf{V}}_3$  алгебр Лейбница. Данное многообразие является аналогом хорошо известного многообразия  $\mathbf{V}_3$  алгебр Ли. Ранее, в работе [3], относительно многообразия  $\tilde{\mathbf{V}}_3$  была доказана почти полиномиальность его роста, в работе [4] были определены его кратности и кодлина.

В 1949 г. А. И. Мальцев доказал, что в случае, когда основное поле имеет нулевую характеристику, всякое тождество эквивалентно системе полилинейных тождеств. Поэтому в этом случае вся информация о многообразии содержится в пространстве полилинейных элементов степени  $n$  от переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , так называемых полилинейных компонентов относительно свободной алгебры многообразия.

Пусть  $\mathbf{V}$  — некоторое многообразие линейных алгебр. Пространство его полилинейных элементов будем обозначать  $P_n(\mathbf{V})$ .

**Теорема 1.** *Совокупность элементов вида*

$$\theta(i, i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_m) = x_i(x_{i_1}x_{j_1})(x_{i_2}x_{j_2})\dots(x_{i_m}x_{j_m})x_{k_1}x_{k_2}\dots x_{k_{n-2m-1}},$$

где  $i_s < j_s, s = 1, 2, \dots, m, i_1 < i_2 < \dots < i_m, j_1 < j_2 < \dots < j_m, k_1 < k_2 < \dots < k_{n-2m-1}$ , образует базис пространства  $P_n(\tilde{V}_3)$ .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-33031).

### Список литературы

1. Giambruno A., Zaicev M. Polynomail identities and Asymptotic Methods // American Mathematical Society, Providence, RI: Mathematical Surveys and Monographs. 2005. V. 122. P. 352
2. Блох А. М. Об одном обобщении понятия алгебры Ли // Докл. АН СССР. 1965. Т. 18. № 3. С. 471–473.
3. Mishchenko S. P. Varieties of linear algebras with almost polynomial growth // Polynomial identities and combinatorial methods. Pantelleria, 2001. P. 383–395.
4. Скорая Т. В. Строение полилинейной части многообразия  $\tilde{V}_3$  // Ученые зап. Орлов. гос. ун-та. 2012. Т. 50. № 6. С. 203–2012.

### Свойства эффективности интуиционистской теории множеств, содержащей обобщенный тезис Черча

Д. М. Смелянский

Московский педагогический государственный университет, Москва

В 1973 г. Майхилл в [2] построил обобщение штрих-реализуемости Клини, позволившее ему доказать ряд свойств эффективности для интуиционистской теории множеств типа Цермело-Френкеля. Там же была поставлена задача: распространить полученные результаты на варианты теории множеств, содержащие тезис Черча. В данной работе предлагается решение этой задачи для усиленной версии этого принципа. В качестве основной теории удобно рассматривать

двусортную теорию множеств с арифметикой на первом уровне, в дальнейшем обозначаемую через  $Z$ . Алфавит содержит два сорта переменных: по натуральным числам —  $a, b, c, \dots$ , и по множествам —  $x, y, z, \dots$ , предикатные символы —  $\in, =$ , символы логических связок  $\wedge, \vee, \rightarrow$ , квантор  $\exists, \forall$ , символ  $\perp$  (ложь), индивидуальный символ  $0$ , функциональный символ  $!$ . Полный список аксиом имеется в [3], вместо простого варианта СТ берется принцип ЕСТ:

$foralla(\psi(a) \rightarrow \exists b\varphi(a, b)) \rightarrow \exists e\forall a(\psi(a) \rightarrow \exists b(b = e(a) \wedge \varphi(a, b)))$ , где  $\psi(a)$  — почти негативная формула языка арифметики (т. е. не содержит переменных по множествам). Для решения задачи предлагается следующая модель реализуемости: аналогично Майхиллу в [2] строятся консервативные расширения  $Z_c, Z'_c, Z_c^*$ , далее определяется предикат  $R(e, \varphi)$ :

- 1.1.  $R(e, \bar{n} = \bar{m}) \Leftrightarrow n = m$
- 1.2.  $R(e, \bar{n} \in t) \Leftrightarrow \langle e, \overline{overlinen} \rangle \in t^+$
- 1.3.  $R(e, s \in t) \Leftrightarrow \langle e, s \rangle \in t^+$
2.  $\neg R(e, \perp)$
3.  $R(e, \varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow R(e_1, \varphi) \text{ и } R(e_2, \psi)$
4.  $R(e, \varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (e_1 = 0 \Rightarrow R(e_2, \varphi) \text{ и } Z_c^* \vdash \varphi) \text{ и } (e_1 \neq 0 \Rightarrow R(e_2, \psi) \text{ и } Z_c^* \vdash \psi)$
5.  $R(e, \varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \forall h(R(h, \varphi) \text{ и } Z_c^* \vdash \varphi \Rightarrow !e(h) \text{ и } R(e(h), \psi))$
- 6.1.  $R(e, \forall a\varphi) \Leftrightarrow \forall a(!e(a) \text{ и } R(e(a), \varphi(a)))$
- 6.2.  $R(e, \forall x\varphi) \Leftrightarrow \forall t, h(t^+ext h \Rightarrow R(e(h), \varphi))$
- 7.1.  $R(e, \exists a\varphi) \Leftrightarrow R(e_1, \varphi(e_2)) \text{ и } Z_c^* \vdash \varphi(e^2)$
- 7.2.  $R(e, \exists x\varphi) \Leftrightarrow \exists t(t^+ext e_1 \Rightarrow R(e_2, \varphi(t)) \text{ и } Z_c^* \vdash \varphi(t))$

Рассматриваемая теория корректна относительно данной модели:

**Теорема 1.** Пусть  $\varphi$  — замкнутая формула  $Z$ , причем  $\vdash \varphi$ ; тогда найдется (эффективно по  $\varphi$ ) натуральное число  $e$ , такое, что  $R(e, \varphi)$ .

В качестве следствий теоремы получаем свойства эффективности теории:

**Следствие 1.** Пусть  $\varphi, \psi$  — замкнутые формулы теории  $Z$  и  $Z \vdash \varphi \vee \psi$ . Тогда  $Z \vdash \varphi$  или  $Z \vdash \psi$ .

**Следствие 2.** Пусть  $\varphi, \psi$  — формулы теории  $Z$ , не содержащие свободных переменных по натуральным числам, и  $Z \vdash \varphi \vee \psi$ . Тогда  $Z \vdash \varphi$  или  $Z \vdash \psi$ . (Также  $Z \vdash \forall x(\varphi \vee \psi) \Rightarrow Z \vdash \forall x\varphi$  или  $Z \vdash \forall x\psi$ ).

**Следствие 3.** Если  $\exists x\varphi$  — замкнутая формула теории  $Z$  и  $Z \vdash \exists x\varphi(x)$ , то найдется такой замкнутый терм  $c$ , что  $Z \vdash \varphi(c)$ .

**Следствие 4.** Если  $\forall x_1, \dots, x_n \exists y\varphi$  — замкнутая выводимая формула теории  $Z$ , то найдется формула  $\psi$  теории  $Z$ , свободными которой могут являться только  $x_1, \dots, x_n, y$ , такая, что

$$Z \vdash \forall x_1, \dots, x_n \exists y(\varphi(y) \forall z(z \in y \rightarrow \psi(x_1, \dots, x_n, z))).$$

## Список литературы

1. Friedman H. Some applications of Kleene's methods for intuitionistic Systems. Lect. Notes Math., 1973. № 337.
2. Myhill J. Some properties of intuitionistic Zermelo-Frenkel set theory. Lect. Notes Math., 1973. № 337.
3. Хаханян В. Х. Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с принципами Чёрча и униформизации // Вестн. МГУ. Сер. 1 "Математика и механика". 1980. № 5. С. 3–7.

## О некоторых почти-областях, точно дважды транзитивных группах и $Z^*$ -теореме

А. И. Созутов, Е. Б. Дураков

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Как известно, группа  $T_2(F)$  аффинных преобразований  $\tau_{a,b} : x \rightarrow a + bx$  почти-области  $F$  точно дважды транзитивна на  $F$  и для каждой точно дважды транзитивной группы  $T$  существует почти-область  $F$ , для которой  $T = T_2(F)$  [1, гл. V]. При этом группа  $T_2(F)$  тогда и только тогда обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой, когда почти-область  $F$  является почти-полем [1].

Почти-поле  $F(+, \cdot)$  называется *планарным* (плоским), если для любых элементов  $a, b \in F$  при  $b \neq 1$  уравнение  $a + bx = x$  разрешимо в  $F$ .

Пусть далее  $F = F(+, \cdot)$  — почти-область,  $T = T_2(F)$  и  $T_\alpha$  — стабилизатор точки  $\alpha \in F$ . Получены следующие результаты.

**Теорема 1.** *Если  $\text{Char} \neq 2$  и  $F$  содержит планарное почти-поле  $P(+, \cdot)$ , в мультипликативной группе  $P(\cdot)$  которого есть нормальная в  $F(\cdot)$  подгруппа порядка  $> 2$ , то почти-область  $F$  является почти-полем.*

Теорема 2 обобщает теорему 2 из [2].

**Теорема 2.** *Если  $T$  содержит группу Фробениуса  $V$  с дополнением  $H = V \cap T_\alpha$  и в  $H$  есть нормальная в  $T_\alpha$  подгруппа порядка  $> 2$ , то группа  $T$  обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой.*

Напомним, что неединичные элементы  $a, b$  группы  $G$  называются *обобщенно конечными*, если в  $G$  конечны все подгруппы  $\langle a, b^g \rangle$  ( $g \in G$ ). Теорема 3 обобщает теорему 2 из [3]:

**Теорема 3.** *Если в группе  $T$  есть обобщенно конечный элемент порядка  $> 2$ , то  $F$  является почти-полем простой характеристики.*

Опираясь на свойства групп Адяна  $A(m, n)$  [4], мы построили примеры периодических групп, в которых не выполняется аналог  $Z^*$ -теоремы Глаубермана. Тем самым получен отрицательный ответ на вопрос 11.13 А. В. Боровика из Коуровской тетради [5].

## Список литературы

1. Wähling H. Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen Verlag, 1987.
2. Durakov E. B., Bugaeva E. V., Sheveleva I. V. On Sharply Doubly-Transitive Groups // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2013. Т. 6, С. 28–32.
3. Созутов А. И. О группах Шункова, действующих свободно на абелевых группах // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 1. С. 188–198.
4. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

5. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 6-17-е изд. Новосибирск, 1978–2012 гг.

## Генетические коды некоторых групп с 3-транспозициями

А. И. Созутов, А. А. Кузнецов, В. М. Синицин

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В [1] были найдены системы порождающих 3-транспозиций групп  $\hat{S}p_{2m}(2)$ ,  $O_{2m}^\pm(2)$ , близкие к системам порождающих Коксетера групп Вейля  $W(E_n)$ . Представим эти результаты наглядно:

$$E_n, n \geq 6 : \begin{array}{cccccccccccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \dots \end{array}$$

$\begin{array}{c} 4 \\ \circ \end{array}$ 
 $O^- \hat{S}p O^+ 2^8 O^+ \hat{S}p O^- 2^{12} O^- \hat{S}p O^+$

$$I_n, n \geq 7 : \begin{array}{cccccccccccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \dots \end{array}$$

$\begin{array}{c} 1 & 2 \\ \circ & \circ \\ 6 & 5 \end{array}$ 
 $O^- 2^6 O^- \hat{S}p O^+ 2^{10} O^+ \hat{S}p O^- 2^{14} O^-$

$$J_n, n \geq 9 : \begin{array}{cccccccccccccccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 3 & 2 & 1 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \dots \end{array}$$

$\begin{array}{c} 4 \\ \circ \end{array}$ 
 $O^+ \hat{S}p O^- 2^{10} O^- \hat{S}p O^+ 2^{14} O^+$

Под вершинами графов  $\Gamma_n$  стоят их номера, а над вершинами — типы соответствующих групп, изоморфных группам  $W(\Gamma_n)$  [1]. Если же над вершиной  $n$  стоит число  $2^{n-1}$ , то группа  $W(\Gamma_n)$  обладает нормальной элементарной абелевой 2-подгруппой порядка  $2^{n-1}$ .

Множество порождающих и определяющих соотношений Коксетера, задаваемых графом  $\Gamma_n$ , обозначим через  $S(\Gamma_n)$  и  $R(\Gamma_n)$  соответственно, а группу Коксетера через  $G(\Gamma_n)$ , в частности,  $G(\Gamma_n) = \langle S(\Gamma_n) | R(\Gamma_n) \rangle$ .

Пусть  $r = p_1 + 2p_2 + 3p_3 + 2p_4 + 2p_5 + p_6$  в корневой системе типа  $E_6$  и  $s = 2p_1 + 4p_2 + 6p_3 + 3p_4 + 5p_5 + 4p_6 + 3p_7 + 2p_8$  в корневой системе типа  $E_8$ . Можно считать, что корневая симметрия (отражение)  $w_r$  принадлежит всем группам  $G(E_n), G(I_n), G(J_n)$ , а  $w_s$  — группам  $G(E_n), G(J_n)$ . Обозначим

$$\begin{aligned} X(I_n) &= \langle S(I_n) | R(I_n), (w_r s_7)^2 = 1 \rangle, \\ X(J_n) &= \langle S(J_n) | R(J_n), (w_s s_9)^2 = 1 \rangle, \\ X(E_n) &= \langle S(E_n) | R(E_n), (w_s s_9)^2 = 1 \rangle. \end{aligned}$$

С помощью алгоритма Тодда-Коксетера на компьютере было показано, что группы  $X(E_n)$  для  $9 \leq n \leq 22$  конечны и изоморфны группам  $W(E_n)$ .

Аналогичные расчеты были проведены и для групп  $X(I_n)$ ,  $X(J_n)$ . Результаты этих расчетов позволяют сформулировать следующий

**Вопрос 1.** Верно ли, что все группы  $X(\Gamma_n)$  при  $\Gamma_n \in \{I_n, J_n, E_n\}$  конечны и изоморфны группам  $W(\Gamma_n)$ ?

## Список литературы

1. Созутов А. И., Кузнецов А. А., Синицин В. М. О системах порождающих некоторых групп с 3-транспозициями // Сиб. мат. электрон. изв. Т. 10. С. 285–301.

## О группах с $H$ -фробениусовыми элементами

**А. И. Созутов**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

**А. М. Попов**

Сибирский государственный аэрокосмический университет  
им. академика М. Ф. Решетнёва, Красноярск

Многие исследования В. П. Шункова и его учеников опирались на свойства конечных групп Фробениуса. Признаки непрототы групп с различными системами фробениусовых подгрупп составляют фундамент теории периодических и смешанных групп с условиями конечности более слабыми, чем локальная конечность. Идеи и методы из [1] развиваются в нескольких направлениях, в настоящем докладе коснемся только двух из них. Элемент  $a$  группы  $G$  называется  $H$ -фробениусовым, если  $H$  — собственная подгруппа в  $G$  и все подгруппы вида  $L_g = \langle a, a^g \rangle$ , где  $g \in G \setminus H$ , являются группами Фробениуса с дополнениями, содержащими элемент  $a$  [2]. В [3] получен признак непрототы группы с системой  $F$ -подгрупп, близких по свойствам к группам Фробениуса.

**Теорема 1.** Если  $H$  — собственная подгруппа группы  $G$ ,  $a \in H$ ,  $|a| > 2$  и для каждого  $g \in G \setminus H$  подгруппа  $\langle a, a^g \rangle$  есть  $F$ -группа с дополнением  $\langle a \rangle$ , то  $G = [a, G] \rtimes N_G(\langle a \rangle)$ .

Отметим, что в конечной в  $F$ -группе  $T \rtimes \langle a \rangle$  ядро  $T$  не обязательно быть нильпотентным [3]. Дополнительный множитель  $H_g$  группы Фробениуса вида  $L_g = \langle a, a^g \rangle$  может быть и не циклическим. О разнообразии возникающих в этом случае ситуаций можно составить мнение по результатам главы 5 [1]. Тем не менее, в [4] была доказана

**Теорема 2.** *Если группа  $G$  содержит  $H$ -фробениусовый элемент  $a$  чётного порядка  $> 2$  и  $i$  — инволюция из  $\langle a \rangle$ , то  $G = F \rtimes C_G(i)$  и  $G = FH$ , где  $F$  — периодическая абелева нормальная в  $G$  подгруппа.*

Хорошо известно, что элементы порядка 3 из дополнений групп Фробениуса, как и инволюции, играют особую роль. В настоящее время авторы работают над доказательством такой теоремы.

**Теорема 3.** *Если группа  $G$  содержит  $H$ -фробениусовый элемент  $a$  порядка  $3n$ , то объединение всех ядер фробениусовых подгрупп группы  $G$  с дополнением  $\langle a \rangle$  есть нормальная в  $G$  подгруппа  $F$  и  $G = FH$ .*

## Список литературы

1. Шунков В. П. Об одном признаке простоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, №5. С. 576–603.
2. Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: Изд-во КГТУ, 2004. 210 с.
3. Созутов А. И. Об одном признаке простоты групп // Алгебра и логика. 2012. Т. 51 № 6. С. 682–692.
4. Попов А. М., Созутов А. И. О группах с  $H$ -фробениусовым элементом чётного порядка // Алгебра и логика. 2005. Т. 44. № 1. С. 70–80.

## О локально конечных подгруппах групп Шункова конечного ранга

А. И. Созутов, М. В. Янченко

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В 1978 г. В. П. Шунковым в Коуровской тетради [1] был поставлен вопрос 6.59 о локальной конечности периодической (сопряженно) бипримитивно конечной группы конечного ранга. Под рангом группы здесь понимается максимальный ранг элементарных абелевых подгрупп группы. В настоящее время сопряженно бипримитивно конечные группы называются *группами Шункова*. В [2] доказана следующая

**Теорема 1.** *Группа Шункова ранга 1 с разрешимыми конечными подгруппами обладает локально конечной периодической частью.*

Эта теорема служит основой для дальнейших индуктивных рассуждений. Анонсируем следующую теорему.

**Теорема 2.** *В группе Шункова конечного ранга, содержащей бесконечно много элементов конечного порядка, каждый элемент простого порядка содержится в бесконечной локально конечной подгруппе.*

В частности, для групп конечного ранга получен положительный ответ на вопрос 14.10 А. К. Шлепкина из Коуровской тетради.

### Список литературы

1. Коуровская тетрадь: Нерешенные вопросы теории групп. 6-17-е изд. Новосибирск, 1978–2012 гг.
2. Созутов А. И. О группах Шункова, действующих свободно на абелевых группах // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 1. С. 188–198.

# О $\Omega$ -спутниках $\Omega$ -расслоенных формаций конечных групп

М. М. Сорокина

Брянский государственный университет

им. академика И. Г. Петровского, Брянск

Понятие  $\Omega$ -расслоенной формации конечных групп было введено в рассмотрение В. А. Ведерниковым в 1999 г. (см., например, [1]). Отметим, что далее рассматриваются только конечные группы. Пусть  $\mathfrak{I}$  - класс всех простых групп,  $\Omega$  - непустой подкласс класса  $\mathfrak{I}$ ,  $K(G)$  - класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы  $G$ ,  $\mathfrak{E}_\Omega = (G \in \mathfrak{E} : K(G) \subseteq \Omega)$ ,  $O_\Omega(G) = G_{\mathfrak{E}_\Omega}$  -  $\mathfrak{E}_\Omega$ -радикал группы  $G$ . Пусть  $A \in \mathfrak{I}$ . Тогда  $A' = (A)'$ ,  $\mathfrak{E}_A = \mathfrak{E}_{(A)}$ ,  $O_{A',A}(G) = G_{\mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A}$ . Пусть  $f : \Omega \cup \{\Omega'\} \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  и  $\varphi : \mathfrak{I} \rightarrow \{\text{непустые формации Фиттинга групп}\}$  -  $\Omega F$ -функция и  $FR$ -функция соответственно. Формация  $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi) = (G \in \mathfrak{E} : G/O_\Omega(G) \in f(\Omega') \text{ и } G/G_{\varphi(A)} \in f(A) \text{ для всех } A \in K(G) \cap \Omega)$  называется  $\Omega$ -расслоенной формацией с  $\Omega$ -спутником  $f$  и направлением  $\varphi$  [1]. Формация  $\mathfrak{F} = \Omega F(f, \varphi)$  называется  $\Omega$ -канонической формацией, если  $\varphi = \varphi'_2$ , где  $\varphi'_2(A) = \mathfrak{E}_{A'}\mathfrak{E}_A$  для любой группы  $A \in \mathfrak{I}$  [1].

Следуя [2],  $\Omega$ -спутник  $f$   $\Omega$ -расслоенной формации  $\mathfrak{F}$  назовем полувнутренним, если для любого  $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$  из  $f(A) \neq \mathfrak{E}$  всегда следует, что  $f(A) \subseteq \mathfrak{F}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathfrak{F}$  -  $\Omega$ -каноническая формация. Тогда  $\mathfrak{F}$  обладает максимальным полувнутренним  $\Omega$ -спутником  $f$ , таким, что для любого  $A \in \Omega \cup \{\Omega'\}$  выполняется утверждение:

если  $f(A) \neq \mathfrak{E}$ , то  $f(A) = \mathfrak{F}$  для  $A \in \{\Omega'\}$  и  $f(A) = \mathfrak{E}_A f(A)$  для всех  $A \in \Omega$ .

## Список литературы

1. Vedernikov V. A. Maximal satellites of  $\Omega$ -foliated formations and Fitting classes // Proc. of the Steklov Institute of Math. Suppl. 2001. V. 2. P. 217–233.
2. Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

# **Решение дробных дифференциальных уравнений в задачах акустики фрактально-неоднородных сред**

**В. А. Степаненко, П. П. Турчин**

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В настоящее время вопросы, связанные с флуктуацией упругих свойств фрактальных материалов, являются недостаточно изученными [1]. Методом исследования упругих постоянных являются акустические измерения скоростей упругих волн и последующее решение обратной задачи кристаллоакустики. Для фрактальных сред в этом случае требуется решение волнового уравнения в дробных производных [2].

Решения уравнений в дробных производных, как правило, могут быть получены в виде степенных рядов. В отдельных случаях эти ряды являются хорошо известными спецфункциями математической физики. Возможны различные обобщения волнового уравнения на дробные производные, связанные с фрактальностью среды [3].

В нашем случае получено оригинальное решение волнового уравнения с применением дробных производных Римана-Лиувилля. Данное решение дополняет существующие подходы [3,4] и позволяет выполнить экспериментальное сравнение рассматриваемых методов.

## **Список литературы**

1. Зосимов В. В., Лямшев Л. М. Фракталы в волновых процессах // УФН. 1995. Т. 165. № 4. С. 361–402.
2. Головинский П. А., Золототрубов Д. Ю., Золототрубов Ю. С., Перцев В. Т. Исследование распространения ультразвукового импульса в дисперсной фрактальной среде // ПЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 11. С. 14–18.
3. Mainardi F., Tomirotti M. Transforms and Special functions. Proceedings of International Workshop, Sofia, 1994. P. 171–183.
4. Заславский Г. М. Гамильтонов хаос и фрактальная динамика. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевский институт компьютерных исследований, 2010. 442 с.

# Примитивная нормальность класса проективных полигонов

А. А. Степанова, Г. И. Батурин

Дальневосточный государственный федеральный университет, Владивосток

В [1] изучены примитивно нормальные теории левых  $S$ -полигонов. В частности, доказано, что класс всех левых  $S$ -полигонов примитивно нормален тогда и только тогда, когда  $S$  – линейно упорядоченный моноид. В [2] на языке структуры примитивных эквивалентностей описаны левые  $S$ -полигоны с примитивно нормальной теорией. Моноиды, для которых класс проективных левых  $S$ -полигонов аксиоматизируем, исследованы в [3]. В данной работе изучаются моноиды  $S$ , над которыми класс проективных левых  $S$ -полигонов примитивно нормален.

Напомним некоторые определения. Пусть  $S$  – моноид. Под *левым  $S$ -полигоном* понимается множество, на котором  $S$  действует слева, при этом единица  $S$  действует тождественно. Левый  $S$ -полигон  $P$  *проективен*, если  $P \cong \coprod_{i \in I} Se_i$ , где  $e_i$  – идемпотенты моноида  $S$  ( $i \in I$ ). Класс проективных левых  $S$ -полигонов обозначим через  $\mathcal{P}$ . Аксиоматизируемый класс структур  $K$  языка  $L$  называется *примитивно нормальным*, если теория этого класса примитивно нормальна.

**Теорема 1.** Пусть класс  $\mathcal{P}$  проективных левых  $S$ -полигонов аксиоматизируем. Следующие условия эквивалентны:

- 1) класс  $\mathcal{P}$  примитивно нормален;
- 2) левый  $S$ -полигон  ${}_S S$  проективен;
- 3) на любом примитивном подмножестве  $X$  множества  $S$  любые примитивные эквивалентности  $\alpha$  и  $\beta$ , определенные на этом множестве, перестановочны, т. е.  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ .

Моноид  $S$  называется *моноидом с левым сокращением*, если для любых  $s, t, r \in S$  из равенства  $rs = rt$  следует  $s = t$ .

**Следствие 1.** Если класс проективных левых  $S$ -полигонов  $\mathcal{P}$  аксиоматизируем и  $S$  – моноид с левым сокращением, то класс  $\mathcal{P}$  примитивно нормален.

## Список литературы

1. Степанова А. А. Прimitивно связные и аддитивные теории полигонов // Алгебра и логика. 2006. Т. 45. № 3. С. 300–313.
2. Степанова А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // Алгебра и логика. 2008. Т. 47. № 4. С. 491–508.
3. Степанова А. А. Аксиоматизируемость и полнота некоторых классов  $S$ -полигонов // Алгебра и логика. 1991. Т. 30. № 5. С. 583–594.

## Большие элементарные абелевы унипотентные подгруппы групп лиева типа

Г. С. Сулейманова

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Известно, что вопрос описания больших абелевых подгрупп группы  $G$  лиева типа над конечным полем  $K$  сводится к аналогичному вопросу для унипотентного радикала  $U$  подгруппы Бореля в  $G$ , подобно схеме А. И. Мальцева для простых комплексных алгебр Ли. Для классических типов к середине 80-х годов были найдены множество  $A(U)$  больших абелевых подгрупп в  $U$ , его подмножество  $A_N(U)$  нормальных в  $U$  подгрупп, множество  $A_e(U)$  больших элементарных абелевых подгрупп в  $U$ , а также подгруппы Томпсона  $J(U) = \langle A \mid A \in A(U) \rangle$ ,  $J_e(U) = \langle A \mid A \in A_e(U) \rangle$ . В 1986 г. в обзоре [1] записана проблема (1.6): *Описать множества  $A(U)$ ,  $A_N(U)$ ,  $A_e(U)$  и подгруппы Томпсона  $J(U)$ ,  $J_e(U)$  для оставшихся случаев  $G$ .*

К исследованию проблемы Е. П. Вдовин применял обобщенный метод А. И. Мальцева. Для абелевой подгруппы  $A$  и нильпотентной подгруппы  $N$  конечной простой неабелевой группы  $G$  он доказал [1]:  $|A|^3 < |G|$  при  $G \neq A_1(q)$  и  $|N|^2 < |G|$ . Автор и В. М. Левчук реализуют подход, связанный с предварительным описанием максимальных нормальных абелевых подгрупп в  $U$  [4–6]. Так, в обозначениях [3], доказана

**Теорема 1.** Пусть  $U = UG(K)$  – исключительного типа. Тогда:

- a)  $J(U) = J_e(U) = \Pi_{i=1}^6 T(\alpha_i)$  для типа  $E_8$ ;
- b)  $A(U) = A_N(U) = A_e(U)$  для типа  $E_6$  и  $E_7$ ;
- c)  $J(U) = J_e(U) = U_{\alpha_1}$  в группе  $UF_4(K)$  при  $2K = K$  и в  $U^2E_6(K)$ ;
- d)  $J(U) = J_e(U) = U$  в группе  $UF_4(K)$  при  $2K = 0$ ;
- e)  $J(U) = T(a)$ ,  $J_e(U) = U$  в группе  $U^3D_4(8)$  и  $J(U) = J_e(U) = U$  в группах  $U^3D_4(K)$  при  $|K_\sigma| > 2$  и  $UG_2(K)$  при  $|K| > 2$ ;
- f)  $J(U) \in A_N(U)$ ,  $|A_N(U)| = 1$  и  $J_e(U) = U$  для группы  $UG_2(2)$ ;
- g)  $J(U) = U$ ,  $J_e(U) = U_2$  в группе  $U^2B_2(K)$ ;
- h)  $J(U) = R_{2,-1}(K)U_3$ ,  $J_e(U) = R_{32}(K)U_2$  в группе  $U^2F_4(K)$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00968).

### Список литературы

1. Вдовин Е. П. Максимальные порядки абелевых подгрупп в конечных группах Шевалле // Мат. зам. 2000. Т. 68. Вып. 1. С. 53–76.
2. Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41. № 1 (247). С. 57–96.
3. Левчук В. М. Автоморфизмы унитарных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. 1990. Т. 29. № 2. С. 141–161.
4. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Extremal and maximal normal abelian subgroups of a maximal unipotent subgroup in groups of Lie type // J. Algebra. 2012. V. 349. № 1. P. 98–116.
5. Levchuk V. M., Suleimanova G. S. Thompson subgroups and large abelian unipotent subgroups of Lie-type groups // J. of Siberian Federal University. Math. & Physics. 2013. V. 6. № 1. P. 63–73.
6. Сулейманова Г. С. Большие элементарные абелевы унитарные подгруппы групп лиева типа // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. "Математика". 2013. Т. 6. № 2. С. 70–77.

## О группах подстановок с конечными параметрами рассеивания

Ю. С. Тарасов

Красноярское региональное отделение Международной академии экологии и  
природопользования, Красноярск

В работе [1] для подстановки  $g$  множества целых чисел  $Z$  определен её параметр рассеивания  $\lambda(g)$ . Для каждого  $\alpha \in Z$  введем множества

$$M_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in \mathbb{Z}, \beta \leq \alpha, \beta^g > \alpha\}, \quad L_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in \mathbb{Z}, \beta > \alpha, \beta^g \leq \alpha\}.$$

Полагаем

$$t(g) = \max_{\alpha \in Z} |M_\alpha(g)|, \quad s(g) = \max_{\alpha \in Z} |L_\alpha(g)|, \quad \lambda(g) = \max(t(g), s(g)).$$

Множество  $H = \{g \mid g \in S(Z), \lambda(g) < \infty\}$  образует группу. Далее подстановка  $g$  группы  $S(Z)$  называется равномерной, если  $|M_\alpha(g)| = |L_\alpha(g)| < \infty$  при любом целом  $\alpha$ . Множество  $R$  всех равномерных подстановок является группой [1]. Обозначим  $G = H \cap R$ . Получены два следующих результата.

**Теорема 1.**  $G = H'$ .

**Теорема 2.**  $H = G \ltimes \langle d \rangle$ , где  $d$ -сдвиг,  $\alpha^d = \alpha + 1$  для любого  $\alpha \in Z$ .

### Список литературы

1. Сучков Н. М., Маньков А. А., Тарасов Ю. С. Группы подстановок с конечными параметрами рассеивания // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2012. Т. 5. № 1. С. 116–121.

## Порождающие тройки инволюций групп $SL_6(\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(p)$

И. А. Тимофеев

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Группу  $G$  будем называть  $(2, 2, 2)$ -порожденной ( $(2 \times 2, 2)$ -порожденной), если она порождается тремя инволюциями (соответственно тремя инволюциями, две из которых перестановочны). Далее

$SL_n(\mathbb{Z})$  — специальная линейная группа размерности  $n$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$ .

В  $SL_2(\mathbb{Z})$  одна инволюция, следовательно она не порождается никаким множеством инволюций. М. Тамбурини и П. Цука [1] показали, что группа  $SL_n(\mathbb{Z})$  при  $n \geq 14$  является  $(2 \times 2, 2)$ -порожденной. Я. Н. Нужин [2] доказал, что группа  $PSL_n(\mathbb{Z})$  тогда и только тогда  $(2 \times 2, 2)$ -порождена, когда  $n \geq 5$ . Т. В. Моисееenkova [3] показала, что при  $n = 3, 4$  группа  $SL_n(\mathbb{Z})$  является  $(2, 2, 2)$ -порожденной, но не  $(2 \times 2, 2)$ -порождена.

Из приведенных выше результатов и с учетом, что в [2] порождающие инволюции группы  $PSL_n(\mathbb{Z})$  при  $n \neq 2(2r+1)$  выбирались из  $SL_n(\mathbb{Z})$ , следует, что вопросы о  $(2, 2, 2)$  и  $(2 \times 2, 2)$ -порождаемости исследованы для всех  $SL_n(\mathbb{Z})$ , исключая группы  $SL_6(\mathbb{Z})$  и  $SL_{10}(\mathbb{Z})$ . Автору удалось получить только два следующих результата.

**Теорема 1.** *Группа  $SL_6(\mathbb{Z})$  над кольцом целых чисел  $\mathbb{Z}$  порождается тремя инволюциями.*

**Теорема 2.** *Для любого простого числа  $p$  группа  $SL_{10}(p)$  над полем вычетов  $\mathbb{Z}_p$  порождается тремя инволюциями.*

Теорема 2 свидетельствует в пользу  $(2, 2, 2)$ -порождаемости группы  $SL_{10}(\mathbb{Z})$  в силу гомоморфизма  $SL_{10}(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_{10}(p)$  и того, что гомоморфизм сохраняет свойство  $(2, 2, 2)$ -порождаемости.

## Список литературы

1. Tamburini M. C., Zucca P. Generation of Certain Matrix Groups by Three Involutions, Two of Which Commute // J. of Algebra. 1997. V. 195 № 2. P. 650–661.
2. Нужин Я. Н. О порождаемости группы  $PSL_n(\mathbb{Z})$  тремя инволюциями, две из которых перестановочны // Владикавказ. мат. журн. 2008. Т. 10. Вып. 1. С. 68–74.
3. Моисееenkova Т. В. Порождающие мультиплеты инволюций групп  $SL_n(\mathbb{Z})$  и  $PSL_n(\mathbb{Z})$  // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16. № 3. С. 195–198.

## О произведениях конечных групп из заданных классов

**Т. В. Тихоненко**

Гомельский государственный технический университет

им. П.О. Сухого, Гомель

Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Все обозначения стандартны и соответствуют [1, 2].

Изучение конечных групп, обладающих факторизацией, дает возможность глубже понять строение конечной группы. Определенный интерес представляют группы, факторизуемые подгруппами из заданного класса групп (абелевы, нильпотентные, разрешимые, сверхразрешимые и другие). Например, в работе [3] Л. С. Казарина найдены все композиционные факторы конечной группы, представимой в виде двух разрешимых подгрупп. В. С. Монаховым получен результат о нормальном строении конечных групп, факторизуемых двумя подгруппами Шмидта [4]. В работе [5] автором были найдены композиционные факторы конечных групп, представимых в виде произведения двух сверхразрешимых подгрупп. Все композиционные факторы конечных групп, представимых в виде произведения группы Шмидта и разрешимой группы, были получены автором в работе [6].

Продолжая исследования в данном направлении, получены результаты о строении конечной факторизуемой группы, один из сомножителей которой является группой Шмидта, а второй - сверхразрешимая группа.

Получен следующий результат:

**Теорема 1.** Пусть  $G = AB$  - конечная группа, где  $A$  - подгруппа Шмидта, а подгруппа  $B$  - сверхразрешимая. Тогда любой простой неабелев композиционный фактор группы  $G$  изоморфен  $PSL_2(q)$  для подходящего значения параметра  $q$ .

### Список литературы

1. Huppert B. Endliche Gruppen. Berlin.: Springer-Verlag, 1967.
2. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

3. Kazarin L. S. The product of two solvable subgroups // Comm. Algebra. 1986. V. 14. P. 1001–1066.
4. Монахов В. С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы: сб. науч. ст. Минск, 1975. С. 70–100.
5. Тихоненко Т. В. Факторизации конечных групп сверхразрешимыми и холловыми подгруппами // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 1. С. 53–57.
6. Тихоненко Т. В. О произведении подгруппы Шмидта и разрешимой подгруппы // Теория групп и ее приложения: тез. IX Междунар. шк.-конф. по теории групп, посвященной 90-летию со дня рождения профессора З. И. Боровича, Владикавказ, 9-15 июля 2012. С. 112,113.

## О конечных разрешимых группах с ограничениями на Фиттинговы силовские подгруппы их факторов

**А. А. Трофимук**

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест

Рассматриваются только конечные группы. Нормальным рядом группы  $G$  называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \dots \subseteq G_m = G, \quad (1)$$

в которой подгруппа  $G_i$  нормальна в группе  $G$  для всех  $i = 1, 2, \dots, m$ . Фактор-группы  $G_{i+1}/G_i$  называются факторами нормального ряда [1].

Хорошо известно, что группа, обладающая нормальным рядом с циклическими факторами, является сверхразрешимой, см. [1, VI.8.5]. Кроме того, если силовские подгруппы в факторах циклические, то из теоремы Цассенхауза [1, IV.2.11] вытекает сверхразрешимость группы  $G$ . Поэтому нильпотентная длина группы  $G$  и производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышают 2. Здесь  $\Phi(G)$  — подгруппа Фраттини группы  $G$ .

Бициклической называют группу, факторизуемую двумя циклическими подгруппами. Исследование разрешимых групп, обладающих нормальными рядами, факторы которых имеют бициклические силовские подгруппы, проведено в работе [2].

В работе [3] установлено, что для получения оценки производной длины разрешимой группы достаточно рассматривать силовские подгруппы не всей группы, а только ее подгруппы Фиттинга.

В настоящей заметке исследуются разрешимые группы, обладающие нормальными рядами с бициклическими силовскими подгруппами в подгруппах Фиттинга их факторов. Доказана

**Теорема 1.** *Пусть разрешимая группа  $G$  обладает нормальным рядом, таким, что подгруппы Фиттинга его факторов имеют бициклические силовские подгруппы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Нульпотентная длина группы  $G$  не превышает 4, а производная длина фактор-группы  $G/\Phi(G)$  не превышает 5.*
2.  *$l_2(G) \leq 2$ ,  $l_3(G) \leq 2$  и  $l_p(G) \leq 1$  для всех простых  $p > 3$ .*

Здесь  $l_p(G)$  —  $p$ -длина группы  $G$ .

## Список литературы

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967. 793 p.
2. Monakhov V. S., Trofimuk A. A. On a finite group having a normal series whose factors have bicyclic Sylow subgroups // Communications in algebra. 2011. 39(9). P. 3178–3186.
3. Трофимук А. А. Производная длина конечных групп с ограничениями на силовские подгруппы // Мат. заметки. 2010. Т. 87, № 2. С. 287—293.

## О периодических группах с нильпотентными конечными подгруппами

Г. А. Троякова

Тувинский государственный университет, Кызыл

Пусть в периодической группе  $G$  для любой ее конечной подгруппы  $K$  имеет место условие:  $(\alpha)$  для любых элементов  $a$  и  $b$  различных простых порядков  $p$  и  $q$  из фактор-группы  $N_G(K)/K$  подгруппы  $\langle b^{-1}ab, a \rangle$ ,  $\langle a^{-1}ba, b \rangle$  конечны [1].

**Теорема 1.** *Если в периодической группе  $G$  с условием  $(\alpha)$  любая конечная подгруппа нильпотентна, то  $G/Z(G)$  разлагается в прямое произведение силовских подгрупп.*

Ранее [1] эта теорема была доказана только для случая без инволюций.

Отметим, что существует нерасщепляемое расширение конечной группы составного порядка  $n$  с помощью  $p$ -группы Новикова-Адяна ( $p$  не делит  $n$ ) [2]. Такая группа удовлетворяет условию  $(\alpha)$ , и ее фактор-группа  $G/Z(G)$  разлагается в прямое произведение силовских подгрупп.

### Список литературы

1. Троякова Г. А. К теории черниковских групп. Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: АН Украины, Ин-т математики, 1994. С. 290-311.
2. Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975. 336 с.

## Предпроективные и прединъективные объекты категории $K$ -разложимых локальных групп

В. Х. Фарукшин

Московский педагогический государственный университет, Москва

Пусть  $\mathcal{L}_p(K)$  — категория  $K$ -разложимых  $p$ -локальных абелевых групп без кручения конечного  $p$ -ранга с сервантными квазигомоморфизмами в качестве морфизмов,  $\mathcal{J}_p(K)$  — полная подкатегория

неразложимых вполне редуцированных групп, где подполе  $K$  поля  $p$ -адических чисел является конечным расширением Галуа поля рациональных чисел,  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  — группа Галуа поля  $K$ ,  $K^H$  — неподвижное поле подгруппы  $H \subset \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ .

Предпроективным (прединъективным) объектом категории  $\mathcal{I}_p(K)$  назовем сервантно проективный (инъективный) объект любой полной подкатегории.

**Теорема 1.** *Для каждого прединъективного объекта  $B$  категории  $\mathcal{I}_p(K)$  существует последовательность прединъективных объектов  $B_1, \dots, B_m$ , таких, что  $B = B_1 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_m$ , где отображения являются сервантными мономорфизмами и  $B_m$  — сервантно инъективный в  $\mathcal{L}_p(K)$ . Каждый прединъективный объект  $B$  в категории  $\mathcal{I}_p(K)$  имеет вид  $B = K^H \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p$ , где  $\widehat{\mathbb{Z}}_p$  — кольцо целых  $p$ -адических чисел,  $H$  — подгруппа  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ .*

**Теорема 2.** *Для каждого предпроективного объекта  $A$  категории  $\mathcal{I}_p(K)$  существует последовательность предпроективных объектов  $A_1, \dots, A_k$ , таких, что  $A_k \rightarrow A_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_1 = A$ , где отображения являются эпиморфизмами и  $A_k$  — сервантно проективный в  $\mathcal{L}_p(K)$ . Каждый предпроективный объект  $A$  в категории  $\mathcal{I}_p(K)$  имеет вид  $A = (K^H \cap \widehat{\mathbb{Z}}_p)^*$ , где  $H$  — подгруппа  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  и  $*$  означает двойственность Арнольда в категории  $\mathcal{L}_p(K)$ .*

Работа выполнена при поддержке ФЦП на 2009–2013 гг. Государственный контракт № 14.В37.21.0363.

## О группах Шункова, насыщенных простыми трёхмерными унитарными группами

**А. Н. Филиппова, К. А. Филиппов**

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск

*Группа  $G$  насыщена группами из множества групп  $\mathfrak{M}$ , если любая конечная подгруппа из  $G$  содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из  $\mathfrak{M}$  [1].*

Пусть  $\mathfrak{N}$  — множество всех простых трёхмерных унитарных групп  $U_3(q)$  над конечными полями.

В работе [2] доказано, что периодическая группа Шункова, насыщенная группами из  $\mathfrak{N}$  локально конечна и изоморфна  $U_3(Q)$  для некоторого локально конечного поля  $Q$ .

В данной работе доказана

**Теорема.** *Группа Шункова  $G$ , насыщенная группами из  $\mathfrak{N}$ , обладает периодической частью  $T(G)$ , которая локально конечна и изоморфна  $U_3(Q)$  для некоторого локально конечного поля  $Q$ .*

### Список литературы

1. Шлёпкин А. К. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Третья международн. конф. по алгебре. 23-28 авг.: сб. тез. Красноярск, 1993.
2. Филиппов К. А. О периодических группах Шункова, насыщенных простыми трёхмерными унитарными группами // Вестн. СибГАУ. 2012. Т. 42. № 2. С. 78–80.

### Об одном подходе к оценке сложности формул узкого исчисления предикатов

**В. А. Филипповский**

Самарская государственная областная академия, Самара

В настоящей работе содержатся результаты исследований одного подхода к оценке сложности формул исчисления предикатов первого порядка, основанного на методе таблиц истинности. Сложность формулы при этом равна общему количеству вычислений логических функций для заполнения таблицы истинности соответствующей формулы.

Здесь были приняты несколько ограничений: 1) рассматривались только конечные предметные области интерпретации формул исчисления предикатов первого порядка (для бесконечных областей метод таблиц истинности не применим); 2) рассматривались множества формул с ровно одной формулой (этот подход легко распространяется на случаи множеств формул большей мощности); 3) рассматривался так называемый метод полных таблиц истинности. Это означает, что таблица истинности для данной формулы строится всегда полностью.

Самым простым и очевидным является применение этого подхода к оценке сложности формул пропозиционального исчисления. Пусть  $\phi$  – произвольная формула исчисления высказываний;  $a$  – число пропозициональных связок в формуле;  $n$  – число попарно различных пропозициональных букв в формуле. Тогда сложность формулы  $\phi$  равна:

$$C(\phi) = a \cdot 2^n.$$

Применение этого метода для формул узкого исчисления предикатов требует некоторых усложнений. Любая формула будет рассматриваться как состоящая из подформул двух типов: 1-й тип – подформулы, главной операцией которых является операция квантификации; 2-й тип – остальные подформулы. Пусть  $\phi$  – произвольная формула предикатов первого порядка;  $n$  – число попарно различных пропозициональных букв в формуле (нульместных предикатов);  $r$  – число попарно различных ненульместных предикатов;  $f$  – число попарно различных свободных переменных, входящих в формулу;  $d$  – мощность рассматриваемой предметной области;  $a_\mu$  – число пропозициональных связок в формуле  $\phi$  или её подформуле 1-го типа (индекс  $\mu$  может быть конкретизирован двумя способами:  $a_\phi$  – число пропозициональных связок в формуле  $\phi$ , не входящих в подформулы 1-го типа, либо  $a_q$  – число пропозициональных связок в  $q$ -й подформуле 1-го типа формулы  $\phi$ );  $p_\mu$  – множество пар, первый член которых – предикаторы элементарных формул с непустым перечнем параметров, содержащихся в формуле  $\phi$  или её подформуле 1-го типа, второй – число параметров данного предиката (индекс  $\mu$  может быть конкретизирован двумя способами:  $p_\phi$  – множество пар (предикатор и число параметров данного предиката), содержащиеся в формуле  $\phi$  попарно различных элементарных формул с непустым перечнем параметров;  $p_q$  – массив таких же пар для всех, *необязательно* попарно различных, элементарных формул с непустым перечнем параметров, содержащихся в  $q$ -й подформуле 1-го типа формулы  $\phi$ );  $q$  – число подформул 1-го типа формулы  $\phi$  без учёта вложенностей;  $i$  – уровень вложенности операции квантификации в подформуле 1-го типа формулы  $\phi$ ;  $\max(i)$  – максимальный уровень вложенности операции квантификации в подформуле 1-го типа формулы  $\phi$ ;  $j$  – порядок подформулы  $i$ -го уровня вложенности

операции квантификации в подформуле 1-го типа;  $max(i, j)$  – число подформул  $i$ -го уровня вложенности операции квантификации в подформуле 1-го типа;  $k_{i,j}$  – число параметров для  $j$ -й подформулы  $i$ -го уровня вложенности операции квантификации в подформуле 1-го типа;  $\omega$  – список связанных переменных;  $b$  – число вычислений логических функций для данного набора значений параметров формулы  $\phi$ .

Тогда сложность формулы исчисления предикатов первого порядка может быть найдена по следующему алгоритму:

1. Полагаем  $r, i, j = 0, a, n = 0, p, \omega = \emptyset$ . Просматриваем формулу слева направо и при этом осуществляем следующие действия.

2. Если встречается кванторный префикс по произвольной индивидуальной переменной  $x$ , то:

2.1. Инкрементируем  $i$  и  $j$ , полагаем  $k_{i,j} = 1$ , добавляем индивидуальную переменную  $x$  в список  $\omega$ :  $\omega = \omega[i] = x$ . Просматриваем подкванторное выражение слева направо и осуществляем следующие действия:

2.1.1. Если встречается пропозициональная связка, инкрементируем  $k_{i,j}$ .

2.1.2. Если встречается элементарная формула исчисления предикатов вида  $P(x_1, \dots, x_n)$ , то добавляем её к множествам  $p_\phi$  и  $p_q$ , переменные  $(x_1, \dots, x_n) \setminus \omega$  добавляем к множеству  $f$ , инкрементируем  $k_{i,j}$ .

2.1.3. Если встречается пропозициональная буква, то инкрементируем  $n$ .

2.2. Если подкванторное выражение заканчивается, то декрементируем  $i$ , удаляем  $i$ -ю связанную переменную:  $\omega \setminus \omega[i]$ , при этом:

2.2.1. Если следующий знак после закрывающей скобки подкванторного выражения не является закрывающей скобкой, то:

2.2.1.1. Если имеет место одно из условий подпункта 2.1.1 или 2.1.2 настоящего алгоритма, то инкрементируем только  $k_{i,j}$ .

2.2.1.2. Если имеет место условие из пункта 2 настоящего алгоритма, то действуем согласно подпункту 2.2.2.2, (единственное: в подпункте 2.1 инкрементируем только  $j$ , а  $i$  оставляем прежним).

2.2.2. Если следующий знак после закрывающей скобки подкванторного выражения является закрывающей скобкой, то декременти-

руем  $i$ , удаляем  $i$ -ю связанную переменную:  $\omega \setminus \omega[i]$ .

2.3. Если достигнут конец всего подкванторного выражения, вычисляем сумму:

$$\sum_{i=1}^{\max(i)} \sum_{j=1}^{\max(i,j)} d^{i-1} (k_{i,j}d - 1)$$

и прибавляем результат к  $b$ .

2.4. Обнуляем  $i$  и  $j$ :  $i, j = 0$ .

3. Если встречается элементарная формула исчисления предикатов вида  $P(x_1, \dots, x_n)$ , то добавляем пару  $\langle P, n \rangle$  к множеству  $p_\phi$ , переменные  $x_1, \dots, x_n$  добавляем к множеству  $f$ , инкрементируем  $b$ .

4. Если встречается пропозициональная связка, инкрементируем  $b$ .

5. Если встречается пропозициональная буква, то инкрементируем  $n$ .

6. Если достигнут конец всей формулы, то определяем  $r$  как мощность множества  $p_\phi$ :

$$r = |p_\phi|.$$

и числа  $n_1, \dots, n_r$ , которые являются вторыми элементами пар вида  $\langle P, n \rangle$  множества  $p_\phi$ .

7. Сложность формулы  $\phi$  равна:

$$C(\phi) = b \cdot d^f \cdot 2^{n+d(n_1, \dots, n_r)}.$$

## Свойство Хаусона для убывающих HNN-расширений конечнопорожденных абелевых групп

Д. Г. Храмцов

Институт математики СО РАН, Новосибирск

Группа  $G$  обладает свойством Хаусона, если пересечение любых двух её конечно порождённых подгрупп тоже является конечно порождённой группой. Данное свойство впервые было рассмотрено в работе Хаусона [1], где оно было доказано для любой свободной группы. Далее Баумслаг [2] доказал, что свободное произведение двух групп со свойством Хаусона тоже будет группой со свойством Хаусона. С другой стороны, Молдаванский [3] доказал, что прямое

произведение двух свободных групп, а Бруннер и Бернс [4] — что бесконечные циклические расширения свободных групп, не обладают свойством Хаусона.

Дальнейшие примеры Каповича и Безверхней групп со свойством Хаусона сводятся к следующей конструкции. Убывающим HNN-расширением группы  $G$  относительно эндоморфизма  $\phi$  называется группа  $G(\phi) = (G, t; t^{-1}gt = \phi(g), g \in G)$ , порожденная порождающими элементами  $G$  и проходной буквой  $t$ , и определяемая соотношениями  $G$  и всеми соотношениями  $t^{-1}gt = \phi(g)$ , где  $g$  пробегает всю  $G$ . Молдаванский [5] показал, что, если подгруппа  $G\phi$  выделяется свободным сомножителем в некоторой подгруппе из  $G$ , то  $G(\phi)$  не обладает свойством Хаусона. Там же он показал, что, если  $G$  — свободная конечно порожденная абелева группа и  $\phi$  — мономорфизм, матрица которого в некоторой свободной базе  $G$  имеет клеточно-диагональную форму, в которой определители хотя бы двух клеток отличны от плюс-минус единицы, то  $G(\phi)$  не обладает свойством Хаусона. В развитие данной темы автором настоящего сообщения доказана

**Теорема 1.** *Убывающее HNN-расширение  $G(\phi)$  свободной конечно порожденной абелевой группы  $G$  ранга  $n$  относительно мономорфизма  $\phi$  обладает свойством Хаусона тогда и только тогда, когда клеточно-диагональная форма  $\phi$  в подходящей свободной базе  $G(\phi)$  не имеет клеток размера меньше  $n$  с определителем, отличным от плюс-минус единицы.*

## Список литературы

1. Howson A. G. On the intersection of finitely generated free groups // J. London Math. Soc. 1954. V. 29. P. 428–434.
2. Baumslag B. Intersections of finitely generated subgroups in free products // J. London Math. Soc. 1966. V. 41. P. 673–679.
3. Молдаванский Д. И. О пересечении конечно порождённых подгрупп // Сиб. мат. журн. 1968. V. 9. P. 1422–1426.
4. Бруннер Р., Бёрнс А. Две заметки о свойстве Хаусона для групп // Алгебра и логика 1978. V. 18. № 5. P. 512–522.

5. Moldavanskii D. I. On the Howson property of descending HNN-extensions of groups // arXiv:1208.3075v1.

## О существовании некоторых серий реберно симметричных дистанционно регулярных накрытий клик с $\lambda = \mu$

**Л. Ю. Циовкина**

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Известно, что антиподальный дистанционно регулярный граф диаметра 3 имеет массив пересечений  $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$  и является  $r$ -накрытием  $(k+1)$ -клики. Положим  $\lambda = k-1-\mu(r-1)$ . Далее, граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер). В [1] выделены три новые допустимые бесконечные серии реберно симметричных антиподальных дистанционно регулярных графов диаметра 3 с  $\lambda = \mu$ , отвечающие группам  $Sz(q), U_3(q), {}^2G_2(q)$ . Вопрос существования графов из этих серий является открытым в общем случае.

В данной работе доказывается существование серии графов для групп  $Sz(q)$ , где  $q = 2^{2a+1} > 2$ , в случае, когда  $r = q-1$  — простое число.

Пусть даны неинвариантная подгруппа  $H$  группы  $G$  и элемент  $g \in G$ . Через  $\Gamma = \Gamma(G, H, HgH)$  обозначим граф со множеством вершин  $V(G, H) = \{Hx \mid x \in G\}$  и множеством ребер  $E(G, H, g) = \{\{Hx, Hy\} \mid xy^{-1} \in HgH\}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $G = Sz(q)$ ,  $q-1 = r$  — простое число,  $S \in Syl_2(G)$ ,  $g \notin S$  — некоторая инволюция из  $G$  и  $\Gamma = \Gamma(G, S, SgS)$ . Тогда  $\Gamma$  — реберно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений  $\{r\mu+1, \mu(r-1), 1; 1, \mu, r\mu+1\}$ , где  $\mu = (|S|-1)/r$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00012), РФФИ - ГФЕН Китая (проект 12-01-91155), программы отделения математических наук РАН (проект 12-Т-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-С-1-1018) и с НАН Беларуси (проект 12-С-1-1009).

## Список литературы

1. Махнев А. А., Падучих Д. В., Циовкина Л. Ю. Реберно-симметричные дистанционно-регулярные накрытия клик с  $\lambda = \mu$  // Докл. РАН. 2013. Т. 448. № 1. С. 22–26.

## К категорному определению иерархических структур

**Г. В. Чернышев**

Институт информатики и проблем  
регионального управления КБНЦ РАН, Нальчик

В основу теоретической базы формализованного описания иерархических структур положим категорный подход [1]. В [2] определена категория путей  $\mathbb{C}_R$ , включающая:  $O_R = \{v_1, v_2, \dots\}$  – класс объектов с выделенным объектом  $v_R$ ;  $M_R$  – класс морфизмов между объектами из  $O_R$  вида  $M_R(v_g, v_k) = \langle v_g, v_h, \dots, v_k \rangle$  со свойством  $|M_R(v_i, v_j)| = 1, \forall v_i, v_j \in O_R$ ; для каждой упорядоченной тройки объектов  $(v_a, v_b, v_c)$  композицию морфизмов

$$\begin{aligned} M_R(v_b, v_c) \circ M_R(v_a, v_b) &= \langle v_b, \dots, v_c \rangle \circ \langle v_a, \dots, v_b \rangle = \\ &= \langle v_a, \dots, v_b, \dots, v_c \rangle = M_R(v_a, v_c); \end{aligned}$$

единичные морфизмы (единицы) в форме

$$M_R(v_i, v_i) = \langle v_i, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}, v_R, v_{i_k}, \dots, v_{i_1}, v_i \rangle \equiv 1_{v_i}. \quad (3)$$

Единица объекта  $v_R$  есть  $1_{v_R} = \langle v_R \rangle$ .

Тогда, в соответствии с (1),  $1_{v_i} = M_R(v_i, v_{i_1}) \circ 1_{v_{i_1}} \circ M_R(v_{i_1}, v_i)$ . Будем называть единицу  $1_{v_{i_1}}$  *собственной подъединицей* (или *делителем*) единицы  $1_{v_i}$  и записывать  $1_{v_{i_1}} \subset 1_{v_i}$  (*вложение*). Единица называется *терминальной*, если она не является делителем никакой другой единицы. Верны следующие утверждения:

- Для любой единицы вида (1) вложение  $1_{v_{i_k}} \subset \dots \subset 1_{v_{i_1}} \subset 1_{v_i}$  единственно.
- Для любой совокупности единиц категории  $\mathbb{C}_R$  существует общий делитель.

— Множество всех терминальных единиц категории  $\mathbb{C}_P$  составляет ее базис.

Наибольшим общим делителем единиц  $1_a$  и  $1_b$  назовем тот их общий делитель, который не является делителем никакого другого их общего делителя. Проекциями единицы  $1_v = \langle v, \dots, v_R, \dots, v \rangle$  называются  $\text{pr}_1 1_v \equiv \langle v, \dots, v_R \rangle$  и  $\text{pr}_2 1_v \equiv \langle v_R, \dots, v \rangle$ . Если  $1_b \subset 1_a$ , то разностью единиц  $1_a$  и  $1_b$  назовем  $1_a \ominus 1_b = M_P(v_a, v_b) \circ M_P(v_b, v_a)$ .

**Теорема 1.** Если  $1_v$  – наибольший общий делитель для произвольных единиц  $1_a$  и  $1_b$  категории  $\mathbb{C}_P$ , то  $M_P(a, b) = \text{pr}_1(1_a \ominus 1_v) \circ \text{pr}_2(1_b \ominus 1_v)$ .

Интерпретация некоторых введенных понятий на иерархических структурах:  $O_P$  – класс вершин;  $v_R$  – корень дерева;  $M_P$  – класс путей между вершинами; композиция морфизмов – маршрут в дереве; терминальные единицы – висячие вершины дерева. Теорема задает способ "вычисления" кратчайшего пути между произвольными вершинами дерева.

## Список литературы

1. Маклейн С. Категории для работающего математика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 352 с.
2. Чернышев Г. В. Принципы построения инструментальной системы запросов над иерархическими структурами // Изв. КБНЦ РАН. 2012. Т. 50. № 6. С. 42–49.

## Абелевы группы с инвариантными мономорфизмами

А. Р. Чехлов

Томский государственный университет, Томск

Через  $E(A)$  обозначается кольцо эндоморфизмов группы  $A$ ,  $o(a)$  – порядок элемента  $a \in A$ ,  $Z_n$  – циклическая группа порядка  $n$ ,  $Z_{p^\infty}$  – квазициклическая  $p$ -группа. Напомним, что кольцо называется *нормальным*, если центральны все его идемпотенты.

Рассматриваются группы  $A$ , мономорфизмы которых инвариантны слева (соответственно справа), т. е. для любых мономорфизмов  $\alpha, \beta$  группы  $A$  найдется ее мономорфизм  $\gamma$  со свойством  $\alpha\beta =$

$\gamma\alpha$  (соответственно  $\alpha\beta = \beta\gamma$ ). Отметим, что автоморфизмы любой группы инвариантны как справа, так и слева. Следовательно, к рассматриваемому классу групп относятся все конечные группы.

**Теорема 1.** Пусть  $A$  — группа с перестановочными мономорфизмами. Тогда

- 1) если  $A$  не имеет прямых слагаемых, изоморфных группе  $Z_{2^\infty} \oplus Z_2$ , то кольцо  $E(A)$  является нормальным;
- 2) если  $A$  содержит прямое слагаемое  $G$ , изоморфное группе  $Z_{2^\infty} \oplus Z_2$ , то дополнительное прямое слагаемое к  $G$  в группе  $A$  вполне инвариантно в  $A$  и является периодической группой с коммутативным кольцом эндоморфизмов.

**Теорема 2.** Для делимой группы  $D$  эквивалентны следующие условия:

- а) ее мономорфизмы инвариантны справа;
- б) любой ее мономорфизм является автоморфизмом;
- в) часть без кручения группы  $D$ , а также каждая ее  $p$ -компонента имеют конечный ранг.

**Теорема 3.** Мономорфизмы каждой делимой группы инвариантны слева.

Изучение нередуцированных групп, мономорфизмы которых инвариантны слева или справа, сведено к изучению редуцированных групп с соответствующим свойством.

**Теорема 4.** Если  $A$  — редуцированная группа без кручения с инвариантными слева или справа мономорфизмами, то кольцо  $E(A)$  является нормальным.

**Теорема 5.** Пусть  $A$  — редуцированная  $p$ -группа, являющаяся прямой суммой циклических групп. Тогда мономорфизмы группы  $A$  инвариантны слева тогда и только тогда, когда либо  $A$  — конечная группа, либо имеет вид  $A = B \oplus G \oplus F$ , где  $B = \langle b \rangle$  — циклическая группа,  $G$  — бесконечная прямая сумма циклических групп одного и того же порядка  $p^r$  и, если  $B \neq 0$ , то  $p^r > o(b)$ , а  $F = 0$  или  $F = \bigoplus_{i=1}^n \langle x_i \rangle$  — такая конечная группа, что  $p^r < o(x_i)$  для каждого  $i = 1, \dots, n$ .

**Теорема 6.** Пусть  $A = T \oplus R$  — редуцированная расщепляющаяся группа, где  $T$  — периодическая ее часть, а  $R$  — часть без кручения. Тогда

1) группа  $A$  обладает свойством левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладают группы  $T$  и  $R$ , причем подгруппа  $R$  вполне инвариантна в  $A$ ;

2) если  $T$  — конечная группа, то группа  $A$  обладает свойством правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда соответствующим свойством обладает группа  $R$ .

В следующем результате через  $Z$  обозначается аддитивная группа целых чисел.

**Теорема 7.** Пусть  $A$  — прямая сумма циклических групп. Группа  $A$  обладает свойством:

1) левой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда либо  $A$  — периодическая группа, каждая  $p$ -компонента которой является группой, рассматриваемой в теореме 5, либо  $A \cong Z$ ;

2) правой инвариантности мономорфизмов тогда и только тогда, когда  $A = B \oplus R$ , где  $B$  — периодическая группа, каждая  $p$ -компонента которой является конечной, а  $R = 0$  или  $R \cong Z$ .

Изучались также группы с инвариантными мономорфизмами, сохраняющими высоты элементов.

Работа выполнена при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009–2013 гг., № 14. В 37.21.0354 и частично в рамках темы 2.3684.2011 Томского государственного университета.

**Алгебраические конструкции, возникающие  
при построении решений с функциональным произволом  
дифференциальных уравнений в частных производных**

**Ю. В. Шанько**

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с тремя независимыми переменными  $x, y, z$ :

$$L_2 u = 0, \quad (4)$$

здесь  $L_2$  — оператор с неразложимым главным символом. Ищем функции  $q(x, y, z)$ ,  $u_i(x, y, z)$ , такие, что

$$u = \sum_{i=0}^n u_i \Phi^{(i)}(q) \quad (5)$$

будет решением (4) при произвольной бесконечно дифференцируемой функции  $\Phi$ .

Подстановка представления (5) в уравнение (4) дает нам некоторое нелинейное уравнение первого порядка на  $q$  (конкретный вид которого нам сейчас не важен) и систему уравнений

$$\begin{aligned} L_2 u_0 &= 0, \\ L_2 u_i + L_1 u_{i-1} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ L_1 u_n &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где оператор первого порядка  $L_1$  определяется по  $q$  и  $L_2$ . Считая функцию  $q$  заданной, потребуем дополнительно, чтобы переопределенная линейная система (6) при каждом  $n$  имела наибольший из возможных произвол в решении. Из этого требования вытекает, что в некоммутативном кольце дифференциальных операторов  $\mathbf{F}[D_x, D_y, D_z]$  должны существовать последовательности операторов  $\{L_1^n\}$  и  $\{L_2^n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  соответственно первого и второго порядка, такие, что  $L_1^0 = L_1$ ,  $L_2^0 = L_2$  и для любого  $n$  у операторов  $L_1^n$  и  $L_2^n$  существует левое наименьшее общее кратное

$$\text{LCM}(L_1^n, L_2^n) = L_2^{n+1} L_1^n = L_1^{n+1} L_2^n. \quad (7)$$

Показано, что если условие (7) выполнено для  $n = 0, 1, 2$ , то можно построить операторы  $L_1^n$  и  $L_2^n$ ,  $n = 4, 5, 6, \dots$  такие, что

(7) будет выполняться и для всех остальных  $n$ . В этом случае при любом  $n$  для уравнения (4) будут существовать решения вида (5) с произволом в  $2(n+1)$  функцию одной переменной.

## Одно необходимое условие конечности кодлины многообразия алгебр Лейбница

А. В. Швецова

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

Характеристику основного поля будем предполагать равной нулю. Алгебра Лейбница определяется как неассоциативная алгебра с билинейным произведением, в которой выполняется тождество Лейбница

$$(xy)z \equiv (xz)y + x(yz).$$

Класс алгебр Лейбница является естественным расширением класса алгебр Ли и состоит из алгебр, в которых умножение справа на фиксированный элемент является дифференцированием алгебры. Напомним, что  $\widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}$  — это многообразие алгебр Лейбница, которое определяется тождеством

$$(x_1x_2)(x_3x_4)\dots(x_{2s+1}x_{2s+2}) \equiv 0.$$

В работе [1] было получено необходимое условие конечности кодлины многообразия алгебр Ли, в частности найден пример многообразия  $\mathbf{U}_2$  с почти конечной кодлиной. В пункте 3.2 диссертации [2] был найден пример многообразия  $\widetilde{\mathbf{U}_2}$  алгебр Лейбница с почти конечной кодлиной. Сформулируем полученный результат для многообразия алгебр Лейбница.

**Теорема 1.** *Если  $\mathbf{V}$  — многообразие конечной кодлины алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики, тогда существует такое натуральное число  $s$ , что выполняется условие*

$$\mathbf{U}_2, \widetilde{\mathbf{U}_2} \not\subset \mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_s\mathbf{A}}.$$

**Следствие 1.** *Если  $\mathbf{V}$  — многообразие конечной кодлины алгебр Лейбница над полем нулевой характеристики, тогда  $\mathbf{V}$  имеет полиномиальный рост.*

## Список литературы

1. Ханина И. Р. Необходимое условие конечности кодлины многообразий алгебр Ли в случае поля нулевой характеристики // Фундамент. и приклад. математика. 2000. № 2. С. 607–616.
2. Рацеев С. М. Структура и тождества некоторых алгебр лиевского типа: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ульяновск, 2006. 101 с.

## Тернарные дифференцирования простых йордановых супералгебр с полупростой четной частью

А. И. Шестаков

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Тернарные дифференцирования, а также связанные с ними обобщенные дифференцирования изучались в различных классах алгебр (см., например, [1–6]). В данной работе описываются обобщенные и тернарные дифференцирования конечномерных простых йордановых супералгебр с полупростой четной частью.

Пусть  $A$  — супералгебра над полем  $\Phi$ , т. е.  $A = A_0 + A_1$  —  $\mathbb{Z}_2$ -градуированная  $\Phi$ -алгебра.

Тройка  $(D, F, G)$  однородных линейных отображений  $D, F, G \in \text{End}(A)$  называется *тернарным дифференцированием* супералгебры  $A$ , если для любых  $x, y \in A$  выполняется равенство

$$D(xy) = F(x)y + (-1)^{\deg(x)\deg(G)}xG(y). \quad (8)$$

Первая компонента  $D$  тернарного дифференцирования  $(D, F, G)$  называется также *обобщенным дифференцированием*. Понятие тернарного/обобщенного дифференцирования обобщает обычные дифференцирования при  $D = F = G$ , а также  $\delta$ -дифференцирования при  $F = G = \delta D$ ,  $\delta \in \Phi$  (см., например, [7–9]).

Заметим, что тройки отображений  $(D, F, G)$  следующего вида, очевидно, являются тернарными дифференцированиями в любой супералгебре:

а) в четном случае (т. е.  $\deg D = \deg F = \deg G = 0$ )

$$(D, F, G) = (\phi + \psi + D^0, \phi + D^0, \psi + D^0), \quad (9)$$

где  $\phi, \psi$  — любые элементы центроида супералгебры  $A$ , а  $D^0$  — любое обычное четное дифференцирование в  $A$ ;

б) в нечетном случае ( $\deg D = \deg F = \deg G = 1$ ),

$$(D, F, G) = (D^1, D^1, D^1), \quad (10)$$

где  $D^1$  — любое обычное нечетное супердифференцирование в  $A$ .

Назовем приведенные выше тернарные дифференцирования вида (9), (10) *стандартными*. Соответственно, определяются и стандартные обобщенные дифференцирования как главные компоненты стандартных тернарных дифференцирований.

**Теорема 1.** Пусть  $J = J_0 \oplus J_1$ ,  $J_1 \neq 0$  — конечномерная простая йорданова супералгебра с полупростой четной частью  $J_0$  над алгебраически замкнутым полем  $\Phi$  произвольной характеристики не равной 2, за исключением случая супералгебры невырожденной суперформы с одномерной четной частью  $J_0 = \Phi e$ . Тогда все тернарные дифференцирования  $J$  являются стандартными, т. е. четными вида (9) или нечетными вида (10).

**Теорема 2.** Пусть  $J(V, f) = \Phi e + V$  — супералгебра невырожденной суперформы с одномерной четной частью  $J_0 = \Phi e$  над алгебраически замкнутым полем  $\Phi$ . Тогда все четные тернарные дифференцирования в  $J$  являются стандартными, т. е. вида (9). Нечетные же ненулевые тернарные дифференцирования в  $J$  существуют только при размерности векторной части  $\dim V = 2$ , — в этом случае все они являются нестандартными и описываются следующим образом:

$$\left\{ (D_v, F_v, G_v) \mid (D_v, F_v, G_v)(1) = \left(v, \frac{v}{2}, \frac{v}{2}\right), \right. \\ \left. (D_v, F_v, G_v)(x) = \left(\frac{f(x, v)}{2}, f(x, v), f(x, v)\right) \ \forall x \in V \right\}_{v \in V}.$$

Соответственно, приведенные результаты точно так же имеют место для обобщенных дифференцирований, как первых компонент тернарных.

### Список литературы

1. Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M. Ternary derivations of finite-dimensional real division algebras // Linear Algebra Appl. 2008. V. 428. № 8,9.

2. Bresar M. On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations // Glasgow Math. J. 1991. V. 33.
3. Komatsu H., Nakajima A. Generalized derivations of associative algebras // Quaest. Math. 2003. V. 26. № 2. P. 213–235.
4. Leger G., Luks E. Generalized derivations of Lie Algebras // J. of Algebra. 2000. V. 228. С. 165–203.
5. Zhang R., Zhang Y. Generalized derivations of Lie superalgebras // Comm. Algebra. 2010. V. 38. № 10. 3737–3751.
6. Шестаков А. И. Тернарные дифференцирования сепарабельных ассоциативных и йордановых алгебр // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53. № 5. Р. 1178–1195.
7. Филиппов В. Т. О  $\delta$ -дифференцированиях альтернативных первичных и мальцевских алгебр // Алгебра и логика. 2000. V. 39.
8. Кайгородов И. Б. О  $\delta$ -супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр // Алгебра и логика. 2010. Т. 49. № 2.
9. Желябин В. Н., Кайгородов И. Б. О  $\delta$ -супердифференцированиях простых супералгебр йордановой скобки // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 4. С. 40–58.

## **Об автомодельных решениях задачи осесимметричной турбулентной струи**

**А. В. Шмидт**

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассмотрена полуэмпирическая модель осесимметричной турбулентной струи [1,2], содержащая дифференциальные уравнения переноса нормальных рейнольдсовых напряжений. Построена алгебра Ли операторов, допускаемых рассматриваемой моделью. Известные экспериментальные данные [3,4] указывают на то, что течение в дальних областях осесимметричной турбулентной струи можно считать близким к автомодельному. Поэтому для построения редукции модели к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

(ОДУ) были использованы операторы преобразований растяжения. Полученная система ОДУ решалась численно. Был использован модифицированный метод стрельбы и асимптотическое разложение решения в окрестности особой точки. Построенные решения согласуются с имеющимися экспериментальными данными [3,4] и результатами расчетов по полной модели [1,2].

Автор благодарит Г. Г. Черных и О. В. Капцова за предоставленные материалы и полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 13-01-00246) и в рамках гранта НШ-544.2012.1 государственной поддержки ведущих научных школ.

### Список литературы

1. Деменков А. Г., Илюшин Б. Б., Черных Г. Г. Численное моделирование осесимметричных турбулентных струй // ПМТФ. 2008. Т. 49. № 5. С. 55–60.
2. Demenkov A. G., Ilyushin B. B., Chernykh G. G. Numerical model of round turbulent jets // J. Engineering Thermophysics. 2009. V. 18. № 1. P. 49–56.
3. Wygnanski I., Fiedler H. Some measurements in the self-preserving jet // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. P. 577–612.
4. Panchapakesan N. R., Lumley J. L. Turbulence measurements in axisymmetric jets of air and helium. Pt. 1. Air jet // J. Fluid Mech. 1993. V. 246. P. 197–223.

### Производная $\pi$ -длина и нильпотентная $\pi$ -длина конечных $\pi$ -разрешимых групп

**О. А. Шпырко**

Филиал МГУ им. М. В. Ломоносова, Севастополь

Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют принятым в [1]. Пусть  $\pi$  — некоторое множество простых чисел,  $\pi'$  — множество всех простых чисел, не содержащихся в  $\pi$ , а  $\pi(G)$  — множество простых чисел, делящих порядок группы  $G$ . Возрастающим  $(\pi', \pi)$ -рядом группы  $G$  называют ряд

$$1 = P_0 \leq N_0 < P_1 < N_1 < \dots < P_i < N_i < \dots,$$

где  $N_i/P_i = O_{\pi'}(G/P_i)$ ,  $P_{i+1}/N_i = O_{\pi}(G/N_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь  $O_{\pi'}(X)$  и  $O_{\pi}(X)$  — наибольшие нормальные  $\pi'$ - и  $\pi$ -подгруппы группы  $X$  соответственно. Наименьшее натуральное число  $k$ , для которого выполняется равенство  $N_k = G$ , называют  $\pi$ -длиной  $l_{\pi}(G)$   $\pi$ -разрешимой группы  $G$ .

Если в возрастающем  $(\pi', \pi)$ -ряде  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  для всех  $\pi'$ -факторы  $N_i/P_i$  оставить без изменения, а  $\pi$ -факторы  $P_{i+1}/N_i$  заменить на:

— нильпотентные  $\pi$ -факторы  $P_{i+1}/N_i = F(G/N_i)$ , то получим нильпотентную  $\pi$ -длину  $l_{\pi}^n(G)$  группы  $G$ . Здесь  $F(X)$  — подгруппа Фиттинга группы  $X$ .

— абелевы  $\pi$ -факторы  $P_{i+1}/N_i = O_{\pi}^a(G/N_i)$ , то получаем производную  $\pi$ -длину  $l_{\pi}^a(G)$   $\pi$ -разрешимой группы  $G$ . Здесь  $O_{\pi}^a(X)$  — наибольшая нормальная абелева  $\pi$ -подгруппа в группе  $X$ .

Очевидно, что для любой  $\pi$ -разрешимой группы  $G$  справедливо неравенство  $l_{\pi}(G) \leq l_{\pi}^n(G) \leq l_{\pi}^a(G)$ , а в случае, когда  $\pi = \{p\}$ ,  $p$  — простое число, имеет место равенство  $l_p(G) = l_{\pi}(G) = l_{\pi}^n(G) = l_{\pi}^a(G)$ . В настоящей заметке доказана следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть  $G$  —  $\pi$ -разрешимая группа и  $l_{\pi}(G) = k$ . Тогда

$$l_p(G_{\pi}) \leq l_p(G) \leq k \cdot l_p(G_{\pi}) \quad \text{для всех } p \in \pi,$$

$$n(G_{\pi}) \leq l_{\pi}^n(G) \leq k \cdot n(G_{\pi}) \quad \text{и} \quad d(G_{\pi}) \leq l_{\pi}^a(G) \leq k \cdot d(G_{\pi}).$$

Здесь  $d(G)$  — производная длина, а  $n(G)$  — нильпотентная длина группы  $G$ .

## Список литературы

1. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск: Вышэйш. шк., 2006.

## Definable relations in the Turing degree structures

M. M. Arslanov

Kazan Federal University, Kazan

In this paper we initiate the study of questions of definability of classes of Turing degrees of  $n$ -computably enumerable ( $n$ -c. e.) sets

(sets from finite levels of the Ershov difference hierarchy) in the language of structures of the  $n$ -c. e. sets  $\mathcal{E}_n, 1 \leq n < \omega$ , under set inclusion.

It is easy to see that the 2-c. e. sets (they are called also d-c. e. sets) under inclusion form a lower but not upper semilattice, but beginning  $n = 3$  the  $n$ -c. e. sets under inclusion does not form neither upper nor lower semilattices. For the case of upper semilattice this is obvious: if  $A \in \mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n$ , then  $A = B \cup C$ , where  $B = \bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \{(R_{2i-1} - R_{2i})\}$  and  $C = R_n - R_{n+1}$  are  $n$ -c. e. sets. For the remaining case see Theorem 1.

**Theorem 1.** *Let  $n \geq 3$ .*

*a) If  $n$  is an odd number then there exist an  $n$ -c. e. set  $D_1$  and an d-c. e. set  $D_2$  such that  $D_1 \cap D_2$  is not an  $n$ -c. e. set. If  $n$  is an even number then there exist an  $n$ -c. e. set  $D_1$  and an 3-c. e. set  $D_2$  such that  $D_1 \cap D_2$  is not an  $n$ -c. e. set.*

*b) For each even number  $n, 2 \leq n < \omega$ , for every d-c. e. set  $A$  and  $n$ -c. e. set  $D$  the set  $M = A \cap D$  is  $n$ -c. e.*

We say that a set of Turing degrees  $\mathcal{C}$  is definable in  $\mathcal{E}_n$  for some  $n \geq 1$  if there is a definable in  $\mathcal{E}_n$  class of sets  $S \subset \mathcal{E}_n$  such that  $\mathcal{C} = \{\deg(B) \mid B \in S\}$ .

**Theorem 2.** *(For the case  $n = 2$  Lempp and Nies [1]) An element of  $\mathcal{E}_n$  is c. e. if and only if it is the supremum of two elements which have a unique complement.*

**Corollary 1.** *The set of all c. e. degrees and the set of all non-computable c. e. degrees are definable in each  $\mathcal{E}_n$  without parameters.*

**Corollary 2.** *Let  $1 \leq m < n < \omega$ . Then  $\mathcal{E}_m$  is definable in  $\mathcal{E}_n$  without parameters.*

**Theorem 3.** *The set of all high c. e. degrees  $H_1$  definable in each  $\mathcal{E}_n, 1 \leq n < \omega$ .*

Generalizing the definition of c. e. major subsets we call an  $n$ -c. e. set  $A$  ( $n > 1$ ) is a major subset of a c. e. set  $B$  if  $A \subset_\infty B$  and for

every c. e. set  $W$ ,  $\overline{B} \subseteq^* W \implies \overline{A} \subseteq^* W$ . Exactly with the same proof (Soare [2, X1.1.19]) can be proven that  $n$ -c. e. major subsets of c. e. sets (if exist) have high degrees.

**Theorem 4.** *Let  $n > 0$ . If  $n$  is an even number then there are no  $n$ -c. e. major subsets. If  $n$  is an odd number then for every non-computable c. e. set  $B$  there is an  $n$ -c. e. set  $A$  of properly  $n$ -c. e. degree such that  $A$  is a major subset of  $B$ .*

**Corollary 3.** *For each  $n > 1$  and each odd number  $m < n$  there is a definable in  $\mathcal{E}_n$  subset of high properly  $m$ -c. e. degrees.*

It is well-known that for each  $n, 1 < n < \omega$ , there exists a high properly  $n$ -c. e. degree. Therefore, it is natural to ask the following question: weather the class of high  $n$ -c. e. degrees is definable in  $\mathcal{E}_n$  for each  $n, 1 < n < \omega$ ? The following theorem gives an affirmative answer to his question.

**Theorem 5.** *For each odd number  $n, 1 \leq n < \omega$ , for each high  $n$ -c. e. degree  $\mathbf{d}$  and for each non-computable c. e. set  $A$  there is an  $n$ -c. e. major subset  $M$  of  $A$  such that  $\deg(M) = \mathbf{d}$ .*

**Corollary 4.** *For each odd number  $n, 1 \leq n < \omega$ , the set of all high  $n$ -c. e. degrees definable in  $\mathcal{E}_n$ .*

**Question 1.** *Is the set of all high  $n$ -c. e. degrees definable in  $\mathcal{E}_n$  for even numbers  $n$ ?*

## References

1. Lempp S. and Nies A. Differences of computably enumerable sets // Math. Logic Quarterly. 2000. V. 46. P. 555-561.
2. Soare R. I. Recursively Enumerable Sets and Degrees. Berlin:Springer-Verlag. 1987.

# Two remarks on Gröbner—Shirshov bases method for associative and Lie algebras

**L. A. Bokut**

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk; SCNU, Guangzhou

**1.** The usual presentation of the method is based on the notion of composition  $(f, g)_w$  of two (monic) polynomials  $f, g$  of a free algebra  $k\langle X \rangle$  over a field (see [1,2]). Actually it may be based on a notion of the list common multiple of two words,  $lcm(u, v)$ ,  $u, v \in X^*$ . Namely,  $lcm(u, v) = w$ ,  $w \in \{ucv, c \in X^*; u = avb, a, b \in X^*; ub = av, \deg(ub) < \deg(u) + \deg(v)\}$ . Note that  $lcm(u, v)$  and  $lcm(v, u)$  are different. Let us define a general composition

$$(f, g)_w = w|_{u \rightarrow f} - w|_{v \rightarrow g},$$

where  $u = \bar{f}$ ,  $v = \bar{g}$  (the maximal words in a monomial order on  $X^*$ ),  $w = lcm(u, v)$ .

Key properties of a general composition are as follows: If  $w_1 = a_1 \bar{s}_1 b_1 = a_2 \bar{s}_2 b_2$ , then  $w_1 = cwd$ , where  $w = lcm(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$  (up to renumbering). Hence  $a_1 s_1 b_1 - a_2 s_2 b_2 = c(s_1, s_2)_w d$ . Moreover  $(s_1, s_2)_w = 0 \pmod{s_1, s_2; w}$ , if  $w = \bar{s}_1 c \bar{s}_2$ .

It follows the main statement of Shirshov Composition-Diamond lemma for  $k\langle X \rangle$ : If  $S \subset k\langle X \rangle$  is a Gröbner—Shirshov basis,  $f \in \text{Ideal}(S)$ , then  $\bar{f} = a \bar{s} b$ ,  $s \in S$ .

**2.** The usual formulation of Poincare—Birkhoff—Witt (PBW) Theorem based on a presentation of a Lie algebra  $L = Lie_k(X|S)$  over a field  $k$  by a linear basis  $X$  and the multiplication table  $S$  in  $X$ . Actually it may be based on a more general presentation of  $L$  by generators  $X$  and defining relations  $S$  in  $X$ , which is a Lie Gröbner—Shirshov basis.

**PBW Theorem in a form of Shirshov.** Let  $S \subset Lie(X) \subset k\langle X \rangle$ . Then  $S$  is a Lie Gröbner—Shirshov basis iff  $S$  is an associative Gröbner—Shirshov basis. If it is done then a linear basis of  $U(L) = k\langle X|S \rangle$  consists of words  $u = u_1 u_2 \dots u_k$ ,  $k \geq 0$ ,  $u_i$ 's are  $S$ -irreducible Lyndon—Shirshov words,  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k$  (in the lex-order). Moreover a linear basis of  $Lie_k(X|S)$  consists of  $S$ -irreducible Lyndon—Shirshov Lie words  $[u]$ . Even more, a linear basis of  $U(L)$

consists of polynomials  $[u_1][u_2]\dots[u_k]$ ,  $k \geq 0$ ,  $[u_i]$ 's are  $S$ -irreducible Lyndon—Shirshov Lie words,  $u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_k$ .

Here we use Shirshov Composition-Diamond lemmas for associative and Lie algebras, Shirshov (not Lyndon—Shirshov!) factorization theorem that any word is a lex-nonincreasing product of Lyndon—Shirshov words,  $u = u_1 u_2 \dots u_k$ , and a property that  $u$  is  $S$ -irreducible iff  $u_i$ 's are  $S$ -irreducible.

Partially supported by RFBR 12–01–00329.

## References

1. Selected works of A.I. Shirshov / L. Bokut, V. Latyshev, I. Sheshtakov, E. Zelmanov (Eds). Translated by M. Bremner, M. Kochetov. Basel–Berlin–Boston: Birkhäuser, 2009.
2. Bokut L.A., Yuqun Chen, [www.arxiv.org](http://www.arxiv.org), 1303.5366, 1102.0449, 0804.1344, 0804.1254.

## On a Borovik's conjecture

**A. A. Buturlakin, A. V. Vasil'ev**

Sobolev institute of mathematics, Novosibirsk

The  $c$ -dimension of a group  $G$  is the maximal length of a nested chain of centralizers of subsets in  $G$ . Groups of finite  $c$ -dimension have some interesting properties. For example, a periodic locally soluble group of finite  $c$ -dimension  $k$  is soluble of  $k$ -bounded derived length (see [1]). In the same paper the following conjecture of Borovik is formulated.

CONJECTURE (A.V.Borovik). Let  $G$  be a locally finite group of finite  $c$ -dimension  $k$ . Let  $S$  be the full inverse image of the “generalized Fitting subgroup”  $F^*(G/F(G))$ , which is equal to the product of  $F(G/F(G))$  and all the quasi-simple subnormal subgroups of  $G/F(G)$ . Then

- (1) the number of non-abelian simple composition factors of  $G$  is finite and  $k$ -bounded;
- (2)  $G/S$  has an abelian subgroup of finite  $k$ -bounded index.

We prove the following statement.

**Theorem 1.** *If  $G$  is a locally finite group of finite  $c$ -dimension  $k$ , then the number of non-abelian simple composition factors of  $G$  is less than  $5k$ .*

Thus the first statement of the conjecture holds.

The work is partially supported by RFBR (grant 12-01-31221 and 12-01-90006).

## References

1. Khukhro E. I. On solubility of groups with bounded centralizer chains // Glasgow Math. J. 2009. V. 51. P. 49–54.

## Shunkov groups with some minimal conditions

**N. S. Chernikov**

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences  
of Ukraine, Kyiv, Ukraine

A great many deep results are connected with Shunkov groups satisfying various minimal conditions. As an example, Shunkov groups with the minimal condition for subgroups or only for abelian subgroups and periodic non-abelian Shunkov groups with the minimal condition for non-abelian subgroups are Chernikov (A. Ostylovskii-Shunkov, Suchkova-Shunkov and N. S. Chernikov's Theorems respectively). Further, the following new theorem of the author holds.

**Theorem 1.** *Let  $G$  be a periodic non-abelian Shunkov group. Then:*

*(i)  $G$  satisfies the minimal condition for non-normal subgroups iff it is Chernikov or Hamiltonian.*

*(ii)  $G$  satisfies the minimal condition for non-abelian non-normal subgroups iff it is a Chernikov group or a solvable group with normal non-abelian subgroups.*

## **A new definition and properties of several matrix functions over different rings**

**G. P. Egorychev**

Siberian Federal University, Krasnoyarsk

The author gives a new definition and studies the properties of the determinant and the permanent over nonassociative noncommutative rings.

### **References**

1. Egorychev G. P. Discrete Mathematics. Permanents. Krasnoyarsk: SibFU, 2007. 272 P.

## **The Golod 2-group with infinite subgroups generated by involutions**

**C. K. Gupta**

University of Manitoba, Winnipeg, Canada

**A. V. Timofeenko**

Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

Recall that E. S. Golod (1964) found for each prime  $p$  and every  $n \geq 2$  infinite  $n$ -generated  $p$ -group. The basis for the construction of this group is a sufficient condition infinite dimensionality of the quotient algebra of the free associative algebra  $F^{(1)}$  of polynomials without constant term of  $n$  non-commuting variables over an arbitrary field by a homogeneous ideal  $I$ . This condition limits the number of each degree polynomials in the generating set of the ideal  $I$ . Each polynomial of algebra  $F^{(1)}$  is being built in sufficiently large so that homogeneous components of this degree are taken as generators of  $I$  and the number of each of these generators degree satisfies the above conditions is infinite-dimensional. So being built nonnilpotent nilalgebra  $A = F^{(1)}/I$ . Algebra  $A$  over a field of characteristic  $p$  under the operation  $\circ$  :

$$a \circ b = a + b + ab, \quad a, b \in A,$$

forms an infinite  $p$ -group, which is called the adjoint group of algebra  $A$ . We denote by  $x_1, x_2, \dots, x_n$  free generators of  $F^{(1)}$ , and let  $a_j =$

$x_j + I, j = 1, 2, \dots, n$ . Then the subgroup  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  of adjoint group of  $A$  will also be infinite. We call it the Golod group and designate  $G_I$ .

Group  $G_I$  is residually finite and orders its elements are not bounded. There are Golod groups with infinite center (Timofeenko A. V., 1986) and Golod group with trivial center (Sereda V. A. and Sozutov A. I., 2006). The ideal  $I$  can be constructed so, that each  $(n - 1)$ -generated subgroup of Golod group  $G_I$  is finite (Golod E. S., 1968). On the other hand, for each  $n = 2, 3, \dots$  and each odd prime  $q$  is constructed  $n$ -generated Golod  $q$ -group with infinite subgroup, generated by two conjugate elements of prime order (Timofeenko A. V., 1985, 1991). Constructed Golod 2-group with infinite subgroup generated by a pair of conjugate elements of the fourth order. These subgroups can be constructed so as to satisfy the sufficient condition for infinite index subgroup of Golod group (Timofeenko A. V., 1986). In this report, constructed Golod 2-group with infinite subgroup, generated by three involutions. In one of these triples, all involutions conjugate, and the other two involutions commute. Found product orders of every two involutions in both triples. Obviously, that in the Golod 2-groups with finite 3-generated subgroups any generated by three involution subgroup is finite.

**Theorem 1.** *Let  $n \geq 3$ ,*

$$H = \langle a_1^2 a_2, a_3^2 a_2 \rangle < \langle a_1^2, a_2, a_3^2 \rangle < G_I = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle.$$

*Then for some ideal  $I$  of  $F^{(1)}$  the subgroup  $H$  is infinite,  $|a_1^2| = |a_3^2| = |a_2| = |a_1^2 a_3^2| = 2$ ,  $|a_1^2 a_2| = 32$ ,  $|a_3^2 a_2| = 64$ .*

**Theorem 2.** *For some ideal  $I$  of  $F^{(1)}$  and for  $n \geq 3$  it is true*

$$G_I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle > \langle a_2, a_2^{a_1}, a_2^{a_3} \rangle > \langle a_2^{a_1} a_2, a_2^{a_3} a_2 \rangle = H, \\ |H| = \infty, |a_2| = 2, |a_2^{a_1} a_2| = |a_2^{a_3} a_2| = |a_2^{a_1} a_2^{a_3}| = 32.$$

# Homogeneous Almost Primitive Elements of Free Nonassociative Algebras

A. V. Klimakov

Department of Mechanics and Mathematics, Moscow State University, Russia

Let  $F(X)$  be the free nonassociative algebra over a field  $K$  with a set  $X$  of free generators. A. G. Kurosh [4] proved that subalgebras of free nonassociative algebras are free. An element  $u \in F(X)$  is said to be primitive if there is a set  $Y$  of free generators of  $F(X)$ ,  $F(X) = F(Y)$ , such that  $u \in Y$ . A nonzero element  $u \in F(X)$  is said to be almost primitive element (APE), if  $u$  is not a primitive element of the algebra  $F(X)$ , but  $u$  is a primitive element of any proper subalgebra of  $F(X)$  which contains  $u$ .

Series of APE of free nonassociative algebras were constructed in [6], [8]. In [1–3] for free algebras of small ranks (nonassociative, (anti)commutative and Lie algebras) were constructed and new examples and criteria for homogeneous elements to be almost primitive are obtained.

**Theorem 1.** *A homogeneous element  $u \in F(X)$ ,  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , of degree  $d(u) = 2$  is APE if and only if  $u$  is an element of maximal rank (i.e.  $\text{rank}(u) = n$ ).*

The rank of an element  $u$  of the algebra  $F(X)$  is the smallest number of free generators from  $X$  which an element  $\phi(u)$  depends on, where  $\phi$  runs through the automorphism group of  $F(X)$  (in other words,  $\text{rank}(u)$  is the smallest rank of a free factor of  $F(X)$  containing  $u$ ). The algorithm to count the rank of an element of a free nonassociative algebra over a field  $K$  was obtained and constructed in [5,6,7].

A subset  $M = \{a_i\}$  of nonzero elements of  $F(X)$  is called reduced if for any  $i$  the leading part  $a_i^\circ$  of the element  $a_i$  does not belong to the subalgebra of  $F(X)$  generated by the set  $\{a_j^\circ \mid j \neq i\}$ .

**Definition 1.** *Let  $\mathcal{H}^\circ = \text{alg}\{h_1, \dots, h_k\} \subseteq F(X)$  be a subalgebra of  $F(X)$  with the reduced set  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$  of homogeneous free generators. For any homogeneous element  $u \in \mathcal{H}^\circ$  of degree  $d(u) \geq 3$ , which does not contain any generator  $h_i$  as a linear summand, define by  $\rho_H(u)$  the number of pairwise distinct generators  $h_i$  of degree 1, participating in the canonical presentation of  $u$  as factors of summands*

of the "left" or "right" bracket structures (i.e. for such  $h_i$  there is a summand of  $u_{can}$  of the form  $h_i A$  or  $A h_i$ , where  $A$  is a monomial of degree  $d(A) = d(u) - 1$ ). If some generator  $h_i$  participating as a linear summand, then we suppose  $\rho_H(u) = +\infty$ .

Define  $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u)$  as minimum of  $\rho_H(u)$ , where  $H$  runs through all reduced sets of free homogeneous generators of the algebra  $\mathcal{H}^\circ$ .

**Definition 2** ( $\rho$ -number of an element). For a homogeneous element  $u \in F(X)$  of degree  $d(u) \geq 3$  define  $\rho$ -number as follows:

$$\rho(u) = \min_{u \in \mathcal{H}^\circ \subset F(X)} \rho_{\mathcal{H}^\circ}(u),$$

where minimum takes over all subalgebras  $\mathcal{H}^\circ \subset F(X)$ , having a reduced set of homogeneous generators and containing the element  $u$ .

**Lemma 1.** For the  $\rho$ -number of a homogeneous element  $u \in F(X)$  of degree  $d(u) \geq 3$  following statements are true:

- $\rho_H(u) = +\infty \iff$  the element  $u$  is primitive in  $\text{alg}\{H\}$ ;  $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) = +\infty \iff$  the element  $u$  is primitive in  $\mathcal{H}^\circ$ .
- $\rho_H(u) = n \implies \text{alg}\{H\} = F(X)$ ;  $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) = n \implies \mathcal{H}^\circ = F(X)$
- If  $\rho_{F(X)}(u) < n$ , then there is a proper subalgebra  $\mathcal{H}^\circ$  such that  $\rho_{\mathcal{H}^\circ}(u) \leq \rho_{F(X)}(u)$ , and therefore, the element  $u$  is not APE in  $\mathcal{H}^\circ$ .
- $\rho(u) \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

**Theorem 2.** Let  $u \in F(X)$  be a homogeneous element of degree  $d(u) = m \geq 3$ . Then the element  $u$  is APE in  $F(X)$  if and only if  $\rho(u) = n$ .

**Lemma 2.** The element  $u_f = x_1 + f(x_1, \dots, x_n)$ , where  $f$  is a nonassociative polynomial of degree  $\deg f \geq 2$  and every monomial of the polynomial  $f$  depends on  $x_1$ , is not primitive in the free nonassociative algebra  $F(X)$ .

**Theorem 3.** Let  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  be a nonempty set,  $F(X)$  the free nonassociative algebra over a field  $K$ . The element  $v = u_{1,n}(x_1) + x_1 = (\dots(((x_1 x_1) x_2) x_3) \dots) x_n + x_1$  is APE in  $F(X)$ .

## References

1. Klimakov A. V., Mikhalev A. A., Almost primitive elements of free nonassociative algebras of small ranks // *Fundament. i Prikl. Mat.* 2012. V. 17. № 1. P.127–141. English translation: *J. Math. Sci.* 2012. V. 185. № 3. P. 430–439
2. Klimakov A. V., Almost primitive elements of free nonassociative (anti)commutative algebras of small rank // *Moscow Univ. Math. Bulletin.* 2012. V. 67. № 5-6, P. 206–210.
3. Klimakov A. V., Almost primitive elements of free Lie algebras of small ranks // *Fundament. i Prikl. Mat.* 2013. to appear.
4. Kurosh A. G., Nonassociative free algebras and free product of algebras // *Mat. Sb.* 1947. V. 20. P. 239–262.
5. Mikhalev A. A., Mikhalev A. V., Chepovskiy A. A., Champagnier K., Primitive elements of free nonassociative algebras // *Fundament. i Prikl. Mat.* 2007. V. 13. № 5. P. 171–192. English translation: *J. Math. Sci.* 2009. V. 156. № 2. P. 320–335.
6. Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T., *Combinatorial Methods. Free Groups, Polynomials, and Free algebras.* Springer, 2004.
7. Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T., Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras // *J. Algebra.* 2001. V. 243. P. 198–223.
8. Mikhalev A. A., Yu J.-T., Primitive, almost primitive, test, and  $\Delta$ -primitive elements of free algebras with the Nielsen-Schreier property // *J. Algebra.* 2000. V. 228. P. 603–623.

## Simple Groups and Sylow Subgroups

**Koichiro Harada**

Shizuoka, Japan

**Theorem.** Let  $G$  be a finite group and  $P$  be a Sylow  $p$ -subgroup of  $G$ . Suppose  $P$  is an extra-special group of order  $p^3$  of exponent  $p$ , and assume that all nonidentity elements of  $P$  are conjugate in  $G$ . Then,  $p = 3, 5$  or  $7$ .

**Notes.** If  $p = 3$ , then *Tits' group*  ${}^2F_4(2)'$  and  ${}^2F_4(2^{2m+1})$  with a suitable  $m$  are examples. *Rudvalis group* and *Janko's largest group* are also example. If  $p = 5$ , *Thompson's group* is an example. If  $p = 7$ , there is no examples of finite groups, but there are three *nonrealizable* local structures. In [1] these three cases are called *exotic* 7-local finite groups. Their result is obtained under the axioms and some basic assumptions of fusion systems. It may perhaps be a good approach to develop a suitable modular character theory in order to investigate such exotic (nonrealizable) local structures. For a related work, see [2].

## References

1. A.Ruiz and A.Viruel, The classification of  $p$ -local finite groups over the extraspecial group of order  $p^3$  and exponent  $p$  // Math. Zeit. 2004. P. 45-65.
2. R.Narasaki and K.Uno, Isometries and extra special Sylow groups of order  $p^3$  // Jour. Alg. 2009. P. 2027-2068.

## Vaughan-Lee algebras $V7$ and $V8$ and related Lie algebras

**M. I. Kuznetsov, A. A. Shmelev**

N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,  
Nizhny Novgorod

Computer based classification of simple Lie algebras over  $\mathbb{F}_2$  of dimension less then 10 obtained by M. Vaughan-Lee [1] contains 7-dimensional algebra  $V7$  and 8-dimensional Lie algebra  $V8$  realized by  $7 \times 7$ - and  $8 \times 8$ -matrices, respectively. Later B. Eik [2] applying new computer test of isomorphism of Lie algebras showed that  $V7$  is isomorphic to non-alternating Hamiltonian Lie algebra  $P(2 : 1, 2)$ , [3].

The authors investigated the deformations of semisimple Lie algebra  $\mathfrak{g} = W(1 : 2)' \otimes \mathcal{O} + \langle 1 \otimes d \rangle$  over an algebraically closed field of characteristic two. Here  $W(1 : 2)'$  is the Zassenhaus algebra,  $\mathcal{O} = F[x]/(x^2)$ ,  $d = d/dx$ . It was shown that  $V7$  is the only simple Lie algebra obtained by deformation of  $\mathfrak{g}$ . Moreover,  $V7$  contains maximal subalgebras such that corresponding uncontractable filtrations of  $V7$  have  $\mathfrak{g}$  as associated graded Lie algebra with degenerate and nondegenerate gradings in sense of Weisfeiler.

Lie algebras  $P(2 : 1, n)$  appears naturally in the classification of simple Lie algebras with solvable maximal subalgebra over an algebraically closed field  $F$  of characteristic  $p$ .

The Lie algebra  $P(2 : 1, n)$  may be realized as  $\mathbb{Z}_2$ -graded Lie algebra  $L = L_{\bar{0}} + L_{\bar{1}}$  where  $L_{\bar{0}} = W(1 : n)'$ ,  $L_{\bar{1}} = \mathcal{O}(1 : n)$  is a divided powers algebra. The adjoint action of  $L_{\bar{0}}$  on  $L_{\bar{1}}$  is the standard action of  $W(1 : n)'$  on  $\mathcal{O}(1 : n)$ , and for  $f, g \in L_{\bar{1}}$   $[f, g] = [f\partial, g\partial]$  in  $W(1 : n)' = L_{\bar{0}}$ .

The authors shows that Lie algebra  $V_8$  is isomorphic to nonsplitting form  $A_{2II}$  of classical simple Lie algebra of the type  $A_2$  which is splitted over  $\mathbb{F}_4$ . This fact may be established using the following

**Theorem 1.** *Let  $L$  be a simple Lie  $p$ -algebra over an algebraically closed field of characteristic 2. If  $L$  contains a two-dimensional Cartan subalgebra with two-dimensional root spaces then  $L$  is a classical Lie algebra of type  $A_2$ .*

The work is supported by grant of Ministry of Education and Science of Russian Federation (grant 1.1907.2011).

## References

1. Vaughan-Lee M. Simple Lie algebras of low dimension over  $GF(2)$  // London Math. Soc. J. Comput. Math. 2006. V. 9. P. 174-192.
2. Eik B. Some new simple Lie algebras in characteristic 2 // J. Symb. Comput. 2010. V. 45. № 9. P. 943-951.
3. Lin L. Non-alternating Hamiltonian algebra  $P(n, m)$  of characteristic two // Commun. Algebra. 1993. V. 21. № 2. P. 399-411.

# Problems of classification of finite semifield planes, QF-schemes and quadrics of projective spaces

V. M. Levchuk

Siberian Federal University, Krasnoyarsk

O. A. Starikova

North-East State University, Magadan

We consider problems and some results of finite projective plane theory and semifield theory, that developed correlationally since the beginning of the 20 century [1]. The coordinatisation method [2] introduced by Hilbert and generalized by Hall stimulated the development of theory of semifield planes and semifields and studding of correspondence between ones. For the construction of semifield planes one can should use the group decomposition. Albert [3] discovered the interconnection between isomorphic classes of projective planes and isotopic classes of finite semifields. The following problem should be treated as basic: to find the representatives of all isotopism classes of finite semifields.

The problem of enumeration of quadrics and quadratic forms of projective spaces is closely connected with the problem of classification of quadratic form schemes (QF-schemes) of basic fields and rings of coefficients, [4] - [5]. Recall, that the group  $G = R^*/R^{*2}$  together with its particular map of subsets from  $G$  refers to  $QF$ -scheme of ring  $R$ . The Witt ring of  $R$  is completely determined by the quadratic form scheme of  $R$ . Some problems for  $QF$ -schemes remains open.

We give a combinatorial representation for number of projective congruent quadrics classes of the projective space over  $R$  with a  $QF$ -scheme of order  $\leq 4$  and a nilpotent maximal ideal and also up to projective equivalence [6].

The research is supported by Russian fund of fundamental researches, 12-01-00968.

## References

1. Lavrauw M., Polverino O. Finite Semifields and Galois Geometry [<http://cage.ugent.be/ml>], 2011, 21 P.
2. Knuth D. E. Finite semifields and projective planes // J. Algebra, 1965. V. 2. P. 182-217.

3. Albert A. A. Finite division algebras and finite planes // Proc. Sympos. Appl. Math., Vol.10, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1960, P. 53-70.
4. Levchuk V. M., Starikova O. A. A normal form and schemes of quadratic forms // Journal of Mathematical Sciences. 2008. V. 152. № 4. P. 558-570.
5. Marshall M. The elementary type conjecture in quadratic form theory // Contemp. Math. 2004. V. 344. P. 275-293.
6. Starikova O. A. Quadratic forms and quadrics of space over local rings, Journal of Mathematical Sciences. 2012. V. 187. № 2. P. 177-186.

## Groups contained between groups of Lie type over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3

**Ya. N. Nuzhin**

Siberian Federal University, Krasnoyarsk

Below  $G(K)$  is the adjoint Chevalley or Steinberg group of type  $G$  over a field  $K$ . In [1] the the author established that the groups contained between  $G(F)$  and  $G(K)$  are exhausted by the groups  $G(P)$  or their extensions by means of diagonal automorphisms for intermediate subfields  $P$  ( $F \subseteq P \subseteq K$ ) in the case when  $K$  is an algebraic extension of a field  $F$  containing more then four elements. In [1] we assumed the perfectness of  $F$  for the exceptional characteristics. For  $G = B_l, C_l, F_4, {}^2A_l, {}^2D_l$  and  ${}^2E_6$ , the only exceptional characteristic is 2, and for  $G = G_2$  and  ${}^3D_4$  it is 2 and 3. These case are considered in [2,3], and for them the intermediate subgroups are not determined only by one intermediate subfield. The first examples of these groups are indicated in Steinberg's monograph [4, §10, p. 144].

Let  $K$  be a nonperfect field of characteristic is  $p$ . The set of the  $p$ th powers of its elements  $K^p$  is a proper subfield in  $K$ . Suppose that  $p = 2$  for  $G = B_l$  ( $l \geq 2$ ),  $C_l$  ( $l \geq 2$ ),  $F_4$  and  $p = 3$  for  $G = G_2$ . Put

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} K, & \text{if } r \text{ is a short root,} \\ K^p, & \text{if } r \text{ is a long root.} \end{cases}$$

Then the set  $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$  uniquely defines the subgroups  $G(\mathfrak{A})$  generated by the root subgroups  $x_r(\mathfrak{A}_r)$ , i.e., it contains no new root elements. Steinberg called the subgroup  $G(\mathfrak{A})$  weird and noted that it is a simple group.

We formulate the results in terms of the carpets of additive subgroups of the basic field, in particular, the subgroups  $G(\mathfrak{A})$  in the above example is defined by the carpet  $\mathfrak{A}$ .

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 12-01-00968-a) and the Ministry for Education and Science of the Russian Federation (Grant 2.1.1/4620).

## References

1. Nuzhin Ya.N. The groups contained between groups of Lie type over various fields // Algebra i Logika. 1983. V. 22. № 5. P. 526–541.
2. Nuzhin Ya.N. The groups contained between the Chevalley groups of type  $B_l, C_l, F_4$  and  $G_2$  over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3 // Siberian Mathematical Journal. 2013. V. 54. № 1. P. 157–162.
3. Nuzhin Ya.N. The groups contained between the Steiberg groups over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3 // Trudy IMM UrO RAN (Submitted).
4. Steiberg R. Lectures on Chevalley Groups (Russian translation). Moscow.: Mir. 1975. 262 P.

## Unification and Admissible rules for paraconsistent minimal Johanssons' logic **J** and positive intuitionistic logic **IPC**<sup>+</sup>

**V. V. Rybakov**

School of Computing, Mathematics and DT, Manchester Metropolitan University, Manchester, U.K, and (part time) Siberian Federal University, Krasnoyarsk, Russia

We study unification problem and problem of admissibility for inference rules in minimal Johanssons' logic **J** (cf. for definitions [1]) and positive intuitionistic logic **IPC**<sup>+</sup>. This paper proves that the problem of admissibility for inference rules with coefficients (parameters) (as

well as plain ones - without parameters) is decidable for the paraconsistent minimal Johanssons' logic **J** and the positive intuitionistic logic **IPC**<sup>+</sup>. Using obtained technique we show also that the unification problem for these logics is also decidable: we offer algorithms which compute complete sets of unifiers for any unifiable formula. Checking just unifiability of formulas with coefficients also works via verification of admissibility. The obtained results are summarized as follows.

**Theorem 1.** *The problem of admissibility for rules with parameters (also with none) for in minimal paraconsistent logic **J** is algorithmically decidable.*

**Theorem 2.** *The rule with parameters  $r = \varphi(\bar{x}, \bar{p})/\psi(\bar{x}, \bar{p})$  is admissible in minimal logic **J** iff  $r$  is true on the frames of all models  $\mathcal{I}(n)$ , with  $P_n \supset P(r)$ , w.r.t. all valuations coinciding with the original valuations of the models  $\mathcal{I}(n)$  at all letters from  $P(r)$ .*

**Theorem 3.** *The problem of admissibility of rules with parameters for positive logic  $\text{Int}^+$  is algorithmically decidable.*

**Theorem 4.** *The rule with parameters  $r = \varphi(\bar{x}, \bar{p})/\psi(\bar{x}, \bar{p})$  is admissible in  $\text{Int}^+$  iff  $r$  is true on the frames of all models  $\mathcal{I}^+(n)$ , with  $P_n \supset P(r)$ , w.r.t. all valuations coinciding with the original valuations of the models  $\mathcal{I}(n)$  at all letters from  $P(r)$ .*

**Theorem 5.** *The logic **J** has a finitary unification type for formulas with coefficients, and there is an algorithm writing a finite complete set of unifiers for any unifiable formula.*

**Theorem 6.** *The logic  $\text{Int}^+$  has a finitary unification type for formulas with coefficients, and there is an algorithm writing a finite complete set of unifiers for any unifiable formula.*

The technique applied is extended version from [2]. The results are obtained in cooperation with professor S.Odintsov, and to be printed in our paper in J. of Pure and Applied Logic, Elsevier.

## References

1. Odintsov S. P. Constructive negations and paraconsistency. Springer, Dordrecht, 2008.
2. Rybakov V. V. Rules of inference with parameters for intuitionistic logic // J. of Symb. Logic. 1992. V. 57. № 3. P. 912–923.

# On some properties of $\pi$ -normal Fitting classes

N. Savelyeva

The A. S. Pushkin State University of Brest, Brest, Belarus

All groups considered are finite. We use standard definitions and notation taken from [1].

A normally hereditary class of groups  $\mathfrak{F}$  is called a Fitting class if it is closed under the products of normal  $\mathfrak{F}$ -subgroups. If a Fitting class  $\mathfrak{F} \neq \emptyset$  then a subgroup  $G_{\mathfrak{F}}$  of a group  $G$  is called its  $\mathfrak{F}$ -radical if it is the largest normal  $\mathfrak{F}$ -subgroup of  $G$ . A non-empty Fitting class  $\mathfrak{F}$  is called normal in a Fitting class  $\mathfrak{X}$  or  $\mathfrak{X}$ -normal (this is denoted by  $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$ ) if  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$  and for every  $\mathfrak{X}$ -group  $G$  a subgroup  $G_{\mathfrak{F}}$  is  $\mathfrak{F}$ -maximal in  $G$ .

In the class  $\mathfrak{E}$  of all groups it is known that normality of Fitting classes depends on the properties of the Fitting class  $\mathfrak{H}$  of all groups which are direct products of simple non-cyclic groups (see, for instance, propositions 2.4–2.6 [2]). In particular, it is established [2] that the product of any  $\mathfrak{S}$ -normal Fitting class ( $\mathfrak{S}$  is the class of all soluble groups) and a Fitting class  $\mathfrak{H}$  is  $\mathfrak{E}$ -normal. Recall that the product of Fitting classes  $\mathfrak{X}$  and  $\mathfrak{Y}$  is the class of groups  $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G : G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y})$  which is also a Fitting class.

Let  $\mathbb{P}$  be the set of all primes,  $\emptyset \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$  and let  $\mathfrak{H}_{\pi}$  denote the Fitting class of all  $\pi$ -groups equal to direct products of simple non-cyclic groups. The symbol  $\mathfrak{E}_{\pi}$  denotes the Fitting class of all  $\pi$ -groups and  $\mathfrak{S}_{\pi}$  is the class of all soluble  $\pi$ -groups. If a Fitting class  $\mathfrak{F}$  is normal in  $\mathfrak{E}_{\pi}$  or  $\mathfrak{S}_{\pi}$  then we call it  $\pi$ -normal.

The result of Laue mentioned above leads us to the question of searching for the analogous property in the case of  $\pi$ -normal Fitting classes.

**Lemma 1.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a Fitting class. If  $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_{\pi}$  and  $G \notin \mathfrak{S}_{\pi}$  then  $G_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}_{\pi}} > G_{\mathfrak{F}}$ .*

**Theorem 1.** *Let  $\mathfrak{F}$  be a Fitting class. If  $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{S}_{\pi}$  then  $\mathfrak{F}\mathfrak{H}_{\pi} \trianglelefteq \mathfrak{E}_{\pi}$ .*

In the case  $\pi = \mathbb{P}$  the lemma and the theorem imply Laue's results [2].

## References

1. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin–New York : Walter de Gruyter. 1992. 891 p.
2. Laue H. Über nichtauflösbare normale Fittingklassen // J. Algebra. 1977. V. 45. P. 274.–283.

## Amalgam for 0-dimensional schemes

N. V. Timofeeva

Yaroslavl' State University, Yaroslavl'

We start with the general *quotient problem* in the category of algebraic schemes. The problem includes the ingredients:

- a scheme  $X$ ;
- an equivalence relation  $R \subset X \times X$ ;
- morphisms  $p_i : R \subset X \times X \rightarrow X$  defined as composites of the immersion with projections on  $i$ th factor.

The question is to construct (if possible) the *universal quotient*  $X/R$ . This is an universal completion of the diagram  $X \xleftarrow{p_1} R \xrightarrow{p_2} X$ . The best result should be to know precisely when the universal quotient exist in some category (for example, in the category of schemes) and when it does not.

The basic example is the notion of algebraic space which appears when morphisms  $p_i, i = 1, 2$  are assumed to be étale.

Another well-known example arises when the scheme  $X$  is acted upon by an algebraic group  $G$  and  $R$  is a subscheme induced by  $G$ -equivalence. In this case if  $X/R = X/G$  exists its universality means that it is categorical quotient of the scheme  $X$  by  $G$ .

Now let  $X$  be a disjoint union of schemes  $X = X_1 \sqcup X_2$ . Then the problem reduces to the search of universal completion of the diagram  $X_1 \xleftarrow{p_1} R \xrightarrow{p_2} X_2$ . Such a universal completion is called an *amalgam* (or *amalgamated sum*) of schemes  $X_1$  and  $X_2$  with respect to  $R$  and is denoted as  $X_1 \coprod_R X_2$ .

We work with zero-dimensional algebraic schemes of finite type over a field  $k = \bar{k}$ . This means that they are prime spectra of Artinian algebras over  $k$  and one can consider the dual picture in the category

of associative commutative Artinian  $k$ -algebras with unity. In this circumstance we have to construct the *universal product* of Artinian  $k$ -algebras. Its functorial behavior must be completely analogous to one of usual fibred product of schemes. As usually the *length* of Artinian  $k$ -algebra  $A$  is its dimension as of  $k$ -vector space. It is denoted as  $\text{length } A$ . If  $Z = \text{Spec } A$  then  $\text{length } Z = \text{length } A$ .

**Example 1.** *A pair of monomial zero-dimensional subschemes  $Z_1, Z_2$  in  $\mathbb{A}^n$  such that  $R = Z_1 \cap Z_2$ , provides the case when the amalgam is constructed in obvious way. Let  $Y_i, i = 1, 2$ , be their Young diagrams. Then the subscheme of the intersection  $R = Z_1 \cap Z_2$  is represented by the Young diagram  $Y_0 := Y_1 \cap Y_2$  which is a maximal common part of diagrams  $Y_1$  and  $Y_2$ . The amalgam  $Z = Z_1 \amalg_R Z_2$  is represented by the union of diagrams  $Y := Y_1 \cup Y_2$ . It is easily seen that  $\text{length } Z = \text{length } Z_1 + \text{length } Z_2 - \text{length } R$ . The universal property of  $Z$  as an amalgam is verified immediately.*

We prove the following result.

**Theorem 1.** *The category of commutative associative Artinian algebras with unity over a field  $k, \bar{k} = k$ , can be supplied with fibred products. Dually, the category of 0-dimensional schemes over  $k, \bar{k} = k$ , is supplied with amalgamated sums.*

## Purely transcendental extensions of the field $\mathbf{Q}$ as base fields of csp-rings

**E. A. Timoshenko**

Tomsk State University

The symbols  $\mathbf{N}$  and  $\mathbf{Q}$  denote the sets of all natural numbers and all rational numbers respectively. Let  $L$  be some infinite set of primes. If  $p \in L$ , then by  $\mathbf{Z}_p$  we denote the field of residue classes modulo  $p$ . Let

$$K_L = \prod_{p \in L} \mathbf{Z}_p, \quad T_L = \bigoplus_{p \in L} \mathbf{Z}_p \subset K_L.$$

By a *regular csp-ring* we mean any subring  $R$  of the ring  $K_L$  such that  $T_L \subset R$  and the quotient ring  $R/T_L$  is a field (for a general definition

of a csp-ring see [1]). Note that the regular csp-rings are exactly those csp-rings which are regular in the sense of von Neumann.

The field  $R/T_L$  as well as every field isomorphic to it will be called a *base field* of the regular csp-ring  $R$ . It is easy to see that every such field (i.e., a field that can be embedded in  $K_L/T_L$  as a subring) has characteristic zero and a cardinality that does not exceed the cardinality of the continuum  $\mathfrak{c}$ .

Let  $\mathfrak{ie}_L$  denote the smallest possible cardinality of a set  $B \subset K_L$  with the property

$$\begin{aligned} &\text{for every } (k_p)_{p \in L} \in K_L \text{ there is } (d_p)_{p \in L} \in B \\ &\text{such that } k_p = d_p \text{ for infinitely many } p \in L. \end{aligned}$$

We introduce an order relation  $\prec$  on the set  $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$  of all functions  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  as follows:  $z' \prec z$  if and only if we have  $z'(i) < z(i)$  for almost all  $i \in \mathbf{N}$ . A subset  $C$  of  $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$  is called *bounded* if there exists a function  $z \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$  such that  $z' \prec z$  for all  $z' \in C$ . By  $\mathfrak{b}$  we denote the smallest possible cardinality of an unbounded subset of  $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ ; it is easy to check that the cardinal number  $\mathfrak{b}$  (known as the *bounding number*) satisfies  $\aleph_1 \leq \mathfrak{b} \leq \mathfrak{c}$ . It is known [2] that each of the possibilities  $\aleph_1 = \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ ,  $\aleph_1 = \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$ ,  $\aleph_1 < \mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ ,  $\aleph_1 < \mathfrak{b} < \mathfrak{c}$  is consistent with the system ZFC of axioms of set theory; it can be shown that the cardinal  $\mathfrak{ie}_L$  has similar properties. The author also proved that each of the inequalities  $\mathfrak{b} < \mathfrak{ie}_L$  and  $\mathfrak{b} > \mathfrak{ie}_L$  is consistent with ZFC.

It was proved in [1] that every purely transcendental extension of  $\mathbf{Q}$  having transcendence degree  $\leq \aleph_1$  is a base field of some regular csp-ring. This result can be sharpened:

**Theorem 1.** *If a purely transcendental extension of the field  $\mathbf{Q}$  has transcendence degree  $\leq \max(\mathfrak{b}, \mathfrak{ie}_L)$ , then it is a base field of some regular csp-ring  $R \subset K_L$ .*

The author was supported by the Ministry of Education and Science of Russia (project 14.B37.21.0354) and by Tomsk State University (project 2.3684.2011).

## References

1. Timoshenko E. A. Base fields of csp-rings // Algebra i Logika. 2010. V. 49. № 4. P. 378–385.

2. Blass A. Combinatorial cardinal characteristics of the continuum, in: Handbook of set theory // Dordrecht: Springer. 2010. V. 1. P. 395–489.

## **Minimal quasivarieties of nilpotent Moufang loops non-associative and non-commutative**

**V. I. Ursu**

Institute of Mathematics Simion Stoilow of the  
Romanian Academy Technical University of Moldova

The theory of quasivarieties is one of the most important compartments of the universal algebra. The basis of this theory was set by A. I. Mal'cev [1-3]. A deeper exposure of this theory can be found in the monograph by V.A. Gorbunov [4]. The special attention is paid to important problem on description of the lattice of quasivarieties of algebras (mentioned in [2] and [4]). In this work we describe all minimal non-abelian quasivarieties for nilpotent Moufang loops:

- minimal non-associative quasivarieties of commutative Moufang loops;
- minimal non-associative and non-commutative quasivarieties of Moufang A-loops with one own minimal non-associative sub-quasivariety of commutative Moufang loops and one own minimal non-commutative sub-quasivariety of groups;
- minimal non-associative and non-commutative quasivarieties of Moufang loops with one single own non-commutative subquasivariety of groups;
- minimal non-commutative quasivarieties of groups.

Also is showed that the lattice formed of the sub-quasivarieties of the variety generated by a free Moufang loop of rank of any of these minimal quasivarieties has the cardinality of the continuum.

Therefore, the lattice of the quasivarieties of any nilpotent non-abelian variety of Moufang loops has the cardinality of the continuum and, hence, cannot be finite or countable. For some of these quasivarieties are constructed the examples of non-associative Moufang loops.

For instance, the smallest non-associative and non-commutative nilpotent Moufang loop has 16 elements and forms the basis of the Cayley-Dixon algebra.

## References

1. Mal'cev, A.I. Several remarks on quasivarieties of algebraic systems.// Algebra i Logika. 1966. V. 5, №3. P. 3–9.
2. Mal'cev, A.I. Some borderline problems of algebra and logic// Proc. Internat. Congr. Math. 1968., P. 217–231.
3. Mal'cev, A.I. Algebraic systems. Moscow: Nauka. 1970.
4. Gorbunov, V.A. Algebraic Theory of Quasivarieties. Novosibirsk: Nauchnaya kniga. 1998.

## On infinite Alperin groups with abelian second commutator subgroups

**B. M. Veretennikov**

Ural federal university

J.L. Alperin studied in [1] groups in which all 2-generated subgroups have a cyclic commutator subgroup. Such groups are called Alperin groups. It was proved in [1] that, for odd prime  $p$ , finite Alperin  $p$ -groups are metabelian; i.e., they have an abelian commutator subgroup. However, finite Alperin 2-groups may be nonmetabelian. For example, a nonmetabelian finite Alperin 2-group with second commutator subgroup of order 2 was constructed in [2], and infinite series of finite Alperin 2-groups with second commutator subgroups of orders 2 and 4 were constructed in [3].

In [4,5] the author proved the existence of finite Alperin 2-groups with cyclic second commutator subgroup of arbitrarily large order and with elementary abelian second commutator subgroup of arbitrary rank.

In this communication we propose two theorems. Below  $d(G)$  is the minimal number of generators of the group  $G$ .

**Theorem 1.** *Let  $n$  be a positive integer,  $n \geq 3$  and let a group  $G$  be defined by generators  $a_i, f_{ij}, \tau_{ijk}$ , where  $1 \leq i, j, k \leq n$ , and defining relations:*

- 1)  $a_i^2 = 1$ , 2)  $[a_i, a_j] = f_{ij}$ ,  
 3)  $[f_{ij}, a_k] = f_{jk}^2 f_{ki}^2 \tau_{ijk}^{-2}$ , 4)  $[\tau_{ijk}, a_s] = 1$ ,  
 5)  $[f_{ij}, f_{ks}] = \tau_{kjs} \tau_{ksi}$ , 6)  $(f_{ij} f_{jk} f_{ki})^4 = \tau_{ijk}$ ,  
 7)  $\tau_{sij} \tau_{sjk} \tau_{ski} = \tau_{ijk}$  for all positive integers  $i, j, k, s \in [1, n]$ .

Then the following statements are valid:

I)  $d(G) = n$ ,  $G = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ ,  $|a_i| = 2$  for any  $i \in [1, n]$ ,  $d(G') = \binom{n}{2}$ ,  $G' = \langle f_{ij} | 1 \leq i < j \leq n \rangle$ ,  $G'' = \prod_{2 \leq i < j \leq n} \langle \tau_{1ij} \rangle$  – the free abelian

group of rank  $\binom{n-1}{2}$ ,  $G'' \leq Z(G)$ ;

II)  $G$  is an Alperin group, moreover for any  $x, y \in G$  at least one of the following equalities is true:  $[x, y, y] = 1$  or  $[x, y, y] = [x, y]^{-2}$ .

The following theorem is easily deduced from theorem 1.

**Theorem 1.** *For any finitely generated abelian group  $H$  there exists an infinite Alperin group  $G$ , generated by involutions, whose second commutator subgroup  $G''$  is isomorphic to  $H$ .*

## References

1. Alperin J. L. On a special class of regular  $p$ -groups // Trans. Am. Mat. Soc. 1963. V. 106. №1. P. 77-99.
2. Veretennikov B. M. A conjecture of Alperin // Sib. Mat. Zh. 1980. V. 21. P. 200-202.
3. Veretennikov B. M. On finite 3-generated 2-groups of Alperin // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2007. V. 4. P. 155-168.
4. Veretennikov B. M., Finite Alperin 2-groups with cyclic second commutants, Algebra i Logika // 2011. V. 50. №3. P. 226-244.
5. Veretennikov B. M., On finite Alperin 2-groups with elementary abelian second commutants // Sib. Mat. Zh. 2012. V. 53. №3. P. 431-443.

# The canonical form of elements of Chevalley groups over semilocal rings without unity

**T. Yu. Voitenko, V. M. Levchuk**

Siberian Federal University, Krasnoyarsk

The well-known Bruhat decomposition  $BNB = \bigcup_{\omega \in W} Bn_{\omega}U_{\omega}^{-}$  Chevalley group  $G(K)$  over a field  $K$  [1] (see the notation *ibid*) gives the canonical form

$$bn_{\omega}u \quad (b \in B, \omega \in W, u \in U_{\omega}^{-}).$$

When  $K$  is a semilocal ring with Jacobson radical  $J = \text{rad } K$ , we denote by  $V_{\omega, J}^{+}$  the congruence subgroup of level  $J$  in the group  $V_{\omega}^{+} = \langle X_r | r, \omega(r) \in \Phi^{-} \rangle$ . The following theorem gives the canonical form (see also [2, Theorem 3.6]).

**Theorem 1.** *The group  $G(K)$  admits the factorization  $\bigcup_{\omega \in W} B \cdot V_{\omega, J}^{+} \cdot n_{\omega}U_{\omega}^{-}$  and each its element is uniquely expressible in the form*

$$bvn_{\omega}u \quad (\omega \in W, v \in V_{\omega, J}^{+}, u \in U_{\omega}^{-}, b \in B).$$

At the same time, the problem of constructing a canonical form and defining relations of the generalized Chevalley groups over semilocal rings (not necessary with a unity) is being solved.

The research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project No. 12-01-00968).

## References

1. Carter. R. Simple groups of Lie type. New-York: Wiley and Sons. 1972. 331 p.
2. Levchuk V. M. Model-theoretic and structural issues algebras and Chevalley groups // Mat. forum (Itogi nauki. The south of Russia). 2012. V. 6. P. 75 – 84.

# Gröbner-Shirshov bases and complexity of plactic monoids

Yuqun Chen

School of Math. Sciences, South China Normal University, Guangzhou, China

Let  $A = \{\sigma_i | i \in I\}$  with a well ordered index set  $I$ . Then we call  $Pl(A) := sgp\langle A | \Omega \rangle$  a plactic monoid on the alphabet set  $A$ , see [4], where the Knuth relations  $\Omega$  consists of

$$\sigma_i \sigma_k \sigma_j = \sigma_k \sigma_i \sigma_j \quad (i \leq j < k), \quad \sigma_j \sigma_k \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_k \quad (i < j \leq k).$$

We present the plactic algebra on an arbitrary alphabet set  $A$  by row generators and column generators respectively. We give Gröbner-Shirshov bases for such presentations. In the case of column generators, a finite Gröbner-Shirshov basis is given if  $A$  is finite. From the Composition-Diamond lemma for associative algebras, it follows that the set of Young tableaux is a linear basis of plactic algebra. As the result, it gives a new proof that Young tableaux are normal forms of elements of plactic monoid. This result was proved by D.E. Knuth [3] in 1970, see also Chapter 5 in [4]. By using column generators expression of plactic monoid, we show that the Dehn function and complexity of such a plactic monoid are equivalent to quadratic.

Joint work with L.A. Bokut, Jing Li and Weiping Chen.

Partially supported by the NNSF of China (11171118) and the Program on International Cooperation and Innovation, Department of Education, Guangdong Province (2012gjhz0007).

1. Bokut L.A., Yuqun Chen. Gröbner-Shirshov bases and their calculation // [arxiv.org/abs/1303.5366](http://arxiv.org/abs/1303.5366)
2. Bokut L.A., Yuqun Chen, Shum K. P. Some new results on Groebner-Shirshov bases // Proceedings of International Conference on Algebra – 2010, Advances in Algebraic Structures. 2012. P. 53-102.
3. D.E. Knuth, Permutations, matrices, and generalized Young tableaux // Pacific J. Math. 1970. V. 34. P. 709-727.
4. Lascoux A., B. Leclerc and J. Y. Thibon, The plactic monoid. Algebraic Combinatorics on Words. Cambridge Univ. Press. 2002.
5. Selected works of A.I. Shirshov, Eds L.A. Bokut, V. Latyshev, I. Shestakov, E. Zelmanov, Trs M. Bremner, M. Kochetov, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin. 2009.

## Содержание

|                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Гончаров С. С., Ершов Ю. Л., Левчук В. М., Мазуров В. Д.,<br/>Сенашов В. И., Созутов А. И., Черников Н. С.</i>                  |    |
| Владимир Петрович Шунков .....                                                                                                     | 3  |
| <i>Абызов А. Н.</i>                                                                                                                |    |
| $I_0^*$ - модули .....                                                                                                             | 7  |
| <i>Алеев Р. Ж.</i>                                                                                                                 |    |
| Квадраты в разбиениях .....                                                                                                        | 8  |
| <i>Алеев Р. Ж., Тюрина И. А.</i>                                                                                                   |    |
| Конечные простые группы, в которых централизаторы элементов<br>с малым числом простых делителей .....                              | 10 |
| <i>Александрова И. О.</i>                                                                                                          |    |
| О числе слов, не содержащих подслов определенного вида ....                                                                        | 12 |
| <i>Александрова И. О.</i>                                                                                                          |    |
| О системах порождающих некоторых групп<br>с 3-транспозициями .....                                                                 | 14 |
| <i>Архаров Д. В., Гурин А. М., Петров Л. В., Попов А. Н.,<br/>Черный А. С., Ромакина Л. Н., Тимофеев А. В.</i>                     |    |
| Об алгоритме распознавания типов многогранников .....                                                                              | 15 |
| <i>Атнагулова Р. А.</i>                                                                                                            |    |
| Задача факторизации, когда одна из подалгебр состоит<br>из кососимметрических матриц .....                                         | 18 |
| <i>Башкин М. А.</i>                                                                                                                |    |
| Однородные нерасщепимые супермногообразия с ретрактом<br>$\mathbb{CP}^{1 4}_{k_2+k_3+k_4-2, k_2, k_3, k_4}$ при $k_4 \neq 0$ ..... | 19 |
| <i>Белоногов В. А.</i>                                                                                                             |    |
| К гипотезе о полупропорциональных характерах .....                                                                                 | 20 |
| <i>Белоусов И. Н., Махнев А. А.</i>                                                                                                |    |
| О графах, в которых окрестности вершин – сильно регулярные<br>графы без треугольников с собственным значением 3 .....              | 22 |

|                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Беляев Ю. Н.</i>                                                                           |    |
| Рекуррентные соотношения для симметрических многочленов $n$ -го порядка .....                 | 23 |
| <i>Беняш-Кривец В. В., Говорушко И. О.</i>                                                    |    |
| О многообразиях представлений групп Баумслага-Солитера ..                                     | 24 |
| <i>Бондаренко А. А.</i>                                                                       |    |
| О бирациональной композиции квадратичных форм над полем функций .....                         | 26 |
| <i>Бондаренко В. М., Тертичная Е. Н.</i>                                                      |    |
| О полугруппах с определяющими соотношениями вида $xy = 0$ и их матричных представлениях ..... | 28 |
| <i>Бредихин Д. А.</i>                                                                         |    |
| О группоидах отношений .....                                                                  | 28 |
| <i>Брюханов О. В.</i>                                                                         |    |
| Нильпотентная аппроксимируемость фундаментальных групп трёхмерных Sol-многообразий .....      | 29 |
| <i>Веревкин И. В.</i>                                                                         |    |
| Преобразования Эйлера-Дарбу для уравнения Фоккера-Планка .....                                | 31 |
| <i>Вершина С. В.</i>                                                                          |    |
| Группы расщепления неразложимых $p$ -локальных групп без кручения .....                       | 32 |
| <i>Вечтомов Е. М., Петров А.А.</i>                                                            |    |
| О многообразии полуколец с идемпотентным умножением ....                                      | 33 |
| <i>Вильданов В. К.</i>                                                                        |    |
| Определяемость абелевых групп своими группами автоморфизмов .....                             | 35 |
| <i>Воронина О. А.</i>                                                                         |    |
| Об одновременном приведении элементов свободных абелевых групп к положительному виду .....    | 36 |

|                                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Глухов М. М.</i>                                                                                                                                     |    |
| Применение метода Нидеррайтера-Шпарлинского<br>оценки неполных тригонометрических сумм<br>к суммам над кольцами Галуа .....                             | 37 |
| <i>Горяинов С. В.</i>                                                                                                                                   |    |
| Об изоморфизме графов Мэтсона и графов, получаемых<br>из двух других конструкций .....                                                                  | 39 |
| <i>Гриншпон С. Я., Гриншпон И. Э.</i>                                                                                                                   |    |
| Нормальная определяемость абелевых групп без кручения<br>своими голоморфами .....                                                                       | 41 |
| <i>Дашкова О. Ю.</i>                                                                                                                                    |    |
| Модули над групповыми кольцами групп, отличных<br>от своего коммутанта .....                                                                            | 43 |
| <i>Джусоева Н. А., Койбаев В. А.</i>                                                                                                                    |    |
| Нормализатор элементарной сетевой группы, связанной<br>с нерасщепимым максимальным тором в полной линейной группе<br>над полем рациональных чисел ..... | 45 |
| <i>Елисова А. П.</i>                                                                                                                                    |    |
| Редукция локальных автоморфизмов и локальных<br>дифференцирований алгебр нильтреугольных матриц .....                                                   | 46 |
| <i>Ефимов К. С., Махнев А. А.</i>                                                                                                                       |    |
| О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны<br>с параметрами $(88, 27, 6, 9)$ .....                                                         | 47 |
| <i>Ешкеев А. Р.</i>                                                                                                                                     |    |
| О центральных типах $\Delta$ – $PM$ теорий в обогащении<br>автоморфизмом .....                                                                          | 48 |
| <i>Желябин В. Н., Попов А. А., Шестаков И. П.</i>                                                                                                       |    |
| Координатное кольцо $n$ -мерной сферы и некоторые примеры<br>дифференциально простых алгебр .....                                                       | 50 |
| <i>Жизневский П. А.</i>                                                                                                                                 |    |
| О неприводимых частично композиционных формациях<br>нильпотентного дефекта 2 .....                                                                      | 51 |

|                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Зенков В. И.</i>                                                                                  |    |
| Представление корневой подгруппы из $L_n(p^m)$ в виде пересечения двух силовских $p$ -подгрупп ..... | 53 |
| <i>Кайгородов И. Б.</i>                                                                              |    |
| Теорема Фаркаша для алгебр йордановой скобки .....                                                   | 54 |
| <i>Камловский О. В.</i>                                                                              |    |
| Число элементов на отрезках выходных последовательностей фильтрующих генераторов .....               | 55 |
| <i>Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.</i>                                                               |    |
| О новых примерах наследственных локальных сверхрадикальных формаций .....                            | 57 |
| <i>Капцов О. В.</i>                                                                                  |    |
| Пассивные множества алгебры дифференциальных рядов ....                                              | 59 |
| <i>Карпов А. В.</i>                                                                                  |    |
| Обращение перестановочного многочлена над примарным кольцом .....                                    | 60 |
| <i>Касаткина Ю. С., Касаткина А. С.</i>                                                              |    |
| О представлении подкодов одного класса АГ-кодов в виде след-кода .....                               | 61 |
| <i>Климина А. С., Жданов О. Н.</i>                                                                   |    |
| Оптимизация выбора параметров для факторизационного алгоритма Полларда .....                         | 63 |
| <i>Ковалёв С. П.</i>                                                                                 |    |
| Категория вычислительных систем .....                                                                | 64 |
| <i>Ковыршина А. И.</i>                                                                               |    |
| Стабильные элементы свободных нильпотентных групп ранга два .....                                    | 66 |
| <i>Кондратьев А. С.</i>                                                                              |    |
| Распознаваемость по графу простых чисел группы $E_7(3)$ ....                                         | 68 |

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Кондратьев А. С., Храмцов И. В.</i>                                                          |    |
| О конечных непростых 4-примарных группах с несвязным графом<br>простых чисел .....              | 69 |
| <i>Корешков Н. А.</i>                                                                           |    |
| Теоремы Ли и Энгеля для лиевых пучков .....                                                     | 70 |
| <i>Коробов А. А.</i>                                                                            |    |
| О стабильности группы автоморфизмов конечномерного<br>векторного пространства над телом .....   | 72 |
| <i>Коробов О. А.</i>                                                                            |    |
| О группах с маленьким централизатором почти регулярной<br>инволюции .....                       | 73 |
| <i>Корпачева М. А., Грищенкова Л. В.</i>                                                        |    |
| О произведениях $\tau$ -замкнутых классов групп .....                                           | 74 |
| <i>Корпачева М. А., Кирюшина М. В.</i>                                                          |    |
| О классах групп, индуцированных подгрупповыми<br>функторами .....                               | 75 |
| <i>Корпачева М. А., Левшенкова Ю. А.</i>                                                        |    |
| О $\tau$ -замкнутых подформациях $\omega$ -всерных формаций .....                               | 76 |
| <i>Кощеева А. К.</i>                                                                            |    |
| Новые константы в суперинтуиционистской логике $L3$ .....                                       | 77 |
| <i>Кравцова О. В.</i>                                                                           |    |
| Некоторые подгруппы автоморфизмов полуполевого<br>плоскостей .....                              | 78 |
| <i>Кукарцев А. М.</i>                                                                           |    |
| О действии группы Джевонса на множестве бинарных<br>последовательностей и булевых функций ..... | 81 |
| <i>Кулпешов Б. Ш.</i>                                                                           |    |
| Циклически упорядоченные группы и о-минимальность .....                                         | 82 |
| <i>Кучерявый С. И., Чагров А. В.</i>                                                            |    |
| О «модальных» вариантах результатов А. В. Кузнецова<br>50-летней давности .....                 | 83 |

|                                                                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Ларин С. В.</i>                                                                                             |    |
| Об одном классе подрешеток решетки подпространств<br>конечномерного векторного пространства над конечным полем | 85 |
| <i>Литаврин А. В.</i>                                                                                          |    |
| Автоморфизмы нильподалгебр алгебр Шевале малых лиевых<br>рангов                                                | 86 |
| <i>Лукьянчук А. Н., Римацкий В. В.</i>                                                                         |    |
| Аксиоматизация линейной логики Знания и Времени $LTK_r$                                                        | 87 |
| <i>Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Энрико Ябара</i>                                                              |    |
| О группах периода 72                                                                                           | 88 |
| <i>Макоший А. И.</i>                                                                                           |    |
| Знакопеременные группы в атласе конечных простых<br>( $2 \times 2, 2$ )-порожденных групп                      | 89 |
| <i>Манагарова Н. С.</i>                                                                                        |    |
| О строгой вещественности унитарной группы матриц<br>над полем характеристики 2                                 | 90 |
| <i>Маслова Н. В., Ревин Д. О.</i>                                                                              |    |
| О неабелевых композиционных факторах конечной группы,<br>минимальной относительно простого спектра             | 92 |
| <i>Махнев А. А., Падучих Д. В.</i>                                                                             |    |
| О графах, в которых окрестности вершин сильно регулярны<br>с параметрами (144,39,6,12)                         | 93 |
| <i>Молодориц М. И.</i>                                                                                         |    |
| Классовые кольца характеров спорадических групп                                                                | 94 |
| <i>Насыбуллов Т. Р.</i>                                                                                        |    |
| Классы скрученной сопряженности в элементарных группах<br>Шевалле                                              | 96 |
| <i>Оспичев С. С.</i>                                                                                           |    |
| О полурешетках Роджерса конечных семейств<br>в иерархии Ершова                                                 | 97 |

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Остыловский А. Н.</i>                                                                                  |     |
| Применение алгебраических методов для оценки устойчивости<br>некоторых компьютерных вычислений .....      | 98  |
| <i>Павлюк И. И., Теняева Л. И.</i>                                                                        |     |
| О сопряжении центральных модуляторов .....                                                                | 99  |
| <i>Панов С. В.</i>                                                                                        |     |
| Полуполя и полуполевого плоскости нечетного порядка .....                                                 | 100 |
| <i>Парватов Н. Г.</i>                                                                                     |     |
| Полиномиальные подстановки и их циклы над примарным<br>кольцом .....                                      | 101 |
| <i>Пашковская О. В.</i>                                                                                   |     |
| Развитие понятия равномерного произведения подгрупп .....                                                 | 102 |
| <i>Рацеев С. М.</i>                                                                                       |     |
| Об экспонентах некоторых ассоциативных алгебр .....                                                       | 104 |
| <i>Римацкий В. В.</i>                                                                                     |     |
| Базис допустимых правил логик конечной глубины над $S_4$ ..                                               | 105 |
| <i>Рожков А. В.</i>                                                                                       |     |
| О локальном распределении простых чисел .....                                                             | 107 |
| <i>Рожков А. В.</i>                                                                                       |     |
| Шунковские условия конечности в группах автоморфизмов<br>однородных деревьев .....                        | 108 |
| <i>Романьков В. А., Хисамиев Н.Г.</i>                                                                     |     |
| Экзистенциально замкнутые подгруппы свободных<br>нильпотентных групп .....                                | 109 |
| <i>Сафонов В. Г.</i>                                                                                      |     |
| О свойствах однопорожденных $l_{\omega}^{\tau}$ -формаций .....                                           | 110 |
| <i>Сафонова И. Н.</i>                                                                                     |     |
| О приводимых $c_{\omega}^{\omega}$ -формациях с $\mathfrak{N}_{\omega}^{\omega}$ -дефектом $\leq 2$ ..... | 111 |
| <i>Семенчук В. Н., Велесницкий В.Ф.</i>                                                                   |     |
| Конечные группы, у которых подгруппы Шмидта<br>обобщенно субнормальны .....                               | 113 |

|                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Сенашов А. В.</i>                                                                                |     |
| О выпуклых соединениях многогранников $M_3, M_8, M_{20}$ .....                                      | 114 |
| <i>Сенашов В. И.</i>                                                                                |     |
| О почти слойно конечных группах .....                                                               | 115 |
| <i>Скорая Т. В.</i>                                                                                 |     |
| Базис полилинейной части многообразия $\tilde{\mathbf{V}}_3$ алгебр Лейбница                        | 116 |
| <i>Смелянский Д. М.</i>                                                                             |     |
| Свойства эффективности интуиционистской теории множеств,<br>содержащей обобщенный тезис Черча ..... | 117 |
| <i>Созутов А. И., Дураков Е. Б.</i>                                                                 |     |
| О некоторых почти-областях, точно дважды транзитивных<br>группах и $Z^*$ -теореме .....             | 119 |
| <i>Созутов А. И., Кузнецов А. А., Синицин В. М.</i>                                                 |     |
| Генетические коды некоторых групп с 3-транспозициями ....                                           | 121 |
| <i>Созутов А. И., Попов А. М.</i>                                                                   |     |
| О группах с $H$ -фробениусовыми элементами .....                                                    | 122 |
| <i>Созутов А. И., Янченко М. В.</i>                                                                 |     |
| О локально конечных подгруппах групп Шункова<br>конечного ранга .....                               | 124 |
| <i>Сорокина М. М.</i>                                                                               |     |
| О $\Omega$ -спутниках $\Omega$ -расслоенных формаций конечных групп ...                             | 125 |
| <i>Степаненко В. А., Турчин П. П.</i>                                                               |     |
| Решение дробных дифференциальных уравнений<br>в задачах акустики фрактально-неоднородных сред ..... | 126 |
| <i>Степанова А. А., Батулин Г. И.</i>                                                               |     |
| Примитивная нормальность класса проективных полигонов .                                             | 127 |
| <i>Сулейманова Г. С.</i>                                                                            |     |
| Большие элементарные абелевы унитарные подгруппы<br>групп лиева типа .....                          | 128 |

|                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Тарасов Ю. С.</i>                                                                                                  |     |
| О группах подстановок с конечными параметрами<br>рассеивания .....                                                    | 130 |
| <i>Тимофеев И. А.</i>                                                                                                 |     |
| Порождающие тройки инволюций групп $SL_6(\mathbb{Z})$ и $SL_{10}(p)$ ..                                               | 130 |
| <i>Тихоненко Т. В.</i>                                                                                                |     |
| О произведениях конечных групп из заданных классов .....                                                              | 132 |
| <i>Трофимук А. А.</i>                                                                                                 |     |
| О конечных разрешимых группах с ограничениями<br>на Фиттинговские силовские подгруппы их факторов .....               | 133 |
| <i>Троякова Г. А.</i>                                                                                                 |     |
| О периодических группах с нильпотентными конечными<br>подгруппами .....                                               | 135 |
| <i>Фарукшин В. Х.</i>                                                                                                 |     |
| Предпроективные и прединъективные объекты категории<br>$K$ -разложимых локальных групп .....                          | 135 |
| <i>Филиппова А. Н., Филиппов К. А.</i>                                                                                |     |
| О группах Шункова, насыщенных простыми трёхмерными<br>унитарными группами .....                                       | 136 |
| <i>Филипповский В. А.</i>                                                                                             |     |
| Об одном подходе к оценке сложности формул узкого<br>исчисления предикатов .....                                      | 137 |
| <i>Храмцов Д. Г.</i>                                                                                                  |     |
| Свойство Хаусона для убывающих HNN-расширений<br>конечнопорожденных абелевых групп .....                              | 140 |
| <i>Циовкина Л. Ю.</i>                                                                                                 |     |
| О существовании некоторых серий реберно симметричных<br>дистанционно регулярных накрытий клик с $\lambda = \mu$ ..... | 142 |
| <i>Чернышев Г. В.</i>                                                                                                 |     |
| К категорному определению иерархических структур .....                                                                | 143 |

|                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Чехлов А. Р.</i>                                                                                                                                     |     |
| Абелевы группы с инвариантными мономорфизмами .....                                                                                                     | 144 |
| <i>Шанько Ю. В.</i>                                                                                                                                     |     |
| Алгебраические конструкции, возникающие при построении<br>решений с функциональным произволом дифференциальных<br>уравнений в частных производных ..... | 147 |
| <i>Швецова А. В.</i>                                                                                                                                    |     |
| Одно необходимое условие конечности кодлины многообразия<br>алгебр Лейбница .....                                                                       | 148 |
| <i>Шестаков А. И.</i>                                                                                                                                   |     |
| Тернарные дифференцирования простых йордановых<br>супералгебр с полупростой четной частью .....                                                         | 149 |
| <i>Шмидт А. В.</i>                                                                                                                                      |     |
| Об автомодельных решениях задачи осесимметричной<br>турбулентной струи .....                                                                            | 151 |
| <i>Шпырко О. А.</i>                                                                                                                                     |     |
| Производная $\pi$ -длина и нильпотентная $\pi$ -длина конечных<br>$\pi$ -разрешимых групп .....                                                         | 152 |
| <i>Arslanov M. M.</i>                                                                                                                                   |     |
| Definable relations in the Turing degree structures .....                                                                                               | 153 |
| <i>Bokut L. A.</i>                                                                                                                                      |     |
| Two remarks on Gröbner—Shirshov bases method for associative<br>and Lie algebras .....                                                                  | 156 |
| <i>Buturlakin A. A., Vasil'ev A.V.</i>                                                                                                                  |     |
| On a Borovik's conjecture .....                                                                                                                         | 157 |
| <i>Chernikov N. S.</i>                                                                                                                                  |     |
| Shunkov groups with some minimal conditions .....                                                                                                       | 158 |
| <i>Egorychev G. P.</i>                                                                                                                                  |     |
| A new definition and properties of several matrix functions<br>over different rings .....                                                               | 159 |

|                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Gupta C. K., Timofeenko A. V.</i>                                                                                                                    |     |
| The Golod 2-group with infinite subgroups generated<br>by involutions .....                                                                             | 159 |
| <i>Klimakov A. V.</i>                                                                                                                                   |     |
| Homogeneous Almost Primitive Elements of Free<br>Nonassociative Algebras .....                                                                          | 161 |
| <i>Koichiro Harada</i>                                                                                                                                  |     |
| Simple Groups and Sylow Subgroups .....                                                                                                                 | 163 |
| <i>Kuznetsov M. I., Shmelev A. A.</i>                                                                                                                   |     |
| Vaughan-Lee algebras $V7$ and $V8$ and related Lie algebras .....                                                                                       | 164 |
| <i>Levchuk V. M., Starikova O. A.</i>                                                                                                                   |     |
| Problems of classification of finite semifield planes, QF-schemes<br>and quadrics of projective spaces .....                                            | 166 |
| <i>Nuzhin Ya. N.</i>                                                                                                                                    |     |
| Groups contained between groups of Lie type over the nonperfect<br>fields of characteristic 2 and 3 .....                                               | 167 |
| <i>Rybakov V. V.</i>                                                                                                                                    |     |
| Unification and Admissible rules for paraconsistent minimal<br>Johannssons' logic $\mathbf{J}$ and positive intuitionistic logic $\mathbf{IPC}^+$ ..... | 168 |
| <i>Savelyeva N.</i>                                                                                                                                     |     |
| On some properties of $\pi$ -normal Fitting classes .....                                                                                               | 170 |
| <i>Timofeeva N. V.</i>                                                                                                                                  |     |
| Amalgam for 0-dimensional schemes .....                                                                                                                 | 171 |
| <i>Timoshenko E. A.</i>                                                                                                                                 |     |
| Purely transcendental extensions of the field $\mathbf{Q}$ as base fields<br>of csp-rings .....                                                         | 172 |
| <i>Ursu V. I.</i>                                                                                                                                       |     |
| Minimal quasivarieties of nilpotent Moufang loops non-associative<br>and non-commutative .....                                                          | 174 |

*Veretennikov B. M.*

On infinite Alperin groups with abelian second commutator  
subgroups ..... 175

*Voitenko T. Yu., Levchuk V. M.*

The canonical form of elements of Chevalley groups over semilocal  
rings without unity ..... 177

*Yuqun Chen*

Gröbner-Shirshov bases and complexity of plactic monoids ..... 178

Научное издание

**АЛГЕБРА И ЛОГИКА:  
ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**

Международная конференция,  
посвященная памяти В. П. Шункова

(Красноярск, 21–27 июля 2013 года)

Тезисы докладов

Редактор Н. А. Варфоломеева  
Компьютерная верстка: О. А. Кравченко

Подписано в печать 16.07.2013. Печать плоская. Формат 60×84/16  
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 11,16. Тираж 150 экз. Заказ № 2725

Издательский центр  
Библиотечно-издательского комплекса  
Сибирского федерального университета  
660041, Красноярск, пр. Свободный, 79  
Тел./факс (391) 206-21-49, e-mail: [rio@lan.krasu.ru](mailto:rio@lan.krasu.ru)

Отпечатано Полиграфическим центром  
Библиотечно-издательского комплекса  
Сибирского федерального университета  
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а  
Тел./факс (391) 206-26-67, 206-26-49  
E-mail: [print\\_sfu@mail.ru](mailto:print_sfu@mail.ru); <http://lib.sfu-kras.ru>