АЛГЕБРА И ЛОГИКА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов Международной
конференции, посвященной
70-летию В. М. Левчука

Красноярск, 24–29 июля 2016 г.

Красноярск, 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации

Сибирский федеральный университет

Институт математики
Сибирского отделения Российской Академии наук

Институт вычислительного моделирования
Сибирского отделения Российской Академии наук

*При поддержке Российского фонда фундаментальных исследований,
грант 16-01-20429-г*

АЛГЕБРА И ЛОГИКА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов Международной конференции,
посвященной 70-летию В. М. Левчука

Красноярск, 24–29 июля 2016 г.

Красноярск
СФУ
2016

УДК 512(07)
ББК 22.14я73
А456

Ответственные за выпуск: С. И. Башмаков, И. Н. Зотов,
Я. Н. Нужин, А. И. Созутов

А456 **Алгебра и логика: теория и приложения** : тез. докл. Междунар. конф., посвящ. 70-летию В. М. Левчука. Красноярск, 24–29 июля 2016 г. / отв. за вып. : С. И. Башмаков, И. Н. Зотов, Я. Н. Нужин [и др.]. – Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2016. – 132 с.

ISBN 978-5-7638-3517-5

Представленные материалы конференции посвящены актуальным вопросам алгебры и математической логики.

Предназначены всем интересующимся проблемами в области математики.

УДК 512(07)
ББК 22.14я73

Электронный вариант издания см.:
http:/catalog.sfu-kras.ru

ISBN 978-5-7638-3517-5

О неизоморфных группах, имеющих изоморфные многообразия n-мерных представлений

А. А. Адмиралова, В. В. Беняш-Кривец

Белорусский государственный университет, Минск

Пусть $G = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$ — конечно-порожденная группа и K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Для любого гомоморфизма $\rho : G \to GL_n(K)$ набор элементов $(\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m)) \in GL_n(K)^m$ удовлетворяет всем определяющим соотношениям группы G, и поэтому соответствие $\rho \mapsto (\rho(g_1), \ldots, \rho(g_m))$ задает биекцию между множеством $\mathrm{Hom}(G, GL_n(K))$ и аффинным многообразием $R_n(G) \subset GL_n(K)^m$, которое называют многообразием n-мерных представлений группы G.

В [1] было получено описание многообразий представлений групп Баумслага — Солитера $BS(p,q)$, которые имеют копредставление

$$BS(p,q) = \langle a, t \mid ta^p t^{-1} = a^q \rangle,$$

где p и q не равны нулю. В дальнейшем мы будем рассматривать группы $BS(p,q)$ такие, что $p > |q| > 1$ и p, q — взаимно простые числа.

В работе [2] получено описание всех подгрупп конечного индекса групп Баумслага — Солитера. Установлено, что все подгруппы индекса m в группе $BS(p,q)$ изоморфны группе H_m, имеющей копредставление

$$H_m = \langle a_1, \ldots, a_m, b \mid a_i^p = a_{i+1}^q, i = 1, \ldots, m-1, b a_m^p b^{-1} = a_1^q \rangle.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Многообразия представлений $R_n(H_m)$ и $R_n(BS(p^m, q^m)$ бирегулярно изоморфны. При этом группы H_m и $BS(p^m, q^m)$ не изоморфны.*

Эта теорема дает бесконечную серию примеров попарно не изоморфных бесконечных конечно порожденных групп, имеющих изоморфные многообразия n-мерных представлений.

Список литературы

1. В. В. Беняш-Кривец, И. О. Говорушко. Многообразия представлений и характеров групп Баумслага — Солитера // Тр. МИАН. 2016. Т. 292. С. 26–42.

2. Ф. А. Дудкин. Подгруппы конечного индекса в группах Баумслага — Солитера // Алгебра и логика. 2010. Т. 49, № 3. С. 331–345.

О группах с периодическими определяющими соотношениями

В. С. Атабекян

Ереванский государственный университет, Ереван

В докладе будут представлены некоторые конкретные свойства, которые однозначно характеризуют n-периодические произведения групп, введенные С. И. Адяном в 1976 г. С использованием этих свойств полученные ранее ряд результатов о свободных бернсайдовых группа $B(m, n)$ можно усилить и распространить на n-периодические произведения разных семейств групп. Например, если некоторая нециклическая подгруппа H n-периодического произведения данного семейства групп не сопряжена никакой подгруппе компонент этого произведения, то в H содержится подгруппа, изоморфная свободной бернсайдовой группе бесконечного ранга $B(\infty, n)$. Если при этом подгруппа H конечно порождена, то она равномерно неаменабельна. Однозначно описываются также конечные подгруппы n-периодических произведений. Выяснилось, что n-периодические произведения многих семейств групп являются C^*-простыми и т.д. Будут представлены также недавние результаты об автоморфизмах и полугруппах эндоморфизмов групп с периодическими определяющими соотношениями.

Выделенные изогении в малом ветвлении

С. С. Афанасьева, С. В. Востоков
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

В настоящей работе описаны формальные группы, для которых построен выделенный гомоморфизм, позволяющий в дальнейшем строить систему образующих соответствующего формального модуля, удобную для получения явных формул спаривания.

Пусть K_0 — локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$) с кольцом целых $\mathcal{O}_0$ и простым элементом π_0; q — порядок поля вычетов поля K_0; K — конечное расширение поля K_0, с кольцом целых $\mathcal{O}$ и простым элементом π; N — подполе инерции в K/K_0, $\mathcal{O}_N$ — его кольцо целых; e_0 — индекс ветвления K/K_0; v_K — нормирование в поле K. Будем предполагать, что $v_K(\pi_0) < q$.

Следующая теорема дает явную классификацию формальных $\mathcal{O}_0$-модулей.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda(X) \in K[[X]]$, $\lambda(X) \equiv X \mod \deg 2$ *и* $\lambda(X) = \sum_{k=0}^{e_0-1} \pi^k \lambda_k(X)$, *где* $\lambda_k(X) \in N[[X]]$. *Тогда* $\lambda(X)$ *является логарифмом* m*-мерного формального* $\mathcal{O}_0$*-модуля над* $\mathcal{O}$ *тогда и только тогда, когда для некоторых элементов* $u \in \mathcal{O}_N[[\Delta]]$, $v \in \mathcal{O}[[\Delta]]$, *где* $u \equiv \pi_0 \mod \Delta$, $v = \pi_0 - \pi r_1 - \ldots - \pi^{e_0-1} r_{e_0-1}$, $r_i \in \mathcal{O}_N[[\Delta]]\Delta$, $1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1$ *выполнены сравнения*

$$\begin{cases} u\lambda_0(X) \equiv 0 \mod \pi_0 \\ r_i\lambda_0(X) + \pi_0\lambda_i(X) \equiv 0 \mod \pi_0,\ 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1 \end{cases}. \tag{1}$$

Пусть F — одномерный формальный $\mathcal{O}_0$-модуль типа (u, v), где $u = \pi_0 - a_h B \Delta^h$, $B \in (1 + \mathcal{O}_N[[\Delta]]\Delta)$, $v \equiv 0\ (\mod (\pi_0, \Delta^h))$, $v = \pi_0 - \pi r_1 - \ldots \pi^{e_0-1} r_{e_0-1}, r_i = \sum_{j=1}^{h} \rho_j^{(i)} \Delta^j, 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1, \rho_j^{(i)} \in \mathcal{O}_N$.

Пусть $\lambda = \sum_{i=0}^{e_0-1} \pi^i \lambda_i(X)$, $\lambda_i(X) \in \mathcal{O}_N[[X]]$. Положим $\mu := \sum_{i=0}^{e_0-1} \pi^i \mu_i(X)$, где

$$\mu_0(X) = B\lambda_0^{\sigma^h}(X); \mu_i(X) =$$
$$= -a_h^{-1}\rho_h^{(i)} \left(\lambda_0^{\sigma^h}(X) - \frac{a_h^{\sigma^h} \mu_0^{\sigma^h}}{\pi_0}(X^{q^h}) \right) - \frac{a_h^{-1} r_i a_h \mu_0(X)}{\pi_0}, 1 \leqslant i \leqslant e_0 - 1.$$

Теорема 2. *1) Если $\lambda(X)$ — логарифм формального $\mathcal{O}_0$-модуля типа (u,v), то $\mu(X)$ — логарифм формального $\mathcal{O}_0$-модуля типа $(u^{\sigma^h}B^{-1}, a_h^{-1}va_h)$.*

2) Пусть $f(X)$ ряд из $\mathcal{O}_N[[X]]$, причем $\begin{cases} f(X) \equiv \frac{\pi_0}{a_h}X \mod \deg 2 \\ f(X) \equiv X^{q^h} \mod \pi_0 \end{cases}$. *Тогда существует формальный модуль F типа (u,v) с логарифмом $\lambda(X)$, для которого $\left[\frac{\pi_0}{a_h}\right]_{F,G}(X) = \lambda_G^{-1}(\frac{\pi_0}{a_h}\lambda_F(X)) = f(X)$, где $G = \mathcal{A}(F)$.*

Таким образом, так же как и для формальных групп Хонды (см. [1]), на множестве рассматриваемых формальных групп построен оператор $\mathcal{A}$, задающий цепочку $\mathcal{O}_0$-модулей $F \xrightarrow{f} F_1 \xrightarrow{f_1} F_2 \to \cdots \to F_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} F_n$.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-00393.

Список литературы

1. О. В. Демченко. Новое в отношениях формальных групп Любина — Тэйта и формальных групп Хонды // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10, № 5. С. 77–84.

О максимальных подалгебрах алгебры частичных ультрафункций

С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

Пусть $A = \{0,1\}$ и $F = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций: $P_{2,n}^{\bar{*}} = \{f | f : A^n \to F\}, P_2^{\bar{*}} = \bigcup_n P_{2,n}^{\bar{*}}$, $P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\bar{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in A^n\}, P_2 = \bigcup_n P_{2,n}$. Функции из P_2 называют булевыми функциями, из $P_2^{\bar{*}}$ – мультифункциями на A.

Для того чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots, f_n(x_1,\ldots,x_m))$, где $f, f_1, \ldots, f_n \in P_2^{\bar{*}}$, определяла мультифункцию $g(x_1,\ldots,x_m)$, следуя [1], определим значения мультифункции f на наборах из подмножеств множества A следующим образом: если $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in A^m$, то

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{если не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$. Это определение позволяет вычислить значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in F^n$.

Если мультифункции на A рассматриваются с данной суперпозицией, то их называют частичными ультрафункциями на A.

Как известно, множество всех частичных ультрафункций на A можно определить как алгебру с некоторым набором операций [2]. Для упрощения записи используется следующая кодировка: $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow 2$. Обозначим $Pol(R)$ класс функций, сохраняющих предикат R.

Теорема 1. *Класс $Pol(R)$ является максимальной подалгеброй алгебры частичных ультрафункций на A, где*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & * & * & * & 0 & 1 & 2 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & 2 & * \end{pmatrix}$$

или

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & * & * & * & 1 & 0 & 2 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & * & * & * & * & * & * & 1 & 0 & 2 & * \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев. Минимальные частичные ультраклоны на двухэлементном множестве // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Матем. 2014. Т. 9. С. 3–9.

2. Н. А. Перязев. Алгебры не всюду определенных функций // Междунар. конф. «Алгебра и ее приложения»: тез. докл. Красноярск, 2007. С. 104.

О расширениях сильно регулярных графов без треугольников с собственным значением 4

И. Н. Белоусов, А. А. Махнев

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

М. С. Нирова

Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик

Дж. Кулен предложил задачу изучения дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин — сильно регулярные графы с неглавным собственным значением $\leq t$ для данного натурального числа t. Заметим, что сильно регулярный граф с нецелым собственным значением является графом в половинном случае, а вполне регулярный граф, в котором окрестности вершин — сильно регулярные графы в половинном случае, либо имеет диаметр 2, либо является графом Тэйлора. Таким образом, задача Кулена может быть решена пошагово для $t = 1, 2, \ldots$. Ранее задача Кулена была решена для $t = 3$ (см. [1]). В [2] получена редукция задачи Кулена для $t = 4$ к графам с исключительными окрестностями. В [3] найдены параметры исключительных сильно регулярных графов с неглавным собственным значением 4. В частности, сильно регулярный граф без треугольников с неглавным собственным значением 4 имеет параметры (352,26,0,2), (352,36,0,4), (392,46,0,6), (552,76,0,12), (667,96,0,16) или (784,116,0,20). В данной работе изучены дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин имеют указанные параметры.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф, в котором окрестности вершин сильно регулярны с параметрами* $(352, 26, 0, 2)$, $(352, 36, 0, 4)$, $(392, 46, 0, 6)$, $(552, 76, 0, 12)$, $(667, 96, 0, 16)$ *или* $(784, 116, 0, 20)$. *Тогда* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(9593, 352, 36, 12)$.

Работа поддержана грантом РНФ (проект 14-11-00061).

Список литературы

1. А. А. Махнев, Д. В. Падучих. Дистанционно регулярные графы, в которых окрестности вершин сильно регулярны со вторым собственным значением, не большим 3 // Докл. Акад. наук. 2015. Т. 464, № 4. С. 396–400.

2. А. А. Махнев. Сильно регулярные графы со вторым собственным значением 4 и их расширения // Тр. Ин-та матем. Минск, 2015. Т. 23, № 2. С. 82–87.

3. А. А. Махнев, Д. В. Падучих. О расширениях сильно регулярные графов с собственным значением 4 // Тр. Ин-та матем. и механ. 2015. Т. 21, № 3. С. 233–255.

Периодические группы Шункова, насыщенные прямыми произведениями абелевых групп нечетного порядка и групп $U_3(2^n)$

А. А. Брит, К. А. Филиппов

Красноярский государственный аграрный университет, Красноярск

Пусть $\mathfrak{R}$ — множество групп. Будем говорить, что группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{R}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{R}$ [1].

Напомним, что группа G (сопряженно бипримитивно конечная группа в определении В.П. Шункова [2]) называется группой Шункова, если для любой конечной подгруппы $H \leq G$ в фактор-группе $N_G(H)/H$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную группу.

Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторое множество неизоморфных циклических групп нечетного порядка, а $\mathfrak{M}$ — некоторое множество неизоморфных групп $U_3(2^m)$. Положим

$$\mathfrak{R} = \{X \times Y \mid X \in \mathfrak{M}\ ,\ Y \in \mathfrak{N}\ ,\ (|X|, |Y|) = 1\}.$$

Таким образом, множество $\mathfrak{R}$ состоит из набора конечных групп, каждая из которых является прямым произведением двух групп X

и Y, причем группа X берется из множества $\mathfrak{M}$, а группа Y — из множества $\mathfrak{N}$, и порядки групп X и Y взаимнопросты.

Доказана следующая

Теорема 1. *Периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re$, обладает периодической частью $T(G)$, причем $T(G) \simeq (L \times V)$, где $L \simeq U_3(Q)$ для некоторого локального конечного поля Q характеристики 2, V — локально циклическая группа без инволюций и $\pi(L) \cap \pi(V) = \varnothing$.*

Список литературы

1. А. К. Шлепкин. Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // III междунар. конф. по алгебре: сб. тез. Красноярск, 1993. С. 369.
2. В. П. Шунков. Об одном классе p-групп // Алгебра и логика. 1970. Т. 9, № 4. С. 484–496.

О метабелевых 3-порожденных конечных 2-группах Альперина с гомоциклическим коммутантом

Б. М. Веретенников

Уральский федеральный университет, Екатеринбург

Группой Альперина называется группа, в которой любая 2-порожденная подгруппа имеет циклический коммутант. Пока не изучен даже класс таких метабелевых 3-порожденных конечных p-групп. Некоторые результаты в этом направлении получены в работе [1]. В частности, доказано, что если G – конечная p-группа Альперина, $p \neq 3$, $d(G) = d(G') = 3$, G' – гомоциклическая группа экспоненты p^l ($l \geq 1$), то $G_3 \leq (G')^{p^m}$, где $m = \left[\frac{l+1}{2}\right]$.

Предлагается следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть G — конечная 2-группа Альперина, $d(G) = d(G') = 3$, G' — гомоциклическая группа экспоненты 2^l, $\exp(G_3) = 2^r$, $0 \leq r \leq l - m$, где $m = \left[\frac{l+1}{2}\right]$.*

Тогда в G найдутся такие элементы a_1, a_2, a_3, что $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = G$ и

$$[a_i, a_j, a_k] = [a_i, a_j]^{-2^{l+1-r}}[a_j, a_k]^{2^{l-r}}[a_k, a_i]^{2^{l-r}}$$

для любых i, j, k, таких, что $1 \leq i, j, k \leq 3$.

Заметим, что $d(G)$ — минимальное число порождающих группы G, а $G_3 = [G, G']$.

Список литературы

1. Б. М. Веретенников. О конечных p-группах Альперина с гомоциклическим коммутантом // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, №. 4. С. 53–65.

О полукольцах непрерывных частичных действительнозначных функций

Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина

Вятский государственный университет, Киров

Работа относится к общей теории полуколец непрерывных функций [1] и продолжает [2]. Рассматриваются идеалы и конгруэнции полуколец $CP(X)$ непрерывных частичных действительнозначных функций.

Пусть X — топологическое пространство и $CP(X) = \bigcup\{C(Y) : Y \subseteq X\}$ — полукольцо всех непрерывных частичных $\mathbf{R}$-значных функций на X с поточечными операциями сложения и умножения частичных функций f и g на их общей области определения $D(f) \cap D(g)$. Через $C(X)$ обозначается кольцо всех непрерывных $\mathbf{R}$-значных функций на X.

Теорема 1. *Для любого топологического пространства X максимальные идеалы полукольца $CP(X)$ имеют вид $(CP(X) \setminus C(X)) \cup M$, где M — произвольный максимальный идеал кольца $C(X)$.*

Множество $\mathrm{Id}CP(X)$ всех идеалов полукольца $CP(X)$ относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$ есть решетка с операциями $sup(I; J) = I \cup J \cup (I + J)$ и $inf(I; J) = I \cap J$. Решетки $\mathrm{Id}CP(X)$ модулярны.

Теорема 2. *Для любого топологического пространства X решетка идеалов $IdCP(X)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда X — наследственное F-пространство.*

Конгруэнция ρ на полукольце $CP(X)$ называется D-конгруэнцией, если $f, g \in CP(X)$ и $D(f) = D(g)$ влекут $f\rho g$. Наименьшей D-конгруэнцией на полукольце $CP(X)$ служит конгруэнция $\rho(D)$: для всех $f, g \in CP(X)$

$$f\rho(D)g \Leftrightarrow D(f) = D(g).$$

Лемма 1. *Каждая собственная конгруэнция ρ на полукольце $CP(X)$ содержится в собственной D-конгруэнции $\rho \vee \rho(D)$.*

Теорема 3. *Для любого топологического пространства X максимальные конгруэнции на полукольце $CP(X)$ совпадают с двухклассовыми D-конгруэнциями.*

Заметим, что для неодноэлементного тихоновского пространства X решетка конгруэнций полукольца $CP(X)$ не модулярна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проектная часть госзадания Минобрнауки РФ «Функциональная алгебра и полукольца», проект № 1.1375.2014/К).

Список литературы

1. Е. М. Вечтомов, В. В. Сидоров, Д. В. Чупраков. Полукольца непрерывных функций. Киров: ВятГГУ, 2011. С. 312.

2. Е. М. Вечтомов, Е. Н. Лубягина. Полукольца частичных функций // «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения»: матер. XIII Междунар. конф., посвящ. 85-летию проф. С. С. Рышкова. Тула, 2015. С. 148–150.

К теории мультипликативно идемпотентных полуколец

Е. М. Вечтомов, А. А. Петров

Вятский государственный университет, Киров

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot\rangle$, такая, что $\langle S, +\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S, \cdot\rangle$ — полугруппа, умножение $\cdot$ дистрибутивно относительно сложения $+$ с обеих сторон.

Полукольцо S называется *мультипликативно идемпотентным* (*аддитивно идемпотентным*), если на нем тождественно $xx = x$ (соответственно, $x + x = x$). Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, назовем *идемпотентным.* Полукольцо S назывется *моно-полукольцом,* если на нем тождественно $x+y = xy$. Теории мультипликативно идемпотентных полуколец посвящены работы [1, 2].

Множество $\operatorname{Id} S$ всех идеалов полукольца S относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$ есть решетка с операциями

$$I \vee J = \sup(I, J) = I \cup J \cup (I + J) \text{ и } \inf(I, J) = I \cap J.$$

Отношение эквивалентности ρ на произвольном полукольце S называется *конгруэнцией*, если для всех $x, y, z \in S$ из $x\rho y$ следует $(x + z)\rho(y + z), (xz)\rho(yz), (zx)\rho(zy)$.

Множество $\operatorname{Con} S$ всех конгруэнций полукольца S является решеткой относительно включения конгруэнций:

$$\rho \subseteq \tau \text{ означает, что } a\rho b \Rightarrow a\tau b \text{ для любых } a, b \in S.$$

Теорема 1. *Для любого мультипликативно идемпотентного полукольца S решетка $\operatorname{Id} S$ всех его идеалов дистрибутивна.*

Пример 1. Решетка конгруэнций $\operatorname{Con} S$ мультипликативно идемпотентного полукольца S не обязана быть модулярной. Например, рассмотрим булеан $B(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ как идемпотентное моно-полукольцо с одной операцией $\cup$. Легко проверить, что решетка $\operatorname{Con} \langle B(\{a, b\}), \cup, \cup\rangle$ содержит 7 элементов и не модулярна.

Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ, проект №1.1375.2014/K.

Список литературы

1. Е. М. Вечтомов, А. А. Петров. Мультипликативно идемпотентные полукольца // Фунд. и прикл. матем. 2013. Т. 18, № 4. С. 41–70.

2. Е. М. Вечтомов, А. А. Петров. Полукольца с идемпотентным умножением. Киров: Радуга-ПРЕСС, 2015. С. 144.

Различные кластеризации в логических базах знаний и их оценка качества, коллективные алгоритмы

А. А. Викентьев

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

В работе рассматривается одна из актуальных задач — анализ логических высказываний из базы знаний. При анализе требуется найти близкие высказывания, выявить достоверные и т.д. Для кластеризации знаний, построения решающих функций на основе знаний — логических формул, надо ввести расстояние между формулами. В работе высказывания записаны в виде формул n-значной логики. С привлечением теории моделей определяются новые расстояния между формулами с учетом других параметров-весов рассматриваемых моделей в формулах

$$\rho(\varphi, \psi) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{|k-l|}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right), \qquad (1)$$

где $n^{|S(\Sigma)|}$ — количество всех моделей, $M\left(\frac{k}{n-1}, \frac{l}{n-1}\right)$ — тех моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$, а ψ — $\frac{l}{n-1}$; и аналогично обобщаются меры нетривиальности:

$$I(\varphi) = \rho(\varphi, 1) = \frac{1}{n^{|S(\Sigma)|}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-1-k}{n-1} M\left(\frac{k}{n-1}\right), \qquad (2)$$

где $M\left(\frac{k}{n-1}\right)$ — количество моделей, на которых формула φ принимает значение $\frac{k}{n-1}$. Отдельно рассматриваем меру пересечения моделей для пар формул. В работе доказаны свойства метрики для таких расстояний и мер нетривиальностей; они учитывают многозначность, схожи со свойствами величин в случае 2-значных и 3-значных логик Лукасевича, отвечают на вопросы Г. С. Лбова Г.С. и применяются для алгоритмов кластеризации формул. В случае 2 рассмотрены классы моделей, в которых делаем возможным в некоторых моделях истинными противоречивые суждения и не верности в некоторых моделях тождественно истинных формул, например свойство 2-значности логики. Для этих классов с их теорией моделей перенесены все результаты по расстояниям и мере опровержимости. Для всех способов введенных расстояний рассмотрены различные методы кластеризации формул на основе новых расстояний и мер нетривиальности, а также методы сравнения результатов — индексы качества. По различным расстояниям и их качеству кластеризации вводятся новые коллективные расстояния, а по ним коллективные кластеризации, которые в большинстве случаев дают лучшую кластеризацию множеств формул. Как следствие результаты полученные совместно с Л. Н. Кореневой, Р. А. Викентьевым, Е. С. Кабановой, В. В. Фефеловой и др. Мера значений истинности формулы на модели первого порядка может служить степенью нетривиальности (недостоверности) формулы. Результаты распространяются на многозначные формулы с переменными (первого порядка).

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проект 14–07–00851а, 14–7–00249а, кафедры ДМИ ММФ НГУ, АМЛ НГТУ.

Список литературы

1. Г. С. Лбов, Н. Г. Старцева. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.

2. Г. Кейслер, Ч. Ч. Чен. Теория моделей. М.: Мир, 1977.

3. А. А. Викентьев, Г. С. Лбов. О метризации булевой алгебры предложений и информативности высказываний экспертов // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 2. С. 174–176.

4. A. A. Vikentiev, G. S. Lbov. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997. V. 7, № 2. P. 175–183.

5. Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.

6. А. А. Викентьев, Л. Н. Коренева. К вопросу о расстояниях между формулами, описывающими структурированные объекты // Математические методы распознавания образов (ММРО-99). М.: РАН ВЦ, 1999. С. 151–154.

Несимметричная система шифрования на идентификационных данных, использующая функцию явного спаривания закона взаимности

С. В. Востоков

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

Р. П. Востокова

Балтийский государственный технический университет «ВОЕНМЕХ», Санкт-Петербург

И. А. Буданаев

Институт математики и информатики АН Республики Молдова, Кишинёв

В работе предлагается новый принцип создания ID-based system, основанный на использовании явного спаривания закона взаимности, полученного в [1, 2]. В настоящей работе мы используем явное спаривание Гильберта, найденное в [1] в случае кругового поля $Q_p(\xi)$, где ξ — первообразный корень степени p из 1 для протокола аутентификации без разглашения. А именно, рассмотрим мультипликативную группу степенных рядов $U = 1 + XZ_p[X]$. Пусть Δ — оператор Фробениуса на кольце рядов Лорана, действующий следующим образом на ряд $f(X)$ из $Z_p[X]$:

$$\Delta f(X) = f^{\Delta}(X) = f(X^p).$$

Определим далее функцию $l(f(X))$ для ряда $f(X)$ из $U(X)$ группы:

$$l(f(X)) = \tfrac{1}{p} \log \tfrac{f(X)^p}{f(X)^{\Delta}}.$$

Определим теперь спаривание $\langle *, * \rangle$ на $U(X) \times U(X)$ по формуле

$$\langle f(X), g(X)\rangle = \{res_x(l(f(X))\tfrac{d}{dX}\log g(X) - \\ -l(g(X))\tfrac{d}{dX}\tfrac{\Delta}{p}\log f(X))X^{-p}\} \mod p.$$

Это спаривание билинейно, кососимметрично и независимо по каждому аргументу. Последнее свойство означает, что если мы ряд $f(X)$ делим на ряд Эйзенштейна и заменяем далее ряд $f(X)$ на остаток, то спаривание не меняется.

Протокол аутентификации без разглашения

Алиса A и проверяющий V — участники протокола. Секретом, известным Алисе, является некоторый многочлен $a(X)$ из группы $U(X)$. Обоим участникам протокола известно число s, многочлен $Eis(X)$ и многочлен $A(X) = a^s \mod Eis(X)$. В соответствии с классической задачей протокола аутентификации без разглашения Алиса должна доказать проверяющему знание секретного многочлена $a(X)$, не разгласив его.

Доказательство безопасности рассматриваемого протокола определяются свойствами предлагаемой функции спаривания и неполиномиальной сложностью задачи дискретного логарифмирования в кольце многочленов с целыми коэффициентами, которая в общем случае полиномиально сводится к дискретному логарифмированию в конечных полях [3].

Первый автор поддержан грантом РФФИ (проект 14-01-00393).

Список литературы

1. С. В. Востоков. Явная форма закона взаимности // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1978. Т. 42, № 6. С. 1288–1321; English transl. in Math. USSR-Izv. 1979. V. 13.

2. С. В. Востоков. Символ Гильберта в дискретно номированном поле // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 94. 1979. С. 50–69; English transl. in J. Soviet Math. 1982. V. 19, № 1. P. 1006–1019.

3. А. В. Маркелова. Дискретное логарифмирование в произвольных факторкольцах многочленов от одной переменной над конечным полем // Дискрет. матем. 2010. Т. 22, №. 2. С. 120–132.

Симметричные сечения в полях ограниченных формальных степенных рядов

Н. Ю. Галанова

Томский государственный университет, Томск

Пусть G — линейно упорядоченная делимая группа, $\gamma_0 = max|\Gamma|$, Γ — вполне антиупорядоченное подмножество G, β — регулярный кардинал, $\aleph_0 < \beta < \beta^+ \le \gamma_0 \le |G|$, $\mathbb{R}[[G,\beta]]$ — поле ограниченных формальных степенных рядов $x = \sum_{g\in G} r_g g$, где $r_g \in \mathbb{R}, supp(x) = \{g \in G | r_g \neq 0\}$ — вполне антиупорядоченное подмножество группы $G, |supp(x)| < \beta$. Используя результаты [1–5], где изучаются симметричные и несимметричные сечения в полях ограниченных формальных степенных рядов, получим

Теорема 1. *Пусть F — линейно упорядоченное, не архимедовски полное, вещественно замкнутое поле, G — группа архимедовых классов поля F. Если F имеет симметричные сечения разной конфинальности, то F не изоморфно никакому полю $\mathbb{R}[[G,\beta]]$, где $\aleph_0 < \beta \le \gamma_0 \le |G|$.*

Полагаем $\widetilde{x}_0 = \sum_{g\in\Gamma} 1g$, Γ — инверсно подобно кардиналу β^+. Пусть $\widetilde{x}_0(\alpha) = \sum 1g, g \in supp(\widetilde{x}_0)$, $g > \alpha$ — срезки ряда $\widetilde{x}_0$, $\widetilde{x}_0(\beta) := x_0$. Построим по трансфинитной рекурсии последовательность вложенных вещественно замкнутых полей $(F_\alpha)_{\beta\le\alpha<\beta^+}$ так, что $F_\beta = \overline{\mathbb{R}[[G,\beta]](x_0)}$ — вещественное замыкание простого трансцендентного расширения поля $\mathbb{R}[[G,\beta]]$; $F_\alpha = \overline{F_{\alpha-1}(\widetilde{x}_0(\alpha))}$(для непредельного ординала α); $F_\alpha = \overline{(\bigcup_{\beta\le\gamma<\alpha} F_\gamma)(\widetilde{x}_0(\alpha))}$(для предельного ординала α). Полагаем $F_0 := \bigcup_{\beta\le\alpha<\beta^+} F_\alpha$

Теорема 2. *1) F_0 является вещественно замкнутым линейно упорядоченным полем, $\mathbb{R}[[G,\beta]] \subset F_0 \subset \mathbb{R}[[G,\beta^+]]$.*
2) Поле F_0 имеет симметричные сечения конфинальности β^+.

Остаётся открытым вопрос, будет ли $F_0 = \mathbb{R}[[G,\beta^+]]$(изоморфно)? Существует ли вещественно замкнутое поле с разной конфинальностью симметричных сечений?

Список литературы

1. Г. Г. Пестов. К теории сечений в упорядоченных полях // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42, № 6, С. 1213–1456.
2. Н. Ю. Галанова. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов и нестандартной вещественной прямой // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 26–36.
3. N. Yu. Galanova. An investigation of the fields of bounded formal power series by means theory of cuts // Acta Appl. Math. 2005. V. 85. P. 121–126.
4. N. Yu. Galanova. Symmetric and asymmetric gaps in some fields of formal power series // Serdica Math. 2004. V. 30. P. 495–504.
5. Н. Ю. Галанова, Г. Г. Пестов. Симметрия сечений в полях формальных степенных рядов // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 174–185.

Применение сумм Гаусса для вычисления точных значений числа появлений элементов поля на циклах линейных рекуррентных последовательностей

М. М. Глухов
Академия криптографии РФ, Москва

О. В. Камловский
ООО «Центр сертификационных исследований», Москва

Решается задача получения точных значений частот $N(z,u)$ появлений элемента z поля $P = GF(q)$, $q = p^s$, p — простое, среди элементов $u(0), u(1), \ldots, u(T-1)$ ненулевой линейной рекуррентной последовательности (ЛРП) $u = (u(i))_{i=0}^{\infty}$ над полем P с неприводимым характеристическим многочленом $f(x) \in P[x]$ степени m и периода $T = T(f) = (q^m - 1)/d$, имеющей представление $u(i) = tr_P^Q(a\alpha^i)$, $i \geq 0$, где α — корень $f(x)$ в поле $Q = GF(q^m)$, а tr_P^Q — функция следа из поля Q в подполе P. Пусть d делит $p^j + 1$ для некоторого натурального числа j (говорят, что число p *полупримитивно* по модулю d), наименьшее такое j обозначим через l. Изучаемые последовательности u получаются в результате регулярной выборки с шагом d из ЛРП максимального периода $q^m - 1$.

В работе [1] для случая $q = p$ выписаны только типы распределений, но не указано значение $N(z, u)$. В работе [2] задача решена для случая когда $z = 0$, а P — произвольное поле. Полное решение рассматриваемой задачи приводится в работе [3, теорема 1.1], однако при доказательстве автор использовал неверное равенство (2.3) для суммы Гаусса, которое привело к ошибочным формулам.

Приведенные ниже теоремы позволяют получить полное решение поставленной задачи в ситуации, когда d — простое число. Обозначим $P^* = P \setminus \{0\}$. Все теоремы сформулированы во введенных выше обозначениях.

Теорема 1. *Пусть $p \geq 3$, $d = 2$, $z \in P^*$. Тогда, если $m = 2\lambda + 1$, то*

$$N(0, u) = \frac{q^{m-1} - 1}{2},$$

$$N(z, u) = \begin{cases} \left(q^{m-1} + \eta'(az)q^{\lambda}\right)/2, & \text{если } p \underset{4}{\equiv} 1, \\ \left(q^{m-1} + \eta'(az)(-1)^{\lambda s}q^{\lambda}\right)/2, & \text{если } p \underset{4}{\equiv} 3; \end{cases}$$

а если $m = 2\lambda$, то

$$N(z, u) = \begin{cases} \left(q^{m-1} + \eta'(a)q^{\lambda-1}\right)/2, & \text{если } p \underset{4}{\equiv} 1, \\ \left(q^{m-1} + \eta'(a)(-1)^{\lambda s}q^{\lambda-1}\right)/2, & \text{если } p \underset{4}{\equiv} 3, \end{cases}$$

$$N(0, u) = \begin{cases} \left(q^{m-1} - (q-1)\eta'(a)q^{\lambda-1} - 1\right)/2, & \text{если } p \underset{4}{\equiv} 1, \\ \left(q^{m-1} - (q-1)\eta'(a)(-1)^{\lambda s}q^{\lambda-1} - 1\right)/2, & \text{если } p \underset{4}{\equiv} 3, \end{cases}$$

где η' — квадратичный характер поля Q.

Теорема 2. *Пусть $d > 2$, p полупримитивно по модулю d, $d_1 = (\frac{q^m-1}{q-1}, d)$, $r = (ms)/(2l)$, γ – произвольный примитивный элемент поля Q. Тогда:*

1) если dr/d_1 – четное или d – нечетное или $(p^l + 1)/d$ – четное, то

$$N(0, u) = \begin{cases} \left(q^{m-1} + (-1)^r(q-1)q^{m/2-1} - 1\right)/d, & \text{если } a \notin \langle\gamma^{d_1}\rangle, \\ \left(q^{m-1} + (-1)^{r-1}(q-1)(d_1-1)q^{m/2-1} - 1\right)/d, & \text{если } a \in \langle\gamma^{d_1}\rangle; \end{cases}$$

2) если dr/d_1 — нечетное, d — четное, а $(p^l + 1)/d$ — нечетное, то

$$N(0,u)=\begin{cases}\left(q^{m-1}+(-1)^{r}(q-1)q^{m/2-1}-1\right)/d, \text{ если } a\in\langle\gamma^{d_1}\rangle \text{ или } a\notin\langle\gamma^{\frac{d_1}{2}}\rangle,\\ \left(q^{m-1}+(-1)^{r-1}(q-1)(d_1-1)q^{m/2-1}-1\right)/d, \text{ если } a\notin\langle\gamma^{d_1}\rangle \text{ и } a\in\langle\gamma^{\frac{d_1}{2}}\rangle.\end{cases}$$

Теорема 3. *Пусть в условиях теоремы 2: $d=d_1$, $z\in P^*$. Тогда 1) если r – четное число или d – нечетное число, или $\frac{p^l+1}{d}$ – четное, то*

$$N(z,u)=\begin{cases}\left(q^{m-1}+(-1)^{r-1}q^{m/2-1}\right)/d, & \text{если } a\notin\langle\gamma^{d}\rangle,\\ \left(q^{m-1}+(-1)^{r}(d-1)q^{m/2-1}\right)/d, & \text{если } a\in\langle\gamma^{d}\rangle;\end{cases}$$

2) если r – нечетное число, d – четное число, а $\frac{p^l+1}{d}$ – нечетное, то

$$N(z,u)=\begin{cases}\left(q^{m-1}+(-1)^{r-1}q^{m/2-1}\right)/d, \text{ если } a\in\langle\gamma^{d}\rangle \text{ или } a\notin\langle\gamma^{\frac{d}{2}}\rangle,\\ \left(q^{m-1}+(-1)^{r}(d-1)q^{m/2-1}\right)/d, \text{ если } a\notin\langle\gamma^{d}\rangle \text{ и } a\in\langle\gamma^{\frac{d}{2}}\rangle.\end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть в условиях теоремы 2: $d_1=1$, $z\in P^*$. Тогда 1) если $\frac{r(m+1)}{m}$ – четное число, или d – нечетное, или $\frac{p^l+1}{d}$ – четное, то*

$$N(z,u)=\begin{cases}\left(q^{m-1}+(-1)^{\frac{r(m+1)}{m}}(d-1)q^{\frac{m-1}{2}}\right)/d, & \text{если } -z^{-1}a\in\langle\gamma^{d}\rangle,\\ \left(q^{m-1}-(-1)^{\frac{r(m+1)}{m}}q^{\frac{m-1}{2}}\right)/d, & \text{если } -z^{-1}a\notin\langle\gamma^{d}\rangle;\end{cases}$$

2) если $\frac{r(m+1)}{m}$ – нечетное число, d – четное, а $\frac{p^l+1}{d}$ – нечетное, то

$$N(z,u)=\begin{cases}\left(q^{m-1}-(d-1)q^{\frac{m-1}{2}}\right)/d, \text{ если } -az^{-1}\notin\langle\gamma^{d}\rangle \text{ и } -az^{-1}\in\langle\gamma^{\frac{d}{2}}\rangle,\\ \left(q^{m-1}+q^{\frac{m-1}{2}}\right)/d, \text{ если } -az^{-1}\in\langle\gamma^{d}\rangle \text{ или } -az^{-1}\notin\langle\gamma^{\frac{d}{2}}\rangle.\end{cases}$$

Теорема 5. *Пусть в условиях теоремы 2: $d_1=2$, $z\in P^*$, нечетное простое p полупримитивно по модулю d, l_1 – наименьшее натуральное число такое, что $\frac{d}{2}|(p^{l_1}+1)$. Тогда*

$$N(z,u)=\begin{cases}\left(q^{m-1}+(-1)^{\frac{r_1}{m}}q^{(m-1)/2}(d-1)\right)/d, \text{ если } -z^{-1}a\in\langle\gamma^{d}\rangle \text{ и } d>4,\\ \left(q^{m-1}-(-1)^{\frac{r_1}{m}}q^{(m-1)/2}\right)/d, \text{ если } -z^{-1}a\notin\langle\gamma^{d}\rangle \text{ и } d>4,\\ \left(q^{m-1}+q^{\frac{m}{2}-1}\eta'(-z^{-1}a)\right)/4, \text{ если } d=4.\end{cases}$$

Используя алгоритм исследования случая $d_1=2$, можно получать результаты для любого фиксированного значения d_1, однако они потребуют рассмотрения большого количества случаев, возникающих из-за различных значений сумм Гаусса, и будут иметь очень громоздкие формулировки.

Список литературы

1. L. D. Baumert, R. J. McEliece. Weights of irreducible cyclic codes // Inf. and Control. 1972. V. 20. P. 158–175.

2. R. J. McEliece. Irreducible cyclic codes and Gauss sums // Combinatorics. 1975. P. 185–202.

3. A. S. Nelubin. Distribution of elements on cycles of linear recurrences over Galois fields // Formal power series and algebraic combinatorics. 12-th Int. conf. FPSAC. M., 2000. P. 534–542.

Σ-спецификация робототехнических систем реального времени

В. Н. Глушкова

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону

Для верификации дискретных систем реального времени используются временные автоматы, расширенные множеством переменных-часов с реальными значениями. Эти переменные используются локально для разных состояний автомата и задают количественные характеристики различных процессов, что затрудняет анализ моделируемой системы. Особенно сложными являются алгоритмы верификации систем с временными регионами, построенными как фактор-системы переходов по отношению эквивалентности.

Использование для спецификации поведения системы Σ-формул [1] исчисления предикатов 1-го порядка позволяет явно с использованием переменных (времени) выразить количественную информацию о временных свойствах событий системы. Верификация выполняется для модели системы переходов, заданной конечным автоматом с правилами КС-грамматики G вида $St_i \to \{Act\}^* St_j$, где St, Act—символы состояний и действий системы соответственно. Например, грамматика манипулятора "мышь" имеет правила: $Ms \to Click\ P1 \mid Final$; $P1 \to Click\ P2 \mid S\ Ms$; $P2 \to D\ Ms$, где $Click$—имя дествия, S, D, $Final$—характеристики результата действия ("простой", "двойной", "финал").

Правила КС-граматики G определяют типизированное множество иерархических списков, представляющих деревья выводов грамматики. Списки являются областью действия ограниченных кванторов, входящих в Δ_0-формулы логической спецификации (теории) системы. Ограниченные кванторы над иерархическими списками имеют следующий вид: $\forall x \dot{\in} y$, $\forall x \prec y$, где $\dot{\in}$—транзитивное замыкание отношения принадлежности, $\prec$ —отношение "левее"для элементов списка.

Значениями переменных сорта "время" являются константы t "моментального" времени или сегменты вида $[t_1, t_2]$, $(t_1, t_2]$ и т.д. Для выражения свойств поведения системы с неопределенными временными интервалами между двумя событиями используются термы сорта "символьные" (char), для которых допустимо применение специфичных операций.

Теория моделируемой системы трактуется как система определений функций и отношений, заданных на узлах дерева грамматики G. Результатом интерпретации теории Th является атрибутированное дерево действий, которое строится на основе прямого логического вывода с применением правил грамматики, приписанным к аксиомам теории Th. На полученном атрибутированном дереве можно за полиномиальное время относительно количества узлов дерева верифицировать свойства моделируемой системы, формализованные $\Delta_0 T$-формулами спецификации.

Список литературы

1. S. S. Goncharov, Yu. L. Ershov, D. I. Sviridenko. Semantic programming // Inf. processing. 1986. V. 11, № 10. P. 1093–1100.

Решение систем ОДУ при помощи задачи факторизации

И. З. Голубчик, Р. А. Атнагулова

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

Пусть $G = C_{n\times n}$ — алгебра $n \times n$ матриц над полем комплексных чисел C, $H = G[\lambda, \lambda^{-1}]$ — алгебра полиномов Лорана над G, $H_+ = \bigoplus_{i\geq 0} G \cdot \lambda^i$, $H_- = \bigoplus_{i<0} G \cdot \lambda^i$, a — постоянная матрица из G, $L = \lambda \cdot a + q$, q — переменная матрица из G, $M = P(\lambda, \lambda^{-1}, L)$ — полином от L, λ, λ^{-1}; $M = M_+ - M_-$, где $M_+ \in H_+, M_- \in H_-$.

Тогда матричное лаксово уравнение

$$\delta_t L = [L, M_+] \tag{1}$$

решается при помощи задачи факторизации (см. [1], с. 145).

В нашей работе рассмотрен случай пример, когда a и q зависят дополнительно от малого параметра ε. Пусть $n = 3m$, $a = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon^{-1}E_m & 0 \\ c & 0 & \varepsilon^{-1}E_m \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где c, d — постоянные матрицы размера $m \times m$ и $M = \sum_{k \in T} \varepsilon^{2k} \cdot \lambda^{-3k+1} \cdot \alpha_k L^{3k} + \beta\varepsilon\lambda^{-1} \cdot L^4$, где α_k и β — постоянные числа, не зависящие от ε, T — конечное множество. Тогда при $\varepsilon \to 0$ уравнение (1) для конкретных c, d, α_k, β имеет интересные редукции.

Список литературы

1. А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тян-Шанский. Интегрируемые системы. Теоретико-групповой подход. Ижевск: РХД, 2003. 351 с.

Универсальные обёртывающие алгебры Рота – Бакстера коммутативных, ассоциативных и лиевых преалгебр

В. Ю. Губарев

Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть A — алгебра многообразия Var. Линейный оператор R на A называется оператором Рота – Бакстера, если для любых $x, y \in A$ выполнено

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + xy).$$

В таком случае алгебра A называется Var-алгеброй Рота – Бакстера.

Прелиевы алгебры были независимо введены Кожулем, Винбергом и Герштенхабером в 1960-х годах, такие алгебры задаются тождеством $(xy)z - x(yz) = (yx)z - y(xz)$. В 1990 и 2000-х годах Лодей определил прекоммутативные и преассоциативные алгебры. В [1] и [2] было дано эквивалентное друг другу определение пре-Var-алгебры для любого многообразия Var.

Агуиар в 2000 г. заметил [3], что ассоциативная алгебра Рота – Бакстера относительно новых операций $x \succ y = R(x)y$, $x \prec y = xR(y)$ будет преассоциативной алгеброй. В [1] это было распространено на произвольное многоообразие Var. В [4] была доказана

Теорема 1. *Любая пре*-Var-*алгебра инъективно вкладывается в* Var-*алгебру Рота – Бакстера.*

В работе найден базис универсальной обёртывающей алгебры Рота – Бакстера (соответствующего многообразия) коммутативных, ассоциативных и лиевых преалгебр. Для описания базиса в лиевом случае используется конструкция свободной лиевой алгебры Рота – Бакстера [5, 6].

Доказано, что пара многообразий $(\mathrm{RBLie}, \mathrm{preLie})$ является PBW-парой [7]. Доказана нешрайеровость многообразий коммутативных, ассоциативных и лиевых алгебр Рота – Бакстера.

Автор поддержан грантом РНФ (проект № 14-21-00065).

Список литературы

1. C. Bai, O. Bellier, L. Guo et al. Splitting of operations, Manin products, and Rota – Baxter operators // Int. Math. Res. Not. IMRN. 2013. P. 485–524.

2. V. Yu. Gubarev, P. S. Kolesnikov. Operads of decorated trees and their duals // Comment. Math. Univ. Carolin. 2014. V. 55, № 4. P. 421–445.

3. M. Aguiar. Pre-Poisson algebras // Lett. Math. Phys. 2000. V. 54. P. 263–277.

4. V. Gubarev, P. Kolesnikov. Embedding of dendriform algebras into Rota – Baxter algebras // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, № 2. P. 226–245.

5. В. Ю. Губарев Свободные лиевы алгебры Рота – Бакстера // Сиб. матем. журн. (на рассмотрении). 13 с.

6. V. Yu. Gubarev, P. S. Kolesnikov. Groebner – Shirshov basis of the universal enveloping Rota – Baxter algebra of a Lie algebra // arXiv:1602.07409. 16 p.

7. A. A. Mikhalev, I. P. Shestakov. PBW-pairs of varieties of linear algebras // Communications in Algebra. 2014. V. 42, № 2. P. 667–687.

Элементарные сети (ковры) и линейные группы

Р. Ю. Дряева

Северо-Осетинский государственный университет, Владикавказ

В. А. Койбаев

Северо-Осетинский государственный университет,

Южный математический институт РАН, Владикавказ

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей, n — натуральное число. Система $\sigma = (\sigma_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n$, аддитивных подгрупп кольца R называется сетью [1] над кольцом R порядка n, если $\sigma_{ir}\sigma_{rj} \subseteq \sigma_{ij}$ при всех значениях индексов i, r, j. Для сети принята также терминология "ковер" [2]. Сеть, рассматриваемая без диагонали, называется элементарной сетью (элементарный ковер [3]).

Для элементарной сети $\sigma = (\sigma_{ij})$ мы определяем производную сеть $\omega = (\omega_{ij})$ и D-замыкание $\sigma^D = \Omega = (\Omega_{ij})$ элементарной сети σ (наименьшая (полная) сеть (ковер), содержащая элементарную сеть σ). Мы даем явное вычисление сети Ω. Доказывается справедливость включений $\omega \subseteq \sigma \subseteq \Omega$, при этом для любых $i \neq j$ и произвольного r справедливы включения $\Omega_{ir}\omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}, \;\; \omega_{ir}\Omega_{rj} \subseteq \omega_{ij}$. Для рассматриваемых конкретный полей этот результат дает существенную информацию о строении элементарной сети σ и элементарной сетевой группы $E(\sigma)$.

Результаты настоящей заметки были получены вторым автором в рамках государственного задания Минобрнауки России.

Список литературы

1. З. И. Боревич. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1978. Т. 75, № 5. С. 22–31.

2. М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков. Основы теории групп. М.: Наука, 1982. 288 с.

3. В. М. Левчук. Замечание к теореме Л. Диксона // Алгебра и логика. 1983. Т. 22, № 5. С. 504–517.

О числе $\tilde{V}_{m,t}$ всех собственных t-мерных подпространств пространства V_m над полем $GF(q)$

Г. П. Егорычев

Сибирский федеральный университет, Красноярск

В алгебре Шевалле над полем K, ассоциированной с произвольной системой корней, выделяют нильтреугольную подалгебру $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r(r \in \Phi^+)\}$. В [1] были поставлены две проблемы перечисления идеалов: специальных идеалов в алгебрах классических типов (проблема 1) и всех идеалов (проблема 2). При их решении возникает задача нахождения чисел $\tilde{V}_{m,t}$, $1 \leq t \leq m$, для которых в [2] была найдена следующая формула (кратного суммирования): $\tilde{V}_{m,1} = (q-1)^{m-1}$,

$$\tilde{V}_{m,t} = \sum_{1<j_1<\ldots<j_t\leq m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \prod_{k=1}^{t-1} \left(\frac{q^k-1}{q-1}\right)^{j_{k+1}-j_k-1}, \ 2 \leq t \leq m.$$

Здесь с помощью **авторского метода** интегрального представления и вычисления комбинаторных сумм найдено интегральное представление для чисел $\tilde{V}_{m,t}$ и, как следствие этого результата, найдены две новые вычислительные формулы (однократного суммирования) для этих чисел. Первая – рекуррентная, вторая – комбинаторная, как знакопеременная сумма (типа включения-исключения) произведений обычных и q-биномиальных коэффициентов. Ставится задача нахождения комбинаторно-алгебраической интерпретации (доказательства) этих формул.

Список литературы

1. G. P. Egorychev, V. M. Levchuk. Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bulletin. 2001. V. 35, № 2. P. 20–34.

2. В. П. Кривоколеско, В. М. Левчук. Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 1. С. 166–171.

Простые йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью

В. Н. Желябин

Институт математики имени С. Л. Соболева, Новосибирск

Пусть F — поле характеристики не 2, G — алгебра Грассмана. Тогда $G = G_0+G_1$ — Z_2-градуированная алгебра. Пусть $A = A_0+A_1$ — произвольная $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра. Тогда $G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$ является подалгеброй в алгебре $G \otimes A$ (тензорное произведение над полем F) и называется грассмановой оболочкой алгебры A.

Определение 1. *Супералгебра $J = J_0 + J_1$ ($\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра) называется йордановой супералгеброй тогда и только тогда, когда ее грассманова оболочка $G(J)$ — йорданова алгебра, то есть в $G(J)$ выполняются тождества:*

$$xy = yx,\ (x^2y)x = x^2(yx).$$

Четную часть супералгебры J будем обозначать через A, нечетную — через M.

Супералгебра $J = A+M$ называется абелевой, если A — ассоциативная алгебра, а M — ассоциативный A-модуль.

Теорема 1. *Пусть $J = A + M$ — простая йорданова абелева супералгебра. Тогда J — унитальная алгебра. Кроме того,*

1). четная часть A — дифференциально простая алгебра;

2). нечетная часть M является конечно порожденным проективным A-модулем ранга 1;

3). J вкладывается в простую супералгебру йордановой скобки.

В [1] показано, что для простой унитальной специальной йордановой супералгебры с ассоциативной четной частью справедливо $(A, M, A) = 0$, здесь (A, M, A) — векторное подпространство, порожденное ассоциаторами вида (a, m, b), где $a, b \in A$, $m \in M$. Кроме того, существуют простые унитальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью, для которых $(A, M, A) \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть $J = A + M$ — унитальная простая йорданова супералгебра с ассоциативной ниль-полупростой четной частью. Предположим, что $N = (A, M, A) \neq 0$. Тогда*

1). четная часть $A = A_0 + A_1$ — Z_2-градуированная алгебра, и A_1 является точным конечно порожденным проективным A_0-модулем ранга 1;

2). нечетная часть $M = M_0 \oplus N$ — прямая сумма A_0-модулей, причем $N \otimes_{A_0} M_0 \cong A_1$ — изоморфизм A_0-модулей. Кроме того, M_0, N являются точными конечно порожденными проективными A_0-модулями ранга 1;

3). $A_0 + M_0$ — простая унитальная абелева подсуперaлгебра в J.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00065).

Список литературы

1. В. Н. Желябин, И. П. Шестаков. Простые специальные супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. матем. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1046–1072.

Теоретико-модельные вопросы для колец нильтреугольных матриц и ассоциированных колец Ли

Ю. А. Зубакин, В. Р. Кияткин, В. М. Левчук

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Для алгебраических систем A и B фиксированной сигнатуры Σ вводят отношения $A \equiv B$ и $A \overset{2}{\equiv} B$ *элементарной эквивалентности* в языках 1-го и 2-го порядков соответственно [1]. Первая означает, что каждая закрытая формула языка 1-го порядка сигнатуры Σ, истинная на одной из систем, истинна и на другой. Отношение $A \overset{2}{\equiv} B$ определяется аналогично.

Одним из главных для различных классов линейных групп является вопрос о соответствии Мальцева: переносится ли их элементарная эквивалентность 1-й ступени на кольца коэффициентов? Согласно К. Видела [2] соответствие выполняется для колец $NT(n, K)$ ($n \geq 3$) нильтреугольных $n \times n$-матриц (с нулями на и над главной диагональю) над ассоциативными кольцами K с единицей. Доказано, что элементарная эквивалентность 2-й ступени колец $NT(n, K)$ над ассоциативными кольцами с единицей, вообще говоря, не переносится на кольца коэффициентов.

Теорема 1. *Пусть K – ассоциативное, но не коммутативное кольцо с единицей. Тогда существует такая формула 2-й ступени φ, что $\varphi \in Th(NT(n,K))$, но $\varphi \notin Th(K)$.*

При условии коммутативности кольца коэффициентов K соответствие Мальцева переносится на присоединённые группы кольца $NT(n,K)$ (они изоморфны унитреугольной группе $UT(n,K)$) [3] и на ассоциированные кольца Ли. В общем же случае соответствие Мальцева здесь нарушается [4].

Список литературы

1. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. С. 138.
2. Videla C. R. On the Model Theory of the Ring NT(n, R) // Pure and Appl. Algebra. 1988. V. 55. P. 289–302.
3. Belegradek O.V. Model Theory of Unitriangular Groups // Amer. Math. Soc. Transl. 1999. V. 195, № 2. P. 115.
4. Левчук В. М., Минакова Е. В. Элементарная эквивалентность и изоморфизмы локально нильпотентных матричных групп и колец // Докл. РАН. 2009. Т. 425, № 2. С. 165–168.

Векторные инварианты G_2 и $Spin_7$ над бесконечным полем нечетной характеристики

А. Н. Зубков

Институт математики имени С. Л. Соболева, СО РАН, Омский филиал, Омск

Исключительная простая группа G_2 является группой автоморфизмов алгебры октонионов $\mathbf{O}$. Поскольку G_2 сохраняет норму алгебры $\mathbf{O}$, а значит и ассоциированную с ней невырожденную билинейную форму, G_2 является подгруппой группы SO_8. Отметим, что G_2 лежит в подгруппе $Stab_{SO_8}(1_{\mathbf{O}}) \simeq SO_7$ и SO_8 содержит подгруппу, изоморфную $Spin_7$. Последнее означает, что $\mathbf{O}$ можно отождествить с 8-мерным спинорным представлением $Spin_7$.

Пусть G – это либо группа G_2, либо $Spin_7$. Группа G действует диагонально на пространстве m копий $\mathbf{O}$. Возникает естественный вопрос: найти порождающие алгебры векторных инвариантов

$K[\mathbf{O}^m]^G$. Впервые такое описание было получено в работе [1] в случае, когда $char K = 0$. Более концептуальное доказательство приведено в [2].

В случае поля ненулевой характеристики единственными результатами такого сорта были описания инвариантов нескольких векторов и ковекторов, полученные в [3] для всех классических групп. Что касается сформулированной выше проблемы описания инвариантов G_2 и $Spin_7$, или более широко, проблемы описания векторных инвариантов простых исключительных групп над (бесконечным) полем конечной характеристики, то за последние 30–40 лет не было никаких серъезных продвижений.

В докладе будет представлен оригинальный метод (разработанный совместно с И. П. Шестаковым), использующий теорию модулей с хорошей фильтрацией, теорию луп Муфанг и модулярную двойственность Хау (Howe). Мы покажем, что описание векторных G-инвариантов может быть сведено к описанию полилинейных G-инвариантов. Далее, полилинейные G-инварианты могут быть получены из инвариантов группы SO_7, действующей на внешней алгебре $\Lambda(V)$, где V – прямая сумма нескольких копий бесследовых октонионов. К сожалению, связь SO_7-инвариантов с G-инвариантами настолько нетривиальна, что исключает любую возможность прямых вычислений. Вместо этого мы используем элегантную процедуру, позволяющую понижать степень инвариантов без каких-бы то ни было вычислений.

Теорема 1. *(А. Н. Зубков, И. П. Шестаков) Пусть G — это либо группа G_2, либо $Spin_7$. Если $char K \neq 2$, тогда алгебра $K[\mathbf{O}^m]^G$ порождена элементами степени не выше 4. Более того, эти порождающие те же, что и в случае $char K = 0$.*

Список литературы

1. G. W. Schwarz. Invariant theory of G_2 and $Spin_7$ // Comment. Math. Helvetici. 1988. V. 63. P. 624–663.

2. R. E. Howe. The first fundamental theorem on invariant theory and spherical subgroups // Proc. Sym. Pure Math. 1994. V. 56, № 1. P. 333–346.

3. C. de Concini, C. Procesi. A characteristic free approach to invariant theory // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 330–354.

Алгебраический подход к уравнениям с частными производными

О. В. Капцов

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается бесконечномерное пространство $\mathbb{K}^T$ отображений из счетного множества T в полное нормированное поле $\mathbb{K}$. В пространстве $\mathbb{K}^T$ вводится топология прямого произведения и декартова система координат. Произвольной точке $a \in \mathbb{K}^T$ сопоставляется локальная алгебра $\mathcal{F}_a$ сходящихся степенных рядов. Каждый ряд из $\mathcal{F}_a$ зависит от конечного числа переменных, однако число этих переменных может быть как угодно большим. С помощью рядов из $\mathcal{F}_a$ вводятся аналитические функции на открытых множествах пространства $\mathbb{K}^T$ и аналитические отображения данного пространства. Это позволяет определить аналитические многообразия в $\mathbb{K}^T$. Вводится понятие нормализованной системы образующих идеала алгебры $\mathcal{F}_a$. Показано, что нули аналитических функций, соответствующие нормализованной системе, задают многообразие в $\mathbb{K}^T$.

Изучаются дифференцирования алгебры $\mathcal{F}_a$, пфаффовы (дифференциальные) формы и производные Ли от этих форм. Доказывается, что дифференцирования однозначно определяются действием на образующих алгебры $\mathcal{F}_a$. Вводятся инвариантные идеалы и подмодули. Далее рассматривается пространство (бесконечных) джетов $\mathbb{J} = \mathbb{K}^T$, где $T = \mathbb{N}_n \cup (\mathbb{N}_m \times \mathbb{N}^n)$, $\mathbb{N}_n = 1, \ldots, n$, $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел. На пространстве $\mathbb{J}$ вводятся операторы полного дифференцирования, канонические формы, контактные дифференцирования и симметрии систем уравнений с частными производными. Отмечается, что задачи вычисления симметрий и законов сохранения системы уравнений тесно связаны с проблемой проверки принадлежности элемента алгебры данному дифференциальному идеалу.

Доказывается, что если дифференциальные системы порождают один и тот же дифференциальный идеал, то они задают одинаковые ростки нулей. Затем определяются такие понятия как редукция ряда относительно дифференциальной системы, условия совместности, пассивные системы. Показано, что если система $S \subset \mathcal{F}_a$ пассивна, то ряд $f \in \mathcal{F}_a$ принадлежит дифференциальному идеалу, порожденному системой S, тогда и только тогда, когда f редуцируется к нулю относительно S. Основным результатом работы является теорема, в которой утверждается, что если дифференциальная система удовлетворяет некоторым условиям слабой разрешимости и совместности, то она пассивна в некоторой точке $a \in \mathbb{J}$ и задает аналитическое многообразие в окрестности этой точки. В качестве примера рассмотрено уравнение Дюбрей-Жакотен, описывающее плоские стационарные течения неоднородной жидкости.

Анализ числа рациональных точек кривых, возникающих из геометрических кодов Гоппы

Ю. С. Касаткина

Институт прикладной математики и информационных технологий, Балтийский федеральный университет имени И. Канта, Калининград

А. С. Касаткина

Западный филиал РАНХиГС, Калининград

Конструкция некоторых классов кодов требует кривые, обладающие достаточным числом рациональных точек. Для построения таких кривых возможно использовать кодовые слова малого веса. Этим кодовым словам можно поставить в соответствие кривые Артина — Шрайера. Соответствие, в свою очередь, может быть продолжено до подкодов, на которых достигается обобщенный вес Хемминга, и расслоенного произведения кривых Артина — Шрайера. В работе приводятся некоторые результаты, полученные в процессе построения кривых, в конструкции которых участвуют геометрические коды Гоппы $C_L(D, G)$ над конечным полем F_p с параметрами $[n, k]$.

Линейный код Гоппы, связанный с гладкой проективной кривой C над конечным полем, определяется следующим образом. Пусть C — абсолютно неприводимая гладкая проективная кривая над полем F_p. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — различные F_p-рациональные точки на C

и дивизор $D = P_1 + \ldots + P_n$. Дивизор G такой, что носители G и D не пересекаются. Линейное пространство

$$L(G) = \{f \in F_p(C)^* \,|(f) + G \geq 0\} \cup \{0\}$$

порождает линейное отображение

$$Ev : L(G) \to F_p^n, \quad f \mapsto (f(P_1), \ldots, f(P_n)).$$

Образ этого отображения есть линейный $[n, k]$-код $C_L(D, G)$ над конечным полем F_p. Пусть D_r — r-мерный подкод рационального кода Гоппы $C_L(D, aP_\infty)$, носитель которого удовлетворяет условию

$$|\chi(D_r)| = d_r(C_L(D, aP_\infty)).$$

Элементам базиса c_{R_i} этого подкода поставим в соответствие кривые Артина — Шрайера C_{R_i} с аффинным уравнением

$$y_i^p - y_i = R_i(x), 1 \leq i \leq r,$$

здесь элемент $R_i(x) \in U$ соответствует слову c_{R_i} [1]. F_p-векторное пространство $U \subseteq F_{p^m}(x)$ и подкод D_r связывает следующее соотношение:

$$Tr_{Con(D)}(U) = \left\{Tr_{Con(D)}(R)\,|R \in U\right\} = D_r,$$

где Tr – отображение следа

$$Tr : F_{p^m} \to F_p.$$

Подкоду D_r поставим в соответствие кривую C_{D_r} над полем F_{p^m}, задаваемую расслоенным произведением кривых C_{R_i}.Таким образом, подкоду наименьшего веса соответствует кривая над полем F_{p^m}. В работе [2] исследован тип этой кривой, в данной работе исследуются параметры кривой C_{D_r}. Получены следующие результаты.

Пусть E_U – поле рациональных функций кривой C_{D_r}. Для определения количества рациональных точек на кривой C_{D_r} обозначим:

$F = F_{p^m}(x)$.

$\mathrm{P}_F^1 = \{P\,|P \in \mathrm{P}_F, \ \deg P = 1\}$.

$S = \mathrm{P}_F^1 \backslash \operatorname{supp} Con(D)$.

$l = \left|\{Q \in \mathrm{P}_{E_U}^1 \,|Q \cap F \in S\}\right|$.

Тогда количество рациональных точек расширения E_U/F определяется по формуле

$$N(E_U) = p^r(n - d_r) + l,$$

где d_r — r-й обобщенный вес Хемминга кода $C_L(D, aP_\infty)$.

Список литературы

1. Ю. С. Касаткина. Алгоритм построения элементарных абелевых кривых // Вестн. Росс. гос. ун-та им. И. Канта. Сер. Физ.-мат. науки. 2006. № 10. С. 109–112.

2. Ю. С. Касаткина, А. С. Касаткина. Анализ рода кривой, соответствующей подкоду наименьшего веса рационального кода Гоппы // Вест. Волгоград. гос. ун-та. Сер. 1. Матем. Физ. 2014. Т. 23, № 4. С. 6–10.

Конечные группы с K-$\mathfrak{U}$-субнормальными вторыми и третьими максимальными подгруппами

В. А. Ковалева

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

Все рассматриваемые в сообщении группы являются конечными. Символ $\pi(G)$ обозначает множество простых делителей порядка группы G.

Подгруппа H группы G называется 2-*максимальной* (*второй максимальной*) подгруппой в G, если H является максимальной подгруппой некоторой максимальной подгруппы из G. Аналогично можно определить 3-*максимальные подгруппы* и т.д.

Работы, посвященные изучению n-максимальных подгрупп ($n > 1$), составили обширное направление теории конечных групп, обогащенное большим числом глубоких теорем и содержательных примеров. Так, например, в работе Ю. В. Луценко и А. Н. Скибы [1] было получено описание групп, все 2-максимальные или все 3-максимальные подгруппы которых являются субнормальными.

Напомним, что подгруппа H группы G называется $\mathfrak{U}$-*субнормальной в смысле Кегеля* [2] или K-$\mathfrak{U}$-*субнормальной* [3, с. 236] в G, если найдется такая цепь подгрупп $H = H_0 \leq H_1 \leq \cdots \leq H_t = G$, что либо H_{i-1} нормальна в H_i, либо $H_i/(H_{i-1})_{H_i}$ сверхразрешима для всех $i = 1, \ldots, t$. Заметим, что каждая субнормальная подгруппа является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной. Обратное утверждение, как показывает пример симметрической группы степени 3, в общем случае не является верным. Это элементарное наблюдение, а также результаты работы [1] делают естественной задачу об описании групп, все вторые либо все третьи максимальные подгруппы которых являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными.

Описание групп, все вторые максимальные подгруппы которых являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными, восходит к работе [4]. Из [4, теорема C] следует, что все 2-максимальные подгруппы группы G являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными в G в том и только в том случае, когда G либо сверхразрешима, либо является минимальной несверхразрешимой группой с абелевым сверхразрешимым корадикалом.

Поскольку каждая подгруппа сверхразрешимой группы является K-$\mathfrak{U}$-субнормальной, то для описания групп, третьи максимальные подгруппы которых являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными, необходимо рассмотреть лишь случай, когда группа не является сверхразрешимой. Но в этом случае, ввиду [4, теорема A], $|\pi(G)| \leq 4$. Описание бипримарных несверхразрешимых групп с K-$\mathfrak{U}$-субнормальными 3-максимальными подгруппами дает теорема 1.2 из [5]. Полное описание несверхразрешимой группы G, все третьи максимальные подгруппы которой являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными, для случаев $|\pi(G)| = 3$ и $|\pi(G)| = 4$ получено в [6]. В частности, как следует из [6, теорема B], несверхразрешимая группа G, у которой $|\pi(G)| = 3$ и все третьи максимальные подгруппы являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными, ϕ-дисперсивна для некоторого упорядочения ϕ множества $\pi(G)$. В случае же, когда порядок несверхразрешимой группы G имеет четыре простых делителя и все третьи максимальные подгруппы из G являются K-$\mathfrak{U}$-субнормальными, G дисперсивна по Оре [6, теорема C].

Список литературы

1. Ю. В. Луценко, А. Н. Скиба. Конечные группы с субнормальными вторыми или третьими максимальными подгруппами // Матем. заметки. 2012. Т. 91, № 5. С. 680–688.

2. O. H. Kegel. Zur Struktur mehrfach faktorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87. P. 409–434.

3. A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. Classes of Finite Groups. Dordrecht: Springer-Verlag, 2006.

4. V. A. Kovaleva, A. N. Skiba. Finite soluble groups with all n-maximal subgroups $\mathfrak{F}$-subnormal // J. Group Theory. 2014. V. 17. P. 273–290.

5. V. A. Kovaleva, X. Yi. Finite biprimary groups with all 3-maximal subgroups $\mathfrak{U}$-subnormal // Acta Math. Hung. 2015. V. 146, № 1. P. 47–55.

6. В. А. Ковалева. Конечные группы с заданными системами K-$\mathfrak{U}$-субнормальных подгрупп // Украин. матем. журн. 2016. Т. 68, № 1. С. 52–63.

Исследование верхних границ существования мдр-кодов

С.Г. Колесников, О.В. Полянина

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, Красноярск

К.С. Осипов

ЗАО «РТК-Сибирь», Красноярск

Пусть V — линейное пространство размерности n над полем $GF(q)$. Для всякого подмножества $M \subseteq V$ определим параметр d — минимальное кодовое расстояние — равенством

$$d = \min_{x \in M,\ x \neq 0} ||x||,$$

где $||x||$ — норма вектора — число отличных от нуля координат вектора x.

Определение 1. *Линейное подпространство $U \subseteq V$ размерности k с минимальным кодовым расстоянием d называется линейным кодом с параметрами $[n, k, d]_q$.*

Согласно известной теореме Синглтона параметры n, k, d произвольного линейного кода U удовлетворяют неравенству $n+1 \geqslant k+d$. Линейные коды, для которых достигается равенство, то есть $d = n + 1 - k$, называются *мдр-кодами.* При фиксированном q мдр-коды существуют для всех k, $1 \leqslant k \leqslant n$, когда $n \leqslant q+1$. Уже продолжительное время не доказана и не опровергнута следующая

Гипотеза 1. *При нечётном q, а также при чётном q, если $k \neq 3, q-1$, кода с параметрами $[q+2, k, q+3-k]_q$ не существует; при чётном q и $k = 3$ или $k = q-1$ не существует кода с параметрами $[q+3, k, q+4-k]_q$ (см., например, [2, с. 319]).*

В [1, с. 26] и [2, с. 321] отмечается, что гипотеза доказана для всех k при $q \leqslant 11$ и для любых q, когда $k \leqslant 5$. С использованием вычислений на компьютере авторами доказана

Теорема 1. *Гипотеза справедлива для любого k, когда $q = 13$, и для $k = 6$, когда $q = 16, 17$.*

Первый автор поддержан грантом РФФИ (проект 16-01-00707).

Список литературы

1. С. Г. Влэдуц, Д. Ю. Ногин, М. А. Цфасман. Алгеброгеометрические коды. Основные понятия. М.: МЦНМО, 2003. 504 с.

2. Ф. Дж. Мак-Вильямс, Н. Дж. А. Слоэн. Теория кодов, исправляющих ошибки. М.: Связь, 1979. 744 с.

Игла множества и критерий единственности решения системы уравнений по произвольному неизвестному

О. Ю. Копысов

Декартов Научен Център, Варна

Элемент $\mathbf{a}_k$ множества $\mathbf{A}=\{\mathbf{a}_n : n\in\mathbf{n}\}$ линейного пространства ${}_{\mathcal{X}}\mathbb{A}$ над полем $\mathcal{X}$ называется линейно независимым элементом, **иглой** множества $\mathbf{A}$, если *любое* отношение линейной зависимости элементов множества

$$\sum_{n\in\mathbf{n}} x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \quad \big(\mathbf{a}_n{\in}\mathbf{A},\, x_n{\in}\mathcal{X}\big) \quad \text{влечёт} \quad x_k = 0 \quad (k \in \mathbf{n}).$$

Свойства иглы множества

Свойство 1. Игла множества отлична от нулевого элемента линейного пространства.

Свойство 2. Игла множества не принадлежит линейной оболочке остальных элементов этого множества (*поэтому и названа иглой, торчащей из оболочки*) или, другими словами, игла множества не выражается в форме линейной комбинации остальных элементов множества.

Отсюда следует, что любой элемент множества, не являющийся иглой, есть линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами других элементов, не являющихся иглами.

Свойство 3. Игла множества включена в любую максимальную линейно независимую систему этого множества.

Свойство 4. В любом множестве линейного пространства количество игл не может быть больше размерности этого пространства.

Теорема 1. *Неизвестный x_k определяется однозначно из системы линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{x}{=}\mathbf{b}$, $\mathbf{b}{\neq}\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда соответствующий ему столбец $\mathbf{a}_k$ является иглой множества столбцов матрицы системы A.*

Следствие 1. *Все неизвестные определяются однозначно из системы линейных алгебраических уравнений тогда и только тогда, когда все столбцы являются иглами множества столбцов матрицы системы или, другими словами, матрица — линейно независимая система своих столбцов или, другими словами, матрица полного ранга.*

Теорема 2. *Система линейных алгебраических уравнений $A\mathbf{x}{=}\mathbf{b}$ не имеет решений тогда и только тогда, когда вектор-столбец $\mathbf{b}$ является иглой множества столбцов расширенной матрицы системы $\big(A|\mathbf{b}\big)$.*

Все доказательства можно прочитать в [1].

Список литературы

1. О. Ю. Копысов. Идентификация посредством моделей линейной структуры. 2-е изд. Варна: Декартов Научен Център, 2013. 425 с.

О решёточных изоморфизмах матричных колец

С. С. Коробков

Уральский государственный педагогический университет, Екатеринбург

Пусть R и R' — два ассоциативных кольца с изоморфными решетками подколец $L(R)$ и $L(R')$ соответственно. Обозначим изоморфизм решётки $L(R)$ на решётку $L(R')$ через φ и назовём его решёточным изоморфизмом (проектированием) кольца R на кольцо R'. Кольцо R' переобозначим как R^φ и назовём проективным образом кольца R. Будем говорить, что кольцо R решёточно определяется, если из изоморфизма решёток $L(R) \cong L(R^\varphi)$ всегда следует изоморфизм колец $R \cong R^\varphi$.

В теории конечных колец важную роль играют кольца Галуа и матричные кольца над ними. Решёточные изоморфизмы колец Галуа изучались в работе [1]. Согласно (Теорема 4, [1]), если $R = GR(p^n, m)$, где $n > 1$, $m > 1$, а φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ, то $R \cong R^\varphi$.

Пусть кольцо R является кольцом квадратных матриц $M_n(K)$ порядка $n \geqslant 2$ над кольцом Галуа $K = GR(p^k, m)$. Если $k = 1$, то кольцо K является конечным полем $GF(p^m)$. В этом случае кольцо R можно рассматривать как алгебру матриц над конечным полем K. Решёточная определяемость матричной алгебры над полем доказана в работах [2, 3]. Однако в случае ассоциативных алгебр решёточно изоморфные алгебры A и A^φ принято считать алгебрами над одним и тем же полем. При рассмотрении решёточных изоморфизмов колец априори не требуется, чтобы R и R^φ были кольцами одной и той же характеристики.

В данной работе рассматривается кольцо матриц $R = M_n(K)$, где $n \geqslant 2$, $K = GR(p^k, 1)$, $k \geqslant 1$. В этом случае $K \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, $L(K)$ — цепь длины k и R — кольцо характеристики p^k. Основными результатами работы являются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть $R = M_n(K)$, где $K = GR(p^k, 1)$, $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $R^\varphi \cong R$;

2) $(\operatorname{Rad} R)^\varphi = \operatorname{Rad} R^\varphi$;

3) $\langle e \rangle^\varphi = \langle e' \rangle$, где e, e' — единицы колец R и R^φ соответственно.

Теорема 2. *Пусть $R = R_1 \dot{+} \dots \dot{+} R_m$, где $R_i = M_{n_i}(K_i)$, $K_i = GR(p^{k_i}, 1)$, $n_i \geqslant 2$, $k_i \geqslant 2$ $(i = \overline{1, m})$. Пусть φ — проектирование кольца R на кольцо R^φ. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $R^\varphi = R_1^\varphi \dot{+} \dots \dot{+} R_m^\varphi$ и $R_i^\varphi \cong R_i$ $(i = \overline{1, m})$;

2) $R^\varphi \cong R$.

Список литературы

1. С. С. Коробков. Проектирования колец Галуа // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 1. С. 16–33.

2. D. W. Barnes. Lattice isomorphisms of associative algebras // J. Aust. Math. Soc. 1966. V. 6, № 1. P. 106–121.

3. А. В. Ягжев. Решёточная определяемость некоторых матричных алгебр // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 1. С. 104–116.

Новая константа в суперинтуиционистской логике L3: аксиоматика

А. К. Кощеева

Удмуртский государственный университет, Ижевск

Пусть Fm — множество формул стандартного пропозиционального языка. Обогатим язык дополнительной логической константой φ.

φ-логикой называется множество $\mathcal{L}$ формул расширенного языка, включающее Int и замкнутое относительно правил modus ponens и подстановки.

φ-логика $\mathcal{L}$ называется *консервативным расширением* логики L, если $L \subseteq \mathcal{L}$ и для всякой чистой формулы A из $A \in \mathcal{L}$ следует $A \in L$.

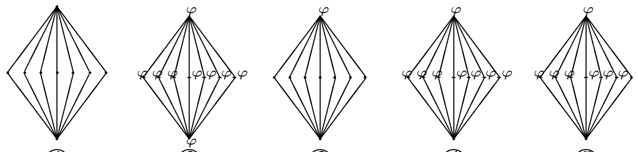
φ-логика $\mathcal{L}$ называется *полным по П. С. Новикову расширением* логики L, если $\mathcal{L}$ консервативна над L и для любой формулы $A \in Fm(\varphi) \setminus \mathcal{L}$, φ-логика $\mathcal{L} + A$ неконсервативна над L.

В работах [1, 2] суперинтуиционистская (с.и.) логика $L3$ введена как логика всех конечных корневых частично упорядоченных множеств глубины 3 с наибольшим элементом и доказано, что $L3 = Int + kc + bd_3$, где аксиомы $bd_3 := p_1 \vee (p_1 \to (p_2 \vee (p_2 \to (p_3 \vee \neg p_3))))$ (ограничитель глубины не более 3); $kc := \neg p \vee \neg\neg p$ (слабый закон исключенного третьего).

Под *проблемой Новикова для* $L3$ понимается описание класса всех полных по Новикову расширений (*пополнений*) $L3$ в конкретном расширении языка, в рассматриваемом случае — с новой константой φ.

Моделями φ-логик являются так называемые *φ-шкалы*, то есть шкалы с выделенным конусом, в котором определенным образом интерпретируется константа.

В работе [3] установлено, что существует ровно пять полных по Новикову расширений с.и. логики $L3$:



① ② ③ ④ ⑤

Аксиоматика этих расширений задается следующим образом:

$L_1 = L3 + \neg\varphi$;

$L_2 = L3 + \varphi$;

$L_3 = L3 + \neg\neg\varphi + \varphi \to (A \vee \neg A)$;

$L_4 = L3 + \neg\neg\varphi + \varphi \to bd_2 + (A \vee (A \to \varphi))$;

$$L_5 = L3 + \neg\neg\varphi + \varphi \to bd_2 + \neg\neg A \vee (A \to \varphi) \wedge ((\varphi \to A) \to A) \to$$
$$\to \varphi + \ (A \to B) \vee (B \to A) \vee (A \to \varphi) \vee (B \to \varphi).$$

Список литературы

1. Л. Л. Максимова. Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 558–570.

2. М. В. Захарьящев. Синтаксис и семантика суперинтуиционистских логик // Алгебра и логика. 1989. Т. 28, № 4. С. 402–429.

3. А. К. Кощеева. Новая константа в суперинтуиционистской логике $L3$ // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 1. С. 34–52.

Об изоморфизмах простых 14-мерных алгебр Ли характеристики 2

М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко

Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород

Пространство локальных деформаций алгебры Ли типа $G_2 = \overline{A_3}$ над полем характеристики 2 имеет размерность 20 [1]. Авторами доклада доказано, что глобальные деформации изоморфны одной из двух неограниченных простых алгебр Ли $(L_1, [\ ,\ ] + \psi_1)$, $(L_2, [\ ,\ ] + \psi_2)$, где $\psi_i \in Z^2(L, L)$, и имеют следующие реализации.

Алгебра Ли $\overline{A}_3$ изоморфна алгебре Ли картановского типа $S(3:\mathbf{1})$. Пусть $\omega = (1 + x_1x_2x_3)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. Таблица умножения алгебры $S(3:\mathbf{1}, \omega)$ в базисе

$$e_{-\alpha_3} = (1 + x_1x_2x_3)\partial_3,\ e_{-\alpha_2-\alpha_3} = (1 + x_1x_2x_3)\partial_2,$$

$$e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = (1 + x_1x_2x_3)\partial_1,$$

$$h_1 = x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\ h_2 = x_2\partial_2 + x_3\partial_3,\ e_{\alpha_1} = x_1\partial_2,\ e_{-\alpha_1} = x_2\partial_1,$$

$$e_{\alpha_2} = x_2\partial_3,\ e_{-\alpha_2} = x_3\partial_2,\ e_{\alpha_1+\alpha_2} = x_1\partial_3,\ e_{-\alpha_1-\alpha_2} = x_3\partial_1,$$

$$e_{\alpha_3} = D_{12}(x_1x_2x_3),\ e_{\alpha_2+\alpha_3} = D_{23}(x_1x_2x_3),\ e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = D_{13}(x_1x_2x_3),$$

где $D_{ij}(f) = \partial_i(f)\partial_j + \partial_j(f)\partial_i$, совпадает с таблицей умножения L_1 в базисе, соответствующем системе корней A_3.

Алгебра Ли $\overline{A}_3$ над полем характеристики $p = 2$ также изоморфна гамильтоновой алгебре Ли $H(4:\mathbf{1})$. Рассмотрим гамильтонову алгебру Ли $H(4:\mathbf{1}, \omega)$, $\omega = (1 + x_1x_3)dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4$. Пусть $A = A(4:\mathbf{1})$ — алгебра разделенных степеней, $\overline{A} = A/\langle 1 \rangle$ — гамильтонова алгебра Ли со скобкой Пуассона

$$\{f, g\} = (1 + x_1x_3)(\partial_1 f\partial_3 g - \partial_3 f\partial_1 g) + (\partial_2 f\partial_4 g - \partial_4 f\partial_2 g).$$

Простая алгебра Ли $H(4:\mathbf{1}, \omega)$ является подалгеброй $(\overline{A}, \{\ ,\ \})$ с базисом

$$h_1 = x_1x_3 + x_2x_4 + x_1x_2x_3x_4,\ h_2 = x_1x_3,$$

$$e_{-\alpha_2} = x_2,\ e_{\alpha_1} = x_2x_3,\ e_{\alpha_2} = x_1x_3x_4,$$
$$e_{-\alpha_1-\alpha_2} = x_1,\ e_{-\alpha_1} = x_1x_4,\ e_{\alpha_1+\alpha_2} = x_2x_3x_4,$$
$$e_{-\alpha_2-\alpha_3} = x_3,\ e_{\alpha_3} = x_1x_2,\ e_{\alpha_2+\alpha_3} = x_1x_2x_4,$$
$$e_{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3} = x_4,\ e_{-\alpha_3} = x_3x_4,\ e_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} = x_1x_2x_3.$$

Таблица умножения $H(4 : \mathbf{1}, \omega)$ совпадает с таблицей умножения L_2.

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и образования России (госзаказ, проект 1.1410.2014/K).

Список литературы

1. Н. Г. Чебочко. Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике 2. I // Матем. сб. 2005. Т. 196. С. 125–156.

Свойства счетно категоричных теорий конечного ранга выпуклости

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы

Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

Ранг выпуклости формулы с одной свободной переменной введен в [2], слабая ортогональность 1-типов — в [3], (p_1, p_2)-секаторы для неалгебраических 1-типов p_1 и p_2 — в [4]. Пусть $A \subseteq M$, $p_1, p_2 \in S_1(A)$ — неалгебраические не слабо ортогональные типы. Мы говорим, что A-определимая формула $\phi(x, y)$ является (p_1, p_2)*–секатором*, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi(a, M) \subset p_2(M)$, $\phi(a, M)$ выпукло и $\phi(a, M)^- = p_2(M)^-$. Если $\phi_1(x, y)$, $\phi_2(x, y)$ — (p_1, p_2)-секаторы, то мы говорим что $\phi_1(x, y)$ *меньше, чем* $\phi_2(x, y)$, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi_1(a, M) \subset \phi_2(a, M)$.

Теорема 1. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические не слабо ортогональные типы. Тогда $RC(p) > RC(q) \Leftrightarrow$ для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ существует $\emptyset$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x,M)$ является константой на каждом E-классе.*

Следствие 1. *Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $p, q \in S_1(\emptyset)$ — неалгебраические не слабо ортогональные типы. Тогда $RC(p) = RC(q) \Leftrightarrow$ существует (p,q)-секатор $R(x,y)$ такой, что функция $f(x) := \sup R(x,M)$ является локально монотонной (не локально константой) на $p(M)$.*

Автор поддержан грантом КН МОН РК (проект 0830/ГФ4).

Список литературы

1. H. D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Math. Society. 2000. V. 352. P. 5435–5483.

2. B. Sh. Kulpeshov. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The J. of Symb. Logic. 1998. V. 63. P. 1511–1528.

3. B. S. Baizhanov. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The J. of Symb. Logic. 2001. V. 66, P. 1382–1414.

4. B. Sh. Kulpeshov. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. 2007. V. 45. P. 354–367.

Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы нечетных индексов которой холловы

Н. В. Маслова
Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН,
Уральский федеральный университет, Екатеринбург

Д. О. Ревин
Институт математики имени С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Подгруппа H конечной группы G называется *холловой*, если ее порядок $|H|$ и индекс $|G : H|$ взаимно просты.

В [1] было получено описание конечных разрешимых групп, все максимальные подгруппы которых холловы. В [2] были описаны неабелевы композиционные факторы конечных неразрешимых групп, все максимальные подгруппы которых холловы. Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. (i) *Неабелевы композиционные факторы группы, все максимальные подгруппы нечетных индексов которой холловы, содержатся в следующем списке*:

(1) $PSL_2(2^l)$, *где* $l \geq 2$;

(2) $PSL_2(p^l)$, *где* p *— нечетное простое число и либо* $l = 2^w \geq 2$, *либо* $l = 1$ *и* $p \equiv \pm 1 \pmod 8$, *либо* $l = 1$ *и* $p \equiv 5, 11, 13, 29, 43, 59, 61, 67 \pmod{72}$;

(3) $PSL_3(2^{2w-1})$, *где* $w \geq 1$;

(4) $PSL_5(2^w)$, *где* w *не делится на* 4;

(5) $PSL_n(p)$, *где* n *— простое число Ферма,* p *— простое число такое, что* $p \equiv 3 \pmod 4$, *и* $(n, q-1) = 1$;

(6) $PSp_4(2^w)$, *где* $w \geq 2$;

(7) $Sz(2^{2w+1})$, *где* $w \geq 1$;

(8) A_n, *где* $n = 6$ *или* n *— простое число Ферма*;

(9) J_1, M_{23};

(ii) *для каждой простой группы* S *из списка пункта* (i) *найдется группа* G, *каждая максимальная подгруппа нечетного индекса которой холлова, такая, что* $Soc(G) \cong S$.

Заметим, что конечные разрешимые группы, все максимальные подгруппы нечетных индексов которых холловы, также описаны в [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ (проект МК-6118.2016.1), Комплексной программы фундаментальных исследований УрО РАН (проект 15-16-1-5) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013). Первый автор также является победителем конкурса молодых математиков фонда Дмитрия Зимина "Династия" 2013 г.

Список литературы

1. В. С. Монахов. Конечные π-разрешимые группы с холловыми максимальными подгруппами // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 390–394.

2. Н. В. Маслова. Неабелевы композиционные факторы конечной группы, все максимальные подгруппы которой холловы // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1065–1076.

Автоморфизмы AT4$(9,3,2)$-графа

А. А. Махнев, Д. В. Падучих

Институт математики и механики имени Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург

М. М. Хамгокова

Кабардино-Балкарский государственный университет, Владикавказ

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра $d \geq 3$ и $\theta_0 > \theta_1 > \ldots > \theta_d$ — собственные значения Γ. По [1] выполняется фундаментальная граница

$$(\theta_1 + \frac{k}{a_1+1})(\theta_d + \frac{k}{a_1+1}) \geq -\frac{ka_1b_1}{(a_1+1)^2}.$$

Положим

$$b^+ = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_d},\ b^- = -1 - \frac{b_1}{1+\theta_1}.$$

Недвудольный граф, для которого достигается равенство в фундаментальной границе, называется плотным. Граф является плотным тогда и только тогда, когда окрестность любой вершины в этом графе сильно регулярна с собственными значениями a_1, b^+, b^-.

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$ является $AT4(9, 3, 2)$-графом, антиподальное частное $\bar{\Gamma}$ имеет параметры $(378, 117, 36, 36)$ и неглавные собственные значения $9, -9$, окрестности вершины в Γ и в $\bar{\Gamma}$ сильно регулярны с параметрами $(117, 36, 15, 9)$. В данной работе изучены автоиорфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p, $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ и $\bar{\Gamma}$ — антиподальное частное графа Γ. Тогда $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$, g индуцирует тривиальный автоморфизм антиподального частного $\bar{\Gamma}$ и $p = 2$ или выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p = 2, 3, 7$, а если Ω — антиподальный класс, то $p = 13$;*

(2) *если $\bar{\Omega}$ является n-кликой, то либо $p = 5$, $n = 3$, либо $p = 2$, $n = 6, 12$;*

(3) *если Ω является m-кокликой, то $p = 3$, $m = 42$;*

(4) *если $\bar{\Omega}$ содержит геодезический 2-путь, то либо $p = 3$, $|\Omega| = 54$, либо $p = 2$, $|\Omega| = 36s$, $s \leq 7$.*

Как следствие получим, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{117, 80, 18, 1; 1, 18, 80, 117\}$ не является реберно симметричным.

Работа поддержана грантом РНФ (проект 15-11-10025).

Список литературы

1. A. Jurisic, J. Koolen. Krein parameters and antipodal tight graphs with diameter 3 and 4 // Discrete Math. 2002. V. 244. P. 181–202.

Неразрешимые группы с бипримарными кофакторами ненильпотентных подгрупп

В. С. Монахов, И. Л. Сохор

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины, Гомель

Рассматриваются только конечные группы. Кофактором подгруппы H группы G называется фактор-группа H/H_G, где $H_G = \bigcap_{x\in G} x^{-1}Hx$. Подгруппа Фиттинга и наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G обозначаются через $F(G)$ и $R(G)$ соответственно, а $|\pi(G)|$ — количество различных простых делителей порядка группы G. Если $|\pi(G)| = 1$, то группу G называют примарной, при $|\pi(G)| = 2$ — бипримарной.

Строение группы существенно зависит от свойств кофакторов ее подгрупп. Я. Г. Беркович [1] исследовал группы, у которых ненильпотентные кофакторы максимальных подгрупп являются разрешимыми группами с нильпотентными собственными нормальными подгруппами. С. М. Евтухова и В. С. Монахов [2] изучили группы со сверхразрешимыми кофакторами максимальных подгрупп. Е. Т. Огарков [3] рассматривал группы, у которых порядки кофакторов всех подгрупп делятся не более, чем на два простых числа. Доказана следующая

Теорема 1. *Если в группе G кофакторы ненильпотентных подгрупп примарны или бипримарны, то $|\pi(R(G)/F(G))| \leq 2$ или $R(G)/F(G)$ метанильпотентна, а $G/R(G)$ изоморфна подгруппе из $\mathrm{Aut}(H/R(G))$, где $H/R(G)$ — подгруппа в $G/R(G)$ и $H/R(G)$ изоморфна одной из следующих групп:*

(1) $SL(2, 2^p)$, где $p = 2$ или $p = 3$;

(2) $PSL(2, 3^p)$, где p — нечетное простое число такое, что $3^p - 1 = 2 \cdot q^\alpha$, $\alpha \geq 1$, q — простое число, $q > 3$, $3^p + 1 = 4 \cdot r^\gamma$, $\gamma \geq 1$, r — простое число, $r > 3$ и $r \neq q$;

(3) $PSL(2, p)$, где p — простое число такое, что $p > 5$, $p^2 \equiv -1 \pmod 5$, $p - 1 = 2 \cdot 3^\alpha$, $\alpha \geq 1$, $p + 1 = 2^s \cdot q^\beta$, $s \geq 2$, $\beta \geq 0$, q — простое число, $q > 3$;

(4) $PSL(2, p)$, где p — простое число такое, что $p > 5$, $p^2 \equiv -1 \pmod 5$, $p - 1 = 2^l \cdot r^\gamma$, $l \geq 1$, $\gamma \geq 0$, r — простое число, $r > 3$ и $\gamma = 0$ при $l > 1$, $p + 1 = 2^t \cdot 3^\delta$, $t \geq 1$, $\delta \geq 1$;

(5) $PSL(3,3)$;
(6) $Sz(2^q)$, *где* $q = 3$ *или* $q = 5$.

Доказанная теорема пополняет список групп теоремы 2 [3].

Список литературы

1. Я. Г. Беркович. Конечные группы с большими ядрами максимальных подгрупп // Сиб. матем. журн. 1968. Т. IX, № 2. С. 243–248.
2. С. М. Евтухова, В. С. Монахов. О конечных группах со сверхразрешимыми кофакторами подгрупп // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 4. С. 53–57.
3. Е. Т. Огарков. Конечные группы с определенными свойствами кофакторов // Весцi АН Беларусi. Сер. фiз.-матэм. навук. 1974. № 3. С. 118–120.

2-хорошие формальные матрицы над кольцом целых чисел

Ц. Д. Норбосамбуев

Томский государственный университет, Томск

Элемент кольца называется *k-хорошим*, если он представим в виде суммы k обратимых элементов этого кольца. С формальными матрицами и кольцами формальных матриц можно ознакомиться в [1] и [2]. Здесь будут приведены некоторые условия 2-хорошести формальных матриц над кольцом целых чисел.

Теорема 1. *[1] Пусть дано кольцо формальных матриц* $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, *где* R *— коммутативное кольцо с единицей. Пусть* A *— матрица из этого кольца. Матрица* A *обратима тогда и только тогда, когда её определитель — обратимый элемент кольца* R.

Лемма 1. *Пусть* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ *— кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел. Диагональная матрица* $A{=}diag(a{,}b)$ *будет 2-хорошей в* $M(2, \mathbb{Z}, s)$ *тогда и только тогда, когда найдутся такие целые числа* x, a_1, a_2, b_1, b_2, *что* $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ *и* $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x = \pm 1$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x = \pm 1$.

Следствие 1. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел и пусть множитель s — четное число. Если диагональная матрица A=diag(a,b) является 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$, то тогда её элементы a и b — четные числа.*

Следствие 2. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ — кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел. Диагональная матрица $= diag(a, 0)$ будет 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$ тогда и только тогда, когда $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$ при нечетном множителе s, и $a \in \{0; 2; -2\}$ при четном.*

Список литературы

1. П. А. Крылов, А. А. Туганбаев. Формальные матрицы и их определители // Фунд. и прикл. матем. 2014. Т. 19, № 1. С. 65–119.
2. Ц. Д. Норбосамбуев. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестн. Том. гос. ун-та. Сер. Матем. и механ. 2015. Т. 36, № 4. С. 34–41.

Белнаповские модальные логики, различные подходы

С. П. Одинцов

Институт математики СО РАН, Новосибирск

Г. Вансинг

Рурский университет, Бохум

К. А. Каушан

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Белнаповские модальные логики характеризуются тем, что в каждом из возможных миров формуле приписывается одно из четырех значений истинности $True$, $Both$, $False$, $Neither$ логики Белнапа [1]. Используя в качестве точки отсчета предложенную первыми двумя авторами логику **BK** [2], мы сравниваем различные подходы к определению Белнаповских модальных логик (см. [3, 4, 5]). Все эти логики удовлетворяют свойству формальной двойственности (отрицание обычным образом проностится через модальности). С помощью стандартной трансляции из модального языка в язык первопорядковой логики Белнапа определена логика $\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}$ без свойства формальной двойственности. Заданы гильбертовское исчисление и исчисление естественного вывода для $\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}$, доказаны соответствующие теоремы полноты. Показано, что логика Юнга — Ривеччо [4] слабо определима в $\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}$.

Определены гибридные версии $\mathcal{H}yb\mathbf{BK}$ и $\mathcal{H}yb\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}$ логик $\mathbf{BK}$ и, соответственно, $\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}$. Доказано, что логика $\mathcal{H}yb\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}$ дефинициально эквивалентна первопорядковой логике Белнапа, а логика $\mathcal{H}yb\mathbf{BK}$ дефинициально эквивалентна ограниченной версии данной логики (с классическим двухместным предикатом).

В заключительной части доклада сформулированы гильбертовские исчисления и исчисления естественного вывода для логик $\mathcal{H}yb\mathbf{BK}$ и $\mathcal{H}yb\mathbf{BK}^{\mathsf{FS}}$. Доказаны соответствующие теоремы полноты.

Первый автор поддержан грантом РФФИ (проект 15-07-03410).

Список литературы

1. N. Belnap. A useful four-valued logic // J. M. Dunn, G. Epstein (eds). Modern Uses of Multiple-Valued Logic. D. Reidel. 1977. P. 8–37.

2. S. P. Odintsov, H. Wansing. Modal logics with Belnapian truth values // J. Appl. Non-Class. Logics. 2010. V. 20. P. 279–301.

3. L. Goble. Paraconsistent modal logic // Logique et Analyse. 2006. V. 49 (193). P. 3–29.

4. A. Jung, U. Rivieccio. Kripke semantics for modal bilattice logic // Extended Abstracts of the 28th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science. IEEE Computer Society Press. 2013. P. 438–447.

5. G. Priest. Many-valued modal logics: a simple approach // Rev. of Symb. Logic. 2008. V. 1. P. 190–203.

Гомоморфизмы одной алгебраической системы

А. Н. Остыловский
Сибирский федеральный университет, Красноярск

Пусть K — кольцо и S — некоторое множество отображений $K^n \to K$. Для $x, y, x_1, \ldots, x_n \in S$ и $t_1, \ldots, t_n \in K$ положим

$$(x+y)(t_1,\ldots,t_n) = x(t_1,\ldots,t_n) + y(t_1,\ldots,t_n),$$

$$(xy)(t_1,\ldots,t_n) = x(t_1,\ldots,t_n)y(t_1,\ldots,t_n).$$

Введём операцию композиции

$$(x|x_1,\ldots,x_n)(t_1,\ldots,t_n) = x(x_1(t_1,\ldots,t_n),\ldots,x_n(t_1,\ldots,t_n)).$$

Будем считать, что множество S образует кольцо $\hat{S}$ относительно сложения и умножения, а также замкнуто относительно операции композиции. Будем рассматривать алгебраическую систему $\tilde{S}$ с этими тремя операциями.

Теорема 1. *Пусть J — идеал кольца $\widehat{S}$. Кольцевая конгруэнция $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in J$ является конгруэнцией системы $\widetilde{S}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия:*
1) $(J|S,\ldots,S) \subseteq J$;
2) $\forall x, x_1, \ldots, x_n\ \forall i_1, \ldots, i_n \in J\ \exists j \in J (x|x_1 + i_1, \ldots, x_n + i_n) = (x|x_1,\ldots,x_n) + j$.

Теорема является продолжением предложения 6.1 из [1].

При $n = 1$ условия 1), 2) теоремы равносильны условию стабильности в полугруппах, но в присутствии структуры кольца условие 2) выглядит как некоторое ослабление левой дистрибутивности.

Список литературы

1. П. Кон. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.

О почти конечномерных йордановых алгебрах

А. С. Панасенко
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Определение 1. *Алгебра A называется йордановой, если выполнены следующие тождества:*

$$xy = yx, \quad x^2(yx) = (x^2y)x.$$

Определение 2. *Алгебра A называется почти конечномерной, если $dim(A) = \infty$ и $dim(A/I) < \infty$ для любого ненулевого идеала I.*

Определение 3. *Алгебра A называется первичной, если произведение любых двух ненулевых идеалов отлично от нуля. Йорданова алгебра A называется невырожденной, если в ней нет таких ненулевых элементов $a \in A$, что $aAa = 0$.*

Теорема 1. *Всякая почти конечномерная йорданова алгебра первична и невырождена.*

Теорема 2. *Пусть A — почти конечномерная йорданова исключительная алгебра. Тогда:*

1) A — кольцо Алберта (центральный порядок в алгебре Алберта);

2) ассоциативный центр Z алгебры A является почти конечномерной ассоциативной и коммутативной алгеброй.

Если, кроме того, алгебра $(Z^*)^{-1}A$ расщепляема, то A — конечный Z-модуль.

Аналогичные результаты для ассоциативных и альтернативных алгебр были ранее получены в [1] и [2].

Теорема 3. *У любой почти конечномерной специальной йордановой алгебры существует почти конечномерная ассоциативная обертывающая.*

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 14-01-00014).

Список литературы

1. J. Farina, C. Pendergrass-Rice. A Few Properties of Just Infinite Algebras // Communications in Algebra. 2007. V. 35, № 5. P. 1703–1707.

2. А. С. Панасенко. Почти конечномерные альтернативные алгебры // Матем. заметки. 2015. V. 98, № 5. P. 747–755.

Полиномиальные преобразования классов вычетов по примарному модулю

Н. Г. Парватов

Томский государственный университет, Томск

Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — целочисленные многочлены от n переменных, и f — полиномиальная функция, определённая как

$$f : Z^n \to Z^n, f : x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x)),$$

где Z — кольцо целых чисел. Для произвольного набора a из Z^n, простого числа p и целого положительного числа m рассмотрим последовательность

$$f^0(a) + p^m Z^n, f^1(a) + p^m Z^n, f^2(a) + p^m Z^n, \ldots$$

элементов фактор-кольца $Z^n/p^m Z^n$, где $f^0(a) = a$ и $f^k(a) = f(f^{k-1}(a))$ для $k > 0$. Указанная последовательность периодическая с периодом t, если

$$a + p^m Z^n = f^t(a) + p^m Z^n$$

и t — наименьшее положительное число с этим свойством. Обозначим через $s(a, f, m)$ эту последовательность и через $\tau(a, f, m)$ её период. Далее рассматривается задача определения возможных значений периода $\tau(a, f, m)$. Известно решение этой задачи при $n = 1$ для последовательностей над кольцом Галуа (см. [1]).

Обозначим также через $J_f(a)$ значение матрицы Якоби преобразования f в точке a и положим

$$J_f^k(a) = J_f(f^0(a)) \cdots J_f(f^{k-1}(a))$$

для любого целого положительного k. Имеет место

Теорема 1. *Пусть* $a \in Z^n$, $A = a + pZ^n$ *и* $m > 1$. *Если последовательность* $s(b, f, m)$ *периодична для любого* b *из* A, *то* $det(J_f^\tau(a)) \not\equiv 0 \mod p$ *и выполняется следующее соотношение для периода:*

$$\tau(a, f, m) | \tau \cdot p^{m-k} \cdot ord_p(J_f^\tau(a)),$$

где $\tau = \tau(a, f, 1)$, $ord_p(J_f^\tau(a))$ *— порядок матрицы* $J_f^\tau(a)$ *по модулю* p, $k = 2$ *при* $det(J_f^\tau(a) - E) \equiv 0 \mod p$ *и* $k = 1$ *при* $det(J_f^\tau(a) - E) \not\equiv 0 \mod p$.

Для конгруэнтной последовательности, определяемой преобразованием $f(x) = x \cdot A$, где A — целочисленная матрица и $detA \not\equiv 0 \mod p$, с использованием теоремы 1 получается известная оценка $\tau(a, f, m) \leq p^{m-k}(p^n - 1)$; эта оценка достижима (см. [2]). Сформулированная теорема может быть обобщена для последовательностей над произвольным конечным коммутативным кольцом.

Список литературы

1. Д. М. Ермилов, О. А. Козлитин. Цикловая структура полиномиального генератора над кольцом Галуа // Матем. вопр. криптографии. 2013. Т. 4, № 1. С. 27–57.

2. J. Eichenauer-Herrmann, H. Grothe, J. Lehn. On the period length of pseudo random vector sequences generated by matrix generators // Math. of computation. 1989. V. 52. P. 145–148.

Клоны и суперклоны, содержащие алгебры n-местных операций и мультиопераций

Н. А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет, Санкт-Петербург

И. К. Шаранхаев

Бурятский государственный университет, Улан-Удэ

Если A — множество, $B(A)$ — множество всех подмножеств A, то n-местная *операция* — это $f : A^n \to A$, а n-местная *мультиоперация* — это $f : A^n \to B(A)$. Обозначим через P_A^n, P_A множества

n-местных и всех операций, а через M_A^n, M_A — множества n-местных и всех мультиопераций.

Клоном над множеством A называется подмножество $K \subseteq P_A$, содержащее все операции проектирования и замкнутое относительно суперпозиций.

Алгеброй n-местных операций над множеством A называется подмножество $K \subseteq P_A^n$, содержащее все n-местные операции проектирования и замкнутое относительно суперпозиций.

Суперклоном над множеством A называется подмножество $R \subseteq M_A$, содержащее все мультиоперации пустые, полные, проектирования и замкнутое относительно суперпозиций и разрешимостей [1].

Алгеброй n-местных мультиопераций над множеством A называется подмножество $R \subseteq M_A^n$, содержащее все n-местные мультиоперации проектирования, пустую, полную мультиоперации и замкнутое относительно суперпозиций, разрешимостей и пересечений [2].

Введем обозначения:
$[K]$ — клон над A, порожденный множеством операций $K \subseteq P_A$;
$St_n(K) = \{f | f_i^n \in K \Rightarrow f * (f_1^n, ..., f_m^n) \in K\}$, где K — алгебра n-местных операций; $F^n = F \cap P_A^n$, где $F \subseteq P_A$;
$\langle R \rangle$ — суперклон над A, порожденный мультиоперациями $R \subseteq M_A^n$;
$St_n(R) = \{g | g_i^n \in R \Rightarrow g * (g_1^n, ..., g_m^n) \in R\}$, где R — алгебра n-местных мультиопераций; $E^n = E \cap M_A^n$, где $E \subseteq M_A$.

Теорема 1. *а) Пусть K алгебра n-местных операций над A. Тогда для любого клона F над A такого, что $F^n = K$ выполняется*

$$[K] \subseteq F \subseteq St_n(K).$$

б) Пусть R алгебра n-местных мультиопераций над A ранга 2. Тогда для любого суперклона E над A такого, что $E^n = R$ выполняется

$$\langle R \rangle \subseteq E \subseteq St_n(R).$$

Список литературы

1. Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев. Теория Галуа для клонов и суперклонов // Дискретная матем. 2015. Т. 27, № 4. С. 79–93.

2. Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев. Решетки клонов и суперклонов // Материалы Междунар. конф. «Математика и информатика». М.: МПГУ, 2016. С. 46–50.

О метрике на пространстве функциональных клонов

А. Г. Пинус

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

Для любого функционального клона F на множестве A через $F^{(n)}$ обозначим совокупность всех n-местных функций из F. На совокупности F_A всех клонов на множестве A введем метрику d следующим образом: для $F, F' \in F_A$ пусть

$$d(F, F') = \begin{cases} \frac{1}{min\{n \in \omega' | F^{(n)} \neq (F')^{(n)}\}}, \text{если} F \neq F', \\ 0, \text{если } F = F', \end{cases}$$

где $\omega' = \omega \setminus \{0\}$.

Размерность клона $F \in F_A$ $(dimF)$ определим как наименьшее натуральное n такое, что для любого $F' \in F_A$ равенство $(F')^{(n)} = F^{(n)}$ влечет равенство $F' = F$. В противном случае полагаем $dimF = \infty$.

Клоны конечной размерности и только они суть изолированные точки метрического пространства.

Сложность пространства $< F_A; d >$ возрастает с ростом множества A: для любых $B \subseteq A$ пространство $< F_B; d >$ изометрически вложимо в $< F_A; d >$.

Все пространства $< F_A; d >$ полны.

Для любого бесконечного A пространство $< F_A; d >$ не компактно.

Пространство $< F_{\{0,1\}}; d >$ компактно.

Вопрос о компактности пространств $< F_A; d >$ для конечных более чем двухэлементных множеств A остается открытым.

Пространство $< F_A; d >$ сепарабельно тогда и только тогда, когда множество A конечно.

Наконец заметим, что решеточные операции $\wedge, \vee$ решетки L_A всех клонов на множестве A непрерывны в пространстве $< F_A; d >$.

Работа выполнена при финансовой подддержке Министерства образования и науки РФ, гос. задание № 2014/138, проект 1052.

Арифметика формальных модулей

П. Н. Питаль

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

В теории алгебраических кривых есть особый класс так называемых гиперболических кривых. Уравнение Вейерштрасса в проективной плоскости для таких кривых имеет вид

$$Y^2Z + \mu_1 XYZ = X^3 + \mu_2 X^2 Z.$$

Если предположить, что уравнение $T^2 - \mu_1 T - \mu_2 = 0_{\mathcal{O}}$ разрешимо в $\mathcal{O}$ и $a, b \in \mathcal{O}$ — корни этого уравнения: $\mu_1 = a + b,\ \mu_2 = -ab$, то стандартной геометрической структуре сложения точек на таких кривых будут соответствовать гиперболические формальные группы (см. [1]):

$$F_{a,b}(X,Y) = \frac{X + Y - \mu_1 XY}{1 + \mu_2 XY} = \frac{X + Y - (a+b)XY}{1 - abXY}.$$

Пусть F — формальная группа над $\mathcal{O}$ — полным дискретно нормированным кольцом нулевой характеристики, со свершенным полем вычетов, неразветвленным над $\mathbb{Z}_p$ (p — нечетное простое число). Для изучения большого спектра вопросов, связанных с формальными модулями, например для построения базиса Шафаревича, удобно использовать специальные ряды E_F и l_F осуществляющие соответствие между $X\mathcal{O}[[X]]$ в стандартной топологии и $X\mathcal{O}[[X]]$ в топологии рядов Картье, которое называются экспонентой Артина — Хассе и l-функцией Востокова формальной группы F над $\mathcal{O}$ (подробнее см. [2]). В настоящей работе такие ряды найдены для гиперболических формальных групп.

Пусть σ — автоморфизм Фробениуса на $\mathcal{O}$. Определим оператор Фробениуса Δ на кольце $X\mathcal{O}[[X]]$: $\Delta(aX^m) = \sigma(a)X^{pm},\ a \in \mathcal{O}$. Тогда верна следующая теорема:

Теорема 1. *Экспонента Артина — Хассе и l-функция Востокова формального гиперболического закона имеют, соответственно,*

вид
$$E_{F_{a,b}}(X)=\frac{\exp\left((1-\frac{\Delta}{p})^{-1}((a-b)X)\right)-1}{a\cdot\exp\left((1-\frac{\Delta}{p})^{-1}((a-b)X)\right)-b},$$
$$l_{F_{a,b}}(X)=(a-b)^{-1}\left((1-\frac{\Delta}{p})^{-1}\left(\log\left(\frac{1-bX}{1-aX}\right)\right)\right).$$

Основываясь на этих вычислениях, в дальнейшем планируется построить явные формулы спаривания Гильберта для гиперболических формальных модулей, построенных на максимальном идеале кольца целых локального поля.

Список литературы

1. V. M. Buchstaber, E. Yu. Bunkova. Elliptic formal group laws // Integral Hirzebruch genera and Krichever genera. 2010.
2. С. В. Востоков. Норменное спаривание в формальных модулях // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1979. Т. 43, № 4. С. 765–794.

Структура полилинейной части одного многообразия разрешимых йордановых алгебр

А. В. Попов

Ульяновский государственный университет, Ульяновск

Пусть $F\{X\}$ — свободная неассоциативная алгебра от счетного множества порождающих $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ над полем нулевой характеристики F. Тождествами неассоциативной F-алгебры A называются элементы $F\{X\}$, лежащие в идеале $I\left(A\right)=\bigcap\limits_{\varphi}\ker\varphi$, где пересечение берется по всевозможным гомоморфизмам φ из $F\{X\}$ в A. Многообразием алгебр V называется класс всех алгебр, удовлетворяющих заданному набору тождеств. Тождества, которым удовлетворяет любая алгебра из V, образуют идеал тождеств $I\left(V\right)$.

Хорошо известно, что в случае поля нулевой характеристики всякое тождество эквивалентно некоторому набору однородных полилинейных тождеств. Поэтому для изучения структуры идеала тождеств $I\left(V\right)$ достаточно изучать пространства $P_n\left(V\right)=P_n\cap I\left(V\right)$, где

P_n — пространство всех полилинейных неассоциативных многочленов степени n от свободных образующих $x_1, \ldots, x_n$. Пространства $P_n(V)$ также называют полилинейной частью многообразия V.

Пространства $P_n(V)$ имеют структуру S_n-модулей, в которых группа S_n действует на индексах образующих $x_1, \ldots, x_n$. Изучение структуры модулей $P_n(V)$ позволяет получить много важной информации о многообразии.

Обозначим через L многообразие алгебры Ли. Рассмотрим пространства $PL_{n_1,n_2} = P_{n_1+n_2}(L)$, определенные на образующих $x_1, \ldots, x_{n_1}, y_1, \ldots, y_{n_2}$. Эти пространства имеют структуру $S_{n_1} \times S_{n_2}$-модулей и могут быть разложены в сумму неприводимых подмодулей (см. [1]):

$$PL_{n_1,n_2} \cong \bigoplus_{\substack{\lambda \vdash n_1 \\ \mu \vdash n_2}} (M_\lambda \otimes M_\mu)^{d_{\lambda\mu}}, \tag{1}$$

где λ и μ диаграммы Юнга, а M_λ и M_μ — соотвествующие неприводимые S_{n_1}- и S_{n_2}-модули.

Обозначим через J_{sc} многообразие йордановых алгебр с дополнительными тождествами $x^2yx \equiv 0$ и $(x_1x_2)(x_3x_4)(x_5x_6) \equiv 0$ (см. [2]). Следующая теорема дает описание S_n-структуры полилинейной части $P_n(J_{sc})$ многообразия J_{sc}.

Теорема 1. *Для S_n-модуля $P_n(J_{sc})$ справедливо разложение*

$$P_n(J_{sc}) = \bigoplus_{i=0}^{k} P_n^i(J_{sc}),$$

где $k = \left[\frac{n+2}{3}\right]$, а S_n-модули $P_n^i(J_{sc})$ имеют следующий вид:

$$P_n^i(J_{sc}) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash m, \mu \vdash i} ind_{S_m \times S_{n-m}}^{S_n} \left(M_{\overline{\lambda}} \otimes M_{\overline{(n-m-i,\mu)}} \right)^{d_{\lambda\mu}},$$

где $m = \left[\frac{n-3i}{2}\right] + 1$, $d_{\lambda\mu}$ – кратности из разложения (1).

Список литературы

1. J. Hong, J-H Kwon. Decompose of Free Lie Algebras into Irreducible Components // J. of Algebra. 1997. V. 197. P. 127–145.

2. В. Г. Скосырский. Разрешимость и сильная разрешимость йордановых алгебр // Сиб. матем. журн. 1989. № 2. С. 167–171.

Об универсальной эквивалентности некоторых счетно порожденных частично коммутативных структур

Е. Н. Порошенко

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — неориентированный граф без петель с конечным или счетным множеством вершин X и множеством ребер E. *Частично коммутативной алгеброй Ли* над областью целостности R с единицей на произвольном многообразии (в том числе и на многообразии всех алгебр Ли) называется R-алгебра с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений вида

$$\{[y,z]=0 \,|\, y,z\in X;\ y \text{ и } z \text{ соединены ребром}\},\qquad (1)$$

а также тождеств многообразия (если они есть). *Частично коммутативной метабелевой группой* называется группа из многообразия метабелевых групп, с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений вида

$$\{yz=zy \,|\, y,z\in X;\ y \text{ и } z \text{ соединены ребром}\}.\qquad (2)$$

Будем использовать $PCS(X;G)$ в качестве общего обозначения для частично коммутативной алгебры Ли частично коммутативную метабелевой алгебры Ли или для частично коммутативной метабелевой группы с определяющим графом $G = \langle X; E\rangle$.

Пусть $G = \langle X; E\rangle$ — дерево. Через G^* обозначим подграф графа G, порожденный всеми его невисячими вершинами. Будем говорить, что граф G *конечного* (*бесконечного*) типа, если граф G^* конечен (соответственно, бесконечен).

Теорема 1. *Пусть $G = \langle X, E\rangle$ — дерево бесконечного типа, а $H = \langle Y, F\rangle$ — конечное дерево, или дерево конечного типа. Тогда частично коммутативные структуры одного вида $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ не являются универсально эквивалентными.*

Теорема 2. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — конечные деревья или деревья конечного типа. Частично коммутативные структуры одного вида $PCS(X;G)$ и $PCS(Y;H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда $G^* \simeq H^*$.*

Графы G и H называются *взаимно локально вложимыми*, если любой конечный подграф графа G изоморфно вкладывается в граф H и любой конечный подграф графа H изоморфно вкладывается в граф G.

Теорема 3. *Пусть $G = \langle X; E\rangle$ и $H = \langle Y; F\rangle$ — деревья бесконечного типа. Частично коммутативные структуры $PCS(X; G)$ и $PCS(Y; H)$ универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда деревья G^* и H^* взаимно локально вложимы.*

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 15–01–01485), а также Министерства образования и науки РФ (гос. задание № 214/138, проект 1052).

Структура матриц ранга 1 над областью главных идеалов относительно преобразования подобия

В. М. Прокип

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Львов

Пусть $\mathrm{R}_{m,n}$ — множество $m\times n$-матриц над областью главных идеалов R с единицей $e \neq 0$ (см. [1]). Обозначим: $\mathrm{tr}A$ — след матрицы $A \in \mathrm{R}_{n,n}$; $0_{m,n}$ — нулевая $m\times n$-матрица; $U(\mathrm{R})$ — мультипликативная группа области R; R_a — полная система вычетов по модулю идеала (a), в которой нулевой класс представлен нулевым элементом области R, а единичный класс – единицей e. В дальнейшем «t» — символ транспонирования.

Напомним, что вектор $\overline{u} \in \mathrm{R}_{k,1}$ называется унимодулярным, если наибольший общий делитель его элементов равен единице e кольца R.

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathrm{R}_{m,n}$ — матрица ранга 1 и $\delta \in \mathrm{R}$ — наибольший общий делитель элементов матрицы A. Для матрицы A существует единственная пара с точностью до ассоциированности унимодулярных векторов $\overline{u} \in \mathrm{R}_{m,1}$ и $\overline{v} \in \mathrm{R}_{n,1}$ таких, что $A = \delta\, \overline{u} \cdot \overline{v}^t$. Если же для матрицы A существует еще одна пара унимодулярных векторов $\overline{u}_1 \in \mathrm{R}_{m,1}$ и $\overline{v}_1 \in \mathrm{R}_{n,1}$ таких, что $A = \delta\, \overline{u}_1 \cdot \overline{v}_1^t$, то $\overline{u} = p\, \overline{u}_1$ и $\overline{v} = p^{-1}\, \overline{v}_1$, где $p \in U(\mathrm{R})$.*

Теорема 1. *Матрица $A \in \mathrm{R}_{n,n}$ ранга один подобна одной из матриц:*

1. Диагональной матрице

$$D_a = \operatorname{diag}\left(a,\ \ 0,\ \ \ldots,\ \ 0\right),$$

если $\mathrm{tr}A = a \neq 0$ *и* $A = 0_{n,n} \pmod{a}$. *При этом диагональная матрица D_a следом $\mathrm{tr}A = a$ определена однозначно.*

2. Нильпотентной матрице

$$N_A = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix},\ \ 0_{n-2,n-2}\right),$$

если $\mathrm{tr}A = 0$. *Элемент $r \in \mathrm{R}$ определен однозначно с точностью до ассоциированности.*

3. Блочно-диагональной матрице

$$D_A = \operatorname{diag}\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ r & 0 \end{bmatrix},\ \ 0_{n-2,n-2}\right),$$

если $\mathrm{tr}A = a \neq 0$ *и* $A \neq 0_{n,n} \pmod{a}$. *Элемент r принадлежит полной системе вычетов по модулю идеала (a), т.е. $r \in \mathrm{R}_a$.*

Следствие 1. *Пусть $A, B \in \mathrm{R}_{n,n}$ — нильпотентные матрицы ранга один. Пусть, далее, $\delta_A, \delta_B \in \mathrm{R}$ — найбольшие общие делители элементов матриц A и B соответственно. Нильпотентные матрицы A и B ранга один подобны тогда и только тогда, когда элементы δ_A и δ_B ассоциированы, т.е. $\delta_A = p\,\delta_B$, где $p \in U(\mathrm{R})$.*

Список литературы

1. W. C. Brown. Matrices over commutative rings. New York: Marcel Dekker, 1993.

Арифметические свойства конечных групп

С. В. Путилов

Брянский государственный университет имени И. Г. Петровского, Брянск

Рассматриваются только конечные группы. Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Подгруппа A группы G называется

$\mathbb{P}$-субнормальной [1], если $A = G$ или существует цепочка подгрупп $A = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = G$ в группе G такая, что $[A_i : A_{i-1}] \in \mathbb{P}$. Подгруппу B группы G назовем почти $\mathbb{P}$-субнормальной, если $B \subset A$ и $n \geq 1$. Здесь продолжаются исследования, начатые в [1].

Теорема 1. *Пусть в группе G нормализатор любой силовской подгруппы или $\mathbb{P}$-субнормален, или почти $\mathbb{P}$-субнормален. Если каждый почти $\mathbb{P}$-субнормальный нормализатор силовской p-подгруппы p-нильпотентен для соответствующего простого числа p, то G сверхразрешима.*

Теорема 2. *Если нормализаторы центров всех силовских подгрупп группы G $\mathbb{P}$-субнормальны, то G имеет упорядоченную силовскую башню сверхразрешимого типа.*

В частности, если все силовские подгруппы в группе G абелевы, то G сверхразрешима, когда в G выполняется условие теоремы 2, что следует из теоремы 3.1 [1].

Список литературы

1. V. Kniahina, V. Monakhov. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups // J. of Group Theory. 2013. V. 2, № 4. P. 21–29.

К вопросу перечисления частичных порядков

В. И. Родионов

Удмуртский государственный университет, Ижевск

Через $\mathcal{V}_0(N)$ обозначим совокупность всех частичных порядков, определенных на множестве $N \doteq \{1, \ldots, n\}$. Существует биекция между множеством $\mathcal{V}_0(N)$ и множеством всех помеченных транзитивных орграфов, определенных на N; существует биекция между $\mathcal{V}_0(N)$ и множеством всех помеченных T_0-топологий, определенных на множестве N. Обозначим через $T_0(n)$ число таких топологий; в частности, $\operatorname{card} \mathcal{V}_0(N) = T_0(n)$.

Зафиксируем натуральные числа $p_1, \ldots, p_k$ такие, что $p_1 + \ldots + p_k = n$, и пусть $N_r \doteq \{ p_1 + \ldots + p_{r-1} + 1, \ldots, p_1 + \ldots + p_r \}$ для всех $r = 1, \ldots, k$,

$$\triangle \doteq \{ (i,j) \in N^2 \colon i > j \}, \qquad D \doteq \{ (i,j) \in N_1^2 \cup \ldots \cup N_k^2 \colon i \leqslant j \}.$$

Через $\mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k)$ обозначим семейство всех $\sigma \in \mathcal{V}_0(N)$ таких, что $\sigma_{ij} = \delta_{ij}$ для любых $(i, j) \in \triangle \cup D$ (мы отождествляем отношения σ и их матрицы смежности), и пусть $W(p_1, \ldots, p_k) \doteq \operatorname{card} \mathcal{W}(p_1, \ldots, p_k)$.

Теорема 1. *Для любого натурального n справедливо равенство*

$$T_0(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \ldots p_k!} W(p_1, \ldots, p_k), \tag{1}$$

где суммирование ведется по всем упорядоченным наборам $(p_1, \ldots, p_k)$ натуральных чисел таких, что $p_1 + \ldots + p_k = n$.

Пусть D_k — это группа диэдра.

Теорема 2. *Для любых $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$ и $\pi \in D_k$ имеет место равенство*

$$W(p_{\pi(1)}, \ldots, p_{\pi(k)}) = W(p_1, \ldots, p_k).$$

Если интерпретировать $\mathcal{V}_0(N)$ как совокупность помеченных транзитивных орграфов (в этом случае полагаем $\sigma_{ii} = 0$ для всех $\sigma \in \mathcal{V}_0(N)$ и $i \in N$, исключая из графов σ петли), то включение $\sigma \in \mathcal{V}_0(N)$ влечет включение $\sigma \in \mathcal{A}(N)$, то есть σ — это помеченный ациклический орграф. Согласно [1] справедлива формула, аналогичная (1):

$$\operatorname{card} \mathcal{A}(N) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \ldots p_k!} 2^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2},$$

и ее обобщение

$$A_n(x) = \sum_{p_1+\ldots+p_k=n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{p_1! \ldots p_k!} (1+x)^{(n^2-p_1^2-\ldots-p_k^2)/2},$$

где $A_n(x) = \sum_r A_{nr} x^r$ — производящая функция (полином), в которой через A_{nr} обозначено количество помеченных ациклических орграфов порядка n, имеющих ровно r дуг.

Список литературы

1. V. I. Rodionov. On the number of labeled acyclic digraphs // Discrete Math. 1992. V. 105. P. 319–321.

Феноменологическое описание фазовых переходов в слоистом перовките $CsScF_4$

И. Н. Сафонов, В. А. Степаненко, С. В. Мисюль
Сибирский федеральный университет, Красноярск

Термодинамический потенциал (ТП), описывающий фазовые превращения в кристалле, обладающем симметрией $P4/mmm$, по неприводимым представлениям M_2^+ (параметр порядка (ПП) η_1) и X_2^- (η_2, η_3) имеет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} a_i \eta_1^{2i} + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i I_1^i + \sum_{i=1}^{2} \beta_i I_2^i + \delta_1 I_1 I_2 + \delta_2 I_1^2 I_2 + \kappa \eta_1^2 I_1 + \gamma \eta_1 \eta_2 \eta_3 \left(\eta_2^2 - \eta_3^2\right), \quad (1)$$

где $I_1 = \left(\eta_2^2 + \eta_3^2\right)$, $I_2 = \left(\eta_2^2 - \eta_3^2\right)^2$ — инвариантные комбинации ПП, $a_1 = a_0(T - T_c)$, $\alpha_1 = \alpha_0(T - T_c)$, T — температура, T_c — температура ФП.

Зависимости $\eta_i(T)$ и $\Phi(T)$ определяется из условия миниума Φ по η_i:

$$\partial\Phi/\partial\eta_i = 0, \quad \partial^2\Phi/\partial\eta_i^2 \geq 0. \quad (2)$$

Решение этой системы в общем виде в радикалах получить невозможно, поэтому обычно накладываются дополнительные ограничения на значения коэффициентов полинома (1) или добавляются соотношения между η_i, исходя из особенностей рассматриваемого соединения [1]. Избавиться от введения таких ограничений можно, приведя систему (2) к виду $\xi_i^{m_i} + \sum_{k=1}^{p_i} \alpha_k^i \xi_1^{m_{1k}^i} \ldots \xi_n^{m_{nk}^i} = 1$ и получая решения по формуле [2, 3]

$$\xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{\prod_{j=1}^{p_i} \left(-\alpha_j^i\right)^{k_j^i} \Gamma\left(m_i^{-1} \mathrm{M}_i\right)}{m_i \prod_{j=1}^{p_i} \left(k_j^i!\right) \Gamma\left(m_i^{-1} \mathrm{M}_i - \sum_{j=1}^{p_i} k_j^i + 1\right)} \right] \times \\ \times \begin{vmatrix} \mathrm{M}_1 - \sum_{j=1}^{p_1} m_{1j}^1 k_j^1 & \cdots & -\sum_{j=1}^{p_1} m_{nj}^1 k_j^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sum_{j=1}^{p_n} m_{1j}^n k_j^n & \cdots & \mathrm{M}_n - \sum_{j=1}^{p_n} m_{nj}^n k_j^n \end{vmatrix}, \quad (3)$$

где $\mathrm{M}_i = \mu_i + \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{p_j} m_{is}^j k_s^j$, k — мультииндекс.

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ Сибирскому федеральному университету на выполнение НИР в 2016 году (Задание № 3.2534.2016/K).

Список литературы

1. Ю. М. Гуфан. Структурные фазовые переходы. М.: Наука, 1982. 304 с.

2. В. А. Степаненко. О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций // Вестн. КрасГУ. 2003. № 2. С. 35–48.

3. С. В. Мисюль, В. А. Степаненко. Решение уравнений состояния в задаче о фазовых переходах второго рода в кристаллах // Вестн. КрасГАУ. 2006. № 11. С. 211–213.

Конечные группы с обобщенно субнормальными силовскими подгруппами

В. Н. Семенчук

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель

Рассматриваются только конечные группы. Важную роль при изучении строения конечных групп играют силовские подгруппы. Например, группа, у которой все силовские подгруппы субнормальны, нильпотентна.

В теории классов конечных групп обобщением понятия субнормальности является понятие $\mathfrak{F}$-достижимости, введенное Кегелем в работе [1].

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Назовем подгруппу H $\mathfrak{F}$-достижимой в группе G, если существует цепь подгрупп*

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

такая, что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ либо подгруппа H_i нормальна в H_{i-1}, либо $(H_{i-1})^{\mathfrak{F}} \subseteq H_i$.

В настоящем сообщении рассматривается задача изучения строения конечных групп, у которых силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая наследственная формация, у которой любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа разрешима. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) любая группа G, у которой все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы и принадлежат $\mathfrak{F}$, также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) любая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа G либо бипримарная p-замкнутая ($p \in \pi(G)$) группа, либо примарная группа.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп. Группа является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы в G.*

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-разложимых групп. Группа является p-разложимой тогда и только тогда, когда у нее все силовские подгруппы $\mathfrak{F}$-достижимы в G.*

Следствие 3. *Группа является абелевой тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы абелевы и субнормальны.*

Список литературы

1. O. H. Kegel. Untergruppenverbände endlicher Gruppen, die Subnormalteilorverband echt enthalten // Arch. Math. 1978. V. 30. P. 225–228.

О характеризации почти слойно конечных групп

В. И. Сенашов

Институт вычислительного моделирования СО РАН,

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Почти слойно конечные группы — это расширения слойно конечных групп при помощи конечных групп.

Группа называется *черниковской*, если она либо конечна, либо является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических групп.

Группой Шункова называется такая группа G, в которой для любой ее конечной подгруппы K в фактор-группе $N_G(K)/K$ любые два сопряженных элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

В работе почти слойно конечные группы получают характеризацию в классе периодических групп Шункова. Автором аналогичная теорема ранее была доказана для групп с условием минимальности для не почти слойно конечных подгрупп [1, 2].

Теорема 1. *Пусть G — периодическая группа Шункова, централизаторы каждой инволюции которой черниковские. Если нормализатор любой нетривиальной конечной подгруппы группы G почти слойно конечен, то G — почти слойно конечная группа.*

Список литературы

1. В. И. Сенашов. Характеризация групп с некоторыми условиями конечности: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Красноярск, 1997. 235 с.
2. В. И. Сенашов. Почти слойно конечные группы. LAP LAMBERT Academic Publishing, 1993. 106 с.

О группах с квазициклическим централизатором инволюции

А. И. Созутов, Б. Е. Дураков

Сибирский федеральный университет, Красноярск

По известной теореме Бернсайда в конечной группе с циклической силовской 2-подгруппой все элементы нечетного порядка составляют нормальную подгруппу. Для бесконечных периодических групп это утверждение неверно даже в случае, когда силовская 2-подгруппа имеет порядок 2 и является центром группы [1]. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть j — инволюция группы G, $C_G(j)$ — локально циклическая 2-группа не максимальная в G и любые две инволюции из j^G сопряжены при помощи инволюции из j^G. Тогда $G = [j, G] \leftthreetimes C_G(j)$ — группа Фробениуса с абелевым 2-полным ядром $[j, G]$ и дополнением $C_G(j)$.*

Работа поддержана РФФИ, проект № 15-01-04897-а.

Список литературы

1. С. И. Адян. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

О точно дважды транзитивных группах с обобщенно конечными элементами

А. И. Созутов, Е. Б. Дураков

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Группа G подстановок множества F ($|F| \geq k$) называется *точно k-транзитивной* на F, если для любых двух упорядоченных множеств $(a_1, \ldots, a_k)$ и $(b_1, \ldots, b_k)$ элементов из F таких, что $a_i \neq a_j$ и $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$, существует точно один элемент группы T, переводящий a_i в b_i, $i = 1, \ldots, k$. Как известно [1], каждой точно дважды транзитивной группе T соответствует почти-область $F = F(+, \cdot)$, для которой T есть группа $T_2(F)$ аффинных преобразований $x \to a + bx$ ($b \neq 0$), и наоборот, группа $T_2(F)$ аффинных преобразований $x \to a + bx$ ($b \neq 0$) каждой почти-области F точно дважды транзитивна. Если $T_2(F)$ обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой, то почти-область F является почти-полем. В работах [2, 3] построены примеры точно дважды транзитивных групп без регулярных абелевых номальных подгрупп, а в работе [4] на основе групп из [2,3] — примеры точно трижды транзитивных групп. Значит, существуют почти-области, не являющиеся почти-полями и KT-поля (F, σ), в которых почти-области $(F, +, \cdot)$ не почти-поля. Эти результаты дают еще одно основание для изучения указанных структур при дополнительных ограничениях.

В [5] доказана локальная конечность периодических точно трижды транзитивных групп и точно трижды транзитивных групп подстановок с периодическим стабилизатором двух точек. Переформулируем последний результат в терминах монографии [1]:

Теорема 1. *Если (F, ϵ) — KT-поле с периодической группой $(F^*, \cdot)$, то почти-область $(F, +, \cdot)$ является локально конечным полем и группа $T_3(F, \epsilon)$ локально конечна.*

Группа называется *бинарно конечной* (по [6] 2-*конечной*), если любые два элемента в ней порождают конечную подгруппу. В [6] была доказана локальная конечность бинарно конечных точно дважды транзитивных групп. В [7] точно дважды транзитивные группы изучались при более слабых условиях конечности. Неединичный элемент a группы G называется *конечным*, если в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^g \rangle$. Так, в точно дважды транзитивной группе нечетной характеристики инволюции являются конечными элементами. В [7] доказано, что если в группе $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области F есть конечный элемент порядка > 2, то $T_2(F)$ обладает нормальной регулярной абелевой подгруппой и почти-область F является почти-полем конечной характеристики. Если, дополнительно, группа $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области F является группой Шункова и $\mathrm{Char}\, F \neq 2$, то $T_2(F)$ обладает локально конечной периодической частью [7].

Неединичные элементы a, b группы G называются *обобщенно конечными*, если все подгруппы $L_g = \langle a, b^g \rangle$ в группе G конечны. Доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Если в группе $T_2(F)$ аффинных преобразований почти-области F есть обобщенно конечный элемент порядка > 2, то $T_2(F)$ обладает нормальной регулярной абелевой подгруппой, а почти-область F является почти-полем конечной характеристики.*

Работа поддержана РФФИ, проект № 15-01-04897-а.

Список литературы

1. H. Wähling. Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen Ferlag, 1987.

2. E. Rips, Y. Segev, K. Tent. A sharply 2-transitive group without a non-trivial abelian normal subgroup // arXiv:1406.0382v4 [math.GR]. 2014. P. 1–17.

3. K. Tent, M. Ziegler. Sharply 2-transitive groups // arXiv:1408.5612v1 [math.GR]. 2014. P. 1–5.

4. K. Tent. Sharply 3-tranzitive groups. 2015.

5. A. I. Sozutov, E. B. Durakov. Algebra and Logic. 2015. V. 54, № 1.

6. T. Grundhöfer, E. Jabara. Fixed-point-free 2-finite automorphism groups // Arch. Math. 2011. V. 97. P. 219–223.

7. А. И. Созутов. О группах Шункова действующих свободно на абелевых группах // Сиб. матем. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 188–198.

Дробное уравнение теплопроводности во фрактальных средах

В. А. Степаненко, Н. А. Тарасова, П. П. Турчин

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Процессы теплопроводности дисперсных фрактальных материалов не могут быть описаны стандартным уравнением теплопроводности, а требуют решения дробного дифференциального уравнения

$$u'_t = au_x^{(\alpha)}, \tag{1}$$

где a — положительная константа,

$$u_x^{(\alpha)} = \frac{1}{x^{n-\alpha}} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{u_\tau^{(n)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-n+1}}\, d\tau, \tag{2}$$

α — порядок дробной производной, причем $(n-1) < \alpha < n$, далее полагаем $n = 2$.

Определение дробной производной (2) отличается от дробной производной Капуто [1] множителем $x^{-(n-\alpha)}$, при этом отпадает необходимость вводить жесткое ограничение $u_x^{(\alpha)}(0) = 0$.

Если начальное распределение температуры по бесконечному ($x \in (-\infty, \infty)$) стержню задается функцией $f(x)$, то решение уравнения (1) с производной (2) есть

$$u(t,x) = f(x) + at \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2+m)}(0)}{\Gamma(3+m-\alpha)} x^m +$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(2+m)}(0)}{\Gamma(2k+1+m-\alpha)} \prod_{q=1}^{k-1} \frac{(2q+m)!}{\Gamma(2q+m+1-\alpha)} x^m. \tag{3}$$

При $\alpha = 2$ получаем решение для обыкновенного уравнения теплопроводности $u'_t = au_{xx}$ в сплошной среде (для бесконечного стержня):

$$u(t,x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(at)^k}{k!} f^{(2k)}(x). \qquad (4)$$

Список литературы

1. С. Х. Самко. Интегралы и производные дробного порядка. Минск: Наука и техника, 1987. С. 687.

Об абелевых группах, кольца эндоморфизмов которых являются примитивными отделимыми топологическими кольцами

А. В. Титова

Томский государственный университет, Томск

В монографии [1] сформулирована проблема № 15: «Свести исследование смешанных групп с нётеровыми справа, полупервичными или коммутативными кольцами эндоморфизмов к исследованию групп без кручения с соответствующими кольцами эндоморфизмов». В данных тезисах показаны некоторые необходимые условия, которыми должна обладать абелева группа из некоторого класса $\mathbb{K}$, имеющая примитивное отделимое топологическое кольцо эндоморфизмов.

Введем некоторые обозначения: $T_p(G)$ — p-компонента периодической части группы G, $E(G)$ — кольцо эндоморфизмов группы G.

Определение 1. *Будем говорить, что смешанная редуцированная группа G принадлежит классу $\mathbb{K}$, если выполняются следующие условия:*

1) *для любого $p \in P$ следует, что $G = T_p(G) \bigoplus E_p$;*
2) *если $B = \bigcap\limits_{p \in P} E_p \neq 0$, то существует B-высокая подгруппа A группы G, содержащая $T(G)$, причём для любого простого числа q такого, что $qB \neq B$ следует, что $qA = A$.*

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathbb{K}$. Если $E(G)$ — примитивное [2] отделимое топологическое кольцо, тогда для любого $p \in P$ в разложении $G = T_p(G) \oplus E_p$ подгруппа $T_p(G)$ является элементарной и $pE_p = E_p$, причем выполняется одно из условий:*
1) если $\bigcap_{p\in P} E_p = 0$, то G является psp-группой;
2) если $\bigcap_{p\in P} E_p \neq 0$, то $G = A \oplus (\bigcap_{p\in P} E_p)$, причем выполняются следующие условия:

a) если A — смешанная группа, то A удовлетворяет условию конечности и является psp-группой;

b) $qA = A$ для любого простого числа q такого, что $q(\bigcap_{p\in P} E_p) \neq \bigcap_{p\in P} E_p$;

c) $\bigcap_{p\in P} E_p$ — группа без кручения с полупервичным кольцом эндоморфизмов.

Список литературы

1. П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев. Связи абелевых групп и их колец эндоморфизмов. Томск: ТГУ, 2002.

2. С. Т. Главацкий, А. В. Михалев, В. В. Тензина. Топологический радикал Декобсона. II // Фундамент. и прикл. матем. 2011/2012. Т. 17, № 1. С. 53–64.

Квазитождества нильпотентных йордановых луп

В. И. Урсу

Институт математики «Симион Стойлов» Румынской академии,

Технический университет Молдовы

Одна из основных теорем по теории квазимногообразий является теорема Ольшанского (см. [1]), согласно которой конечная группа имеет конечный базис квазитождеств тогда и только тогда, когда все ее силовские подгруппы абелевы. В доказательстве этой теоремы, в случае когда конечная группа содержит некоммутативная нильпотентная подгруппа, автор показал что все квазитождества этой группы не имеют базис квазитождеств от конечного числа переменных. Это провоцировало получить аналогичные результаты и для других нильпотентных алгебр авторами работ, например [2–4]. В данной работе показано, что такие примеры существуют и в классе йордановых нильпотентных луп.

Лупа называется йордановой, если в ней выполняются тождества

$$x \cdot y = y \cdot x,\ xx \cdot yx = (xx \cdot y)x.$$

Поскольку йордановая лупа коммутативна, ее правое и левое деления совпадают, поэтому предполагается, что сигнатура йордановых луп состоит из двух бинарных функциональных символов. В этой сигнатуре для любого простого числа $p = 2, 3, \dots$ в классе йордановых луп с тождеством $x^p = 1$ построена неассоциативная и нильпотентная йордановая лупа L с наименьшим порядком. Для этих луп L доказана

Теорема 1. *Йордановая лупа L не имеет базис квазитождеств от конечного числа переменных, т.е. ее аксиоматический ранг $q = \infty$.*

Замечание. Наименьшая неассоциативная и нильпотентная йордановая лупа с экспонентом p (p – простое число) порождается двумя элементами и имеет p^3 элементов. В частности, наименьшая нильпотентная йордановая лупа с аксиоматическим квазирангом $q = \infty$ содержит 8 элементов.

Список литературы

1. А. Ю. Ольшанский. Условные тождества в конечных группах // Сиб. матем. журн. 1974. V. 15, № 6. С. 1409–1413.

2. А. И.Будкин. Аксиоматически ранг квазимногообразия правоупорядочиваемых групп // Алгебра и логика. 1986. V. 25, № 3. С. 499–507.

3. А. Н. Феодоров. Квазитождества 2-нильпотентных групп // Матем. заметки. 1987. V. 40, № 5. С. 590–597.

4. V. I. Ursu. О квазитождествах конечно-порожденных коммутативных луп Муфанг // Algebra & Logika. 1991. V. 30, № 6. С. 726–734.

Перечисление идеалов нильтреугольных подалгебр алгебр Шевалле

Н. Д. Ходюня

Сибирский федеральный университет, Красноярск

Алгебру Шевалле над полем K, ассоциированную с произвольной системой корней Φ, характеризуют базисом Шевалле. В ней выделяют нильтреугольную подалгебру $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r \ (r \in \Phi^+)\}$. Исследуется проблема (2) перечисления всех идеалов алгебр Ли $N\Phi(K)$ классических типов над конечным полем $K = GF(q)$ (или $N\Phi(q)$).

Для типа A_{n-1} алгебра $N\Phi(K)$ представляется алгеброй Ли, ассоциированной с алгеброй $NT(n, K)$ нижних нильтреугольных $n \times n$ матриц над K. Решить проблему (2) в этом случае удается, используя канонический базис лиева идеала $NT(n, K)$, построенный в [1]. Комбинаторное выражение числа всех идеалов ассоциативной алгебры $NT(n, q)$ указано в [2]; тем самым, для типа A_{n-1} решается проблема (1) из [3] о нахождении числа $\alpha(\Phi, q)$ специальных идеалов.

Для корней $r, s \in \Phi$ считаем $s \leq r$, если $r - s$ имеет линейное разложение с неотрицательными коэффициентами по базе $\Pi(\Phi^+)$. Корни r и s называем *инцидентными*, если $r \leq s$ или $s \leq r$.

Любое множество $\mathcal{L} = \{r_1, r_2, \ldots, r_m\}$ попарно неинцидентных корней из Φ^+ называем *множеством углов типа* Φ^+. Число таких множеств с фиксированным m обозначим через $B(m, \Phi)$. Для классических типов A_{n-1}, B_n, C_n и D_n оно равно, соответственно,

$$\frac{1}{n}\binom{n}{m}\binom{n}{m+1}, \quad \binom{n}{m}^2, \quad \binom{n}{m}^2, \quad \binom{n}{m}\left(\binom{n-1}{m} + \binom{n-2}{m-2}\right).$$

Теорема 1. *Число $\alpha(\Phi, q)$ спеациальных идеалов алгебры $N\Phi(q)$ для классических типов $\Phi = A_{n-1}, B_n, C_n$ или D_n равно*

$$\sum_{m=0}^{n} B(m, \Phi) \sum_{1=j_1<j_2<\ldots<j_t\leq m} \frac{(q^t-1)^{m-j_t}}{(q-1)^{t-j_t}} \cdot \prod_{k=2}^{t-1} (\frac{q^k-1}{q-1})^{j_{k+1}-j_k-1}. \qquad (1)$$

Г.П. Егорычев находит формулы в замкнутом виде для числа $\alpha(\Phi, q)$. $B(m, \Phi)$ известны и для исключительных типов [3] (и ссылки там же), [4].

Исследования поддержаны грантом РФФИ (проект 16-01-00707).

Список литературы

1. В. М. Левчук, А. В. Литаврин, Н. Д. Ходюня и др. Нильтреугольные подалгебры алгебр Шевалле и их обобщения // Владикавк. матем. журн. 2015. № 2. С. 37–46.
2. В. П. Кривоколеско, В. М. Левчук. Перечисление идеалов исключительных нильпотентных матричных алгебр // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. № 1. С. 166–171.
3. G. P. Egorychev, V. M. Levchuk. Enumeration in the Chevalley algebras // ACM SIGSAM Bulletin. 2001. V. 35, № 2. P. 20–34.
4. C. Athanasiadis. On a refinement of the generalized Catalan numbers for Weyl groups // Transactions of the American Math. Society. 2005. V. 357, № 1. P. 179–197.

О drl-полукольце, вложимом в l-кольцо

В. В. Чермных, О. В. Чермных

Вятский государственный университет, Киров

С основными понятиями и свойствами drl-полугрупп и drl-полуколец можно познакомиться в [1, 2].

Алгебра $(S, +, \cdot, \vee, \wedge, -, 0)$ называется *drl-полукольцом*, если выполняются условия:

(1) $(S, +, \cdot, 0)$ — полукольцо;

(2) $(S, \vee, \wedge)$ — решетка (с порядком $\leq$);

(3) сложение $+$ дистрибутивно относительно $\vee$ и $\wedge$;

(4) для любых $a, b \in S$ $a - b$ — наименьший элемент $z \in S$ такой, что $b + z \geq a$;

(5) $(a - b) \vee 0 + b \leq a \vee b$ для любых $a, b \in S$;

(6) $a(b - c) = ab - ac$ и $(a - b)c = ac - bc$ для любых $a, b, c \in S$;

(7) $ab \geq 0$ для любых $a, b \geq 0$ из S.

Полукольцо S называется *аддитивно сократимым*, если $a + c = b + c$ влечет $a = b$. Хорошо известно, что вложимость полукольца в кольцо равносильна аддитивной сократимости полукольца. Возникающее кольцо R носит название *кольца разностей*. Элементами R являются классы упорядоченных пар $[a, b], a, b \in S$, причем,

$[a,b]=[c,d]\Leftrightarrow a+d=b+c, [a,b]+[c,d]=[a+c,b+d], [a,b][c,d]=[ac+bd,ad+bc]$.

Положив $[a,b]\vee_R[c,d]=[(a+d)\vee(c+b),b+d], [a,b]\wedge_R[c,d]=[(a+d)\wedge(c+b),b+d]$, получаем

Предложение 1. $(R,\leq_R)$ *является решеткой с точными гранями* $\vee_R$ *и* $\wedge_R$. *Кольцо разностей аддитивно сократимого* drl*-полукольца является* l*-кольцом.*

Отметим, что в общем случае drl-полукольцо не является подалгеброй своего кольца разностей, поскольку при ограничении R на S кольцевая разность не обязана совпадать с разностью drl-полукольца. Исключение составляет тривиальная ситуация, когда S изначально является l-кольцом.

Предложение 2. *Кольцо разностей* drl*-полукольца* S *линейно упорядочено в точности тогда, когда линейно упорядочено* S.

Для описания связи идеалов аддитивно сократимого drl-полукольца S с идеалами его кольца разностей R введем обозначения. Пусть $\varphi:S\to R, \varphi(s)=[s,0]$ — вложение. Если $A\subseteq S, I\subseteq R$, то положим $A_R=\{[a,b]:a,b\in A\}, I_S=\{s\in S:\varphi(s)\in I\}$.

Предложение 3. *Пусть* S — drl*-полукольцо,* R — *его кольцо разностей,* A, I — *идеалы* S *и* R *соответственно. Тогда справедливы утверждения:* (1) A_R — *идеал в* R*;* (2) I_S — *идеал в* S*;* (3) $(A_R)_S=A$*;* (4) $(I_S)_R=I$*;* (5) *решетки идеалов* S *и* R *изоморфны.*

Первый автор поддержан грантом Министерства образования и науки РФ, проект № 1.1375.2014/K.

Список литературы

1. K. L. N. Swamy. Dually residuated lattice ordered semigroups // Math. Ann. 1965. V. 159. P. 105–114.

2. А. В. Миклин, В. В. Черемных. О drl-полукольцах // Матем. вестн. пед. вузов и ун-тов Волго-Вятск. региона. 2014. № 16. С. 87–95.

Вполне инертные подгруппы вполне разложимых абелевых групп без кручения

А. Р. Чехлов

Томский государственный университет, Томск

Подгруппа H группы G называется: *чистой*, если $H \cap nG = nH$ для каждого натурального n; *вполне инвариантной*, если $\varphi H \subseteq H$ для всякого φ из кольца эндоморфизмов $E(G)$ группы G.

Подгруппа H группы G называется *вполне инертной*, если подгруппа $H \cap \varphi H$ имеет конечный индекс в φH для всякого $\varphi \in E(G)$. Все чистые вполне инертные подгруппы групп без кручения вполне инвариантны. Подгруппы H, K группы G называются *соизмеримыми*, если подгруппа $K \cap H$ имеет конечный индекс как в K, так и в H. Подгруппа, соизмеримая с некоторой вполне инертной подгруппой, сама является вполне инертной. Согласно [1] всякая вполне инертная подгруппа свободной группы соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой; а в [2] показано, что всякая вполне инертная подгруппа p-группы, разложимой в прямую сумму циклических групп, также соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой.

Лемма 1. *Если подгруппа H соизмерима с подгруппами H_i, $i = 1, \ldots, n$, то H соизмерима с $H_1 + \ldots + H_n$ и с $H_1 \cap \ldots \cap H_n$.*

Лемма 2. *Если H — вполне инертная подгруппа группы $G = A \oplus B$, то подгруппа $H \cap A$ вполне инертна в A, подгруппа $(H \cap A) \oplus (H \cap B)$ соизмерима с H, а если $\varphi \in Hom(B, A)$, то подгруппа $H \cap A + \varphi(H \cap B)$ соизмерима с $H \cap A$.*

Получен полный ответ, когда вполне инертные подгруппы вполне разложимой группы без кручения соизмеримы с вполне инвариантными.

Теорема 1. *Пусть $G = G_1 \oplus \ldots \oplus G_n$, где $r(G_i) = 1$, — вполне разложимая группа без кручения конечного ранга. Каждая вполне инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $pG_i \neq G_i$ для всякого $i = 1, \ldots, n$ и для всякого простого числа p, причем при всех $i, j = 1, \ldots, n$ типы $t(G_i)$, $t(G_j)$ либо равны, либо несравнимы.*

Теорема 2. *Пусть G — редуцированная вполне разложимая группа без кручения. Всякая вполне инертная подгруппа группы G соизмерима с некоторой вполне инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда каждая ее однородная компонента A конечного ранга вполне инвариантна, причем A не делится ни на одно простое число.*

Список литературы

1. D. Dikranjan, L. Salce, P. Zanardo. Fully inert subgroups of free Abelian groups // Period. Math. Hungar. 2014. V. 69, № 1. P. 69–78.
2. B. Goldsmith, L. Salce, P. Zanardo. Fully inert subgroups of Abelian p-groups // J. of Algebra. 2014. V. 419. P. 332–349.

Продолжения конгруэнций полуполей непрерывных функций на полукольца непрерывных функций со значениями в луче $(0;\infty]$

Д. В. Чупраков

Вятский государственный университет, Киров

Доклад посвящен вопросу продолжения конгруэнций полуполей $U(X)$ и $U^{\vee}(X)$ непрерывных положительных функций, определённых на топологическом пространстве X до конгруэнций на полукольцах $C^{\infty}(X)$ и $C^{\vee}_{\infty}(X)$ соответственно. Работа продолжает исследования Е. М. Вечтомова и Д. В. Чупракова [1] и Е. М. Вечтомова и Н. В. Шалагиновой [2].

Под полукольцом S понимается алгебраическая структура с коммутативно-ассоциативной операцией сложения и ассоциативной операцией умножения, дистрибутивной относительно сложения с обеих сторон. Полукольцо непрерывных функций, определенных на топологическом пространстве X и принимающих значения из множества $(0;\infty]$ положительных действительных чисел, с поглощающим элементом ∞ и поточечными операциями сложения и умножения, обозначим $C^{\infty}(X)$. Взяв вместо сложения операцию поточечного максимума функций $\vee$, получим полукольцо $C^{\vee}_{\infty}(X)$.

Теорема 1. *Для любого пространства X справедливы утверждения:*

1. *Наименьшей конгруэнцией, продолжающей ядро K полукольца $U^{\vee}(X)$, является отношение $\rho_K\colon f\,\rho_K\,g \Leftrightarrow gk_1 \leqslant f \leqslant gk_2$ для некоторых $k_1, k_2 \in K$. При этом $[1]_{\rho_K} = K$.*

2. *Наибольшей конгруэнцией с классом единицы, равным ядру K на полукольце $C^{\vee}_{\infty}(X)$, является отношение δ_K, классы которого имеют вид $[f]_{\delta_K} = fK$, если $f \in U^{\vee}(X)$, и склеивающее все функции, не лежащие в $U^{\vee}(X)$.*

3. *Наименьшей конгруэнцией, продолжающей ядро K полукольца $U(X)$, является транзитивное замыкание $\hat{\sigma}_K$ рефлексивного и симметричного отношения σ_K, в котором находятся функции $f, g \in C^{\infty}(X)$, если $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$ и $g = \sum_{i=1}^{n} f_i k_i$ для некоторых $k_1, \ldots, k_n \in K$.*

Теорема 2. *Для любого пространства X равносильны условия:*

1) *X — F-пространство;*

2) *$\hat{\sigma}_K = \rho_K$ для любого ядра K полуполя $U(X)$;*

3) *для любого ядра K полуполя $U^{\vee}(X)$ $f\,\rho_K\,g \iff f = gk$, где $k \in K$.*

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 1.1375.2014/K.

Список литературы

1. Е. М. Вечтомов, Д. В. Чупраков. О продолжении конгруэнций на полукольцах непрерывных функций // Матем. заметки. 2009. Т. 85. № 6. С. 803–816.

2. Е. М. Вечтомов, Н. В. Шалагинова. Полукольца непрерывных $(0;\infty]$-значных функций // Фундам. и прикл. матем. 2016. Т. 21 (в печати).

Сплетающие соотношения для двух последовательностей дифференциальных операторов и точные решения одного класса уравнений в частных производных

Ю. В. Шанько

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассмотрим две последовательности линейных дифференциальных операторов $\{L_1^n\}$ и $\{L_2^n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, связанных сплетающими соотношениями:

$$L_2^{n+1} L_1^n = L_1^{n+1} L_2^n. \tag{1}$$

Зададим оператор второго порядка с неразложимым главным символом

$$L_2^0 = \sum_{i+j+k=0}^{i+j+k=2} a^{ijk}(t, x, y) \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^k$$

и оператор первого порядка

$$L_1^0 = L_2 q - a^{000} q + \sum_{i+j+k=1}^{i+j+k=2} a^{ijk} (i \partial_t^{i-1} \partial_x^j \partial_y^k q \partial_t +$$

$$+ j \partial_t^i \partial_x^{j-1} \partial_y^k q \partial_x + k \partial_t^i \partial_x^j \partial_y^{k-1} q \partial_y),$$

где функция q удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i+j+k=2} a^{ijk} q_t^i q_x^j q_y^k = 0.$$

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$L_2^0 u = 0. \tag{2}$$

Для того чтобы уравнение (2) для любого n имело решения, зависящее от произвольной бесконечно дифференцируемой функции Φ вида

$$u = \sum_{i=0}^{n} u_i(t, x, y) \Phi^{(i)}(q), \tag{3}$$

необходимо, чтобы существовали операторы первого порядка $\{L_1^n\}$ и второго порядка $\{L_2^n\}$, связанные соотношениями (1).

В докладе рассматриваются условия, при которых существуют бесконечные последовательности дифференциальных операторов, связанных соотношениями (1). Приводятся примеры решений вида (3) для уравнения двумерной акустики.

Метод схем программ для разрешимости пропозициональных программных логик

Н. В. Шилов

Институт систем информатики имени А. П. Ершова СО РАН, Новосибирск

Семейство программных логик включает динамические и темпоральные логики, а также логики процессов. Особо популярны пропозициональные варианты этих логик в связи с их широкой применимостью для спецификации и автоматической верификации как отдельных программ, так и программных систем (включая распределённые и мультиагентные системы). Поэтому исследование и разработка алгоритмов (разрешающих процедур) для валидации (проверки тождественной истинности), поиска или генерации доказательств, верификации в моделях (model checking) формул программных логик является важным направлением исследований.

Суть схемного метода доказательства разрешимости программных логик состоит в следующем. Формулы исследуемой логики транслируются в так называемые недетерминированные схемы Янова (которые являются естественным обобщением классических схем Янова [1]) таким образом, что транслируемая формула истинна тогда и только тогда, когда соответствующая схема является тотальной (т.е. всегда останавливается) в специальном классе интерпретаций. Так как соотвествующая проблема тотальности разрешима (т.е. имеется алгоритм проверки тотальности в специальном классе интерпретаций), то исследуемая пропозициональная программная логика также оказывается разрешимой.

Первоначальный вариант схемного метода был разработан в 1983–1988 гг. [2] для доказательства разрешимости вариантов Пропозициональной Динамической Логики (Propositional Dynamic Logic, PDL). В 1993–1997 гг. схемный метод был распространён [3] на так называемое μ-исчисление, которое можно считать расширением PDL за счет использования неподвижных точек по пропозициональным переменным. Схемный метод развивался одновременно и независимо от теоретико-автоматного метода [4, 5] доказательства разрешимости пропозициональных программных логик.

В докладе будет дан обзор развития и результатов схемного метода за 33 года — с 1983 по 2016 гг. Подробнее со схемным методом можно познакомиться по журнальной статье [6] или по ее черновой версии на странице автора (см. `http://persons.iis.nsk.su/files/persons/pages/shilovprogsoftware15psi_0.pdf`).

Список литературы

1. А. П. Ершов. Об операторных схемах Янова // Проблемы кибернетики: сб. науч. тр. № 20. М.: Наука, 1968. С. 181–200.
2. В. А. Непомнящий, Н. В. Шилов. Схемы недетерминированных программ и их отношение к динамической логике // Кибернетика. 1988. № 3. С.12–19.
3. N. V. Shilov. Program Schemata vs. Automata for Decidability of Program Logics // Theor. Comput. Sci. 1997. V. 175. P. 15–27.
4. M. Y. Vardi, P. Wolper. Automata-Theoretic techniques for modal logics of programs // J. of Computer and System Sciences. 1986. V. 32, № 2. P. 183–221.
5. E. A. Emerson, C. J. Jutla The Complexity of Tree Automata and Logics of Programs // SIAM J. Comput. 1999. V. 29. P.132–158.
6. Н. В. Шилов, С. О. Шилова, А. Ю. Бернштейн. Метод схем программ для пропозициональных программных логик за 30 лет // Программирование. 2016. № 4. 24 с. (Статья принята к публикации.)

Some of the Properties of Irreducible Polynomials by Using Liftings

Kamal Aghigh

Faculty of Mathematics, K. N. Toosi University of Technology, Tehran

Let v is a Henselian valuation of any rank of a field K and v is the unique extension of ν to a fixed algebraic closure of K with value group G.

For an over field K' of K contained in K, we shall denote by $G(K')$ and $R(K')$ respectively the value group and the residue field of the valuation v$'$ of K' obtained by restricting v to K'. An extension w of v to a simple transcendental extension $K(x)$ of K is called residually transcendental if the residue field of w is a transcendental extension of the residue field of v.

Using the canonical homomorphism from the valuation ring of v onto its residue field, one can lift any monic irreducible polynomial having coefficients in $R(K)$.

In this paper, it is shown that the concept of lifting of a polynomials is important tool for investigating the properties of irreducible polynomials with coefficients in valued fields.

References

1. Kamal Aghigh, Azadeh Nikseresht. Characterizing distinguished pairs by using lifting of irreducible polynomials // Canadian Math. Bull. 2015. V. 58, № 2. P. 225–232.

Equivalence Condition for Equational Theories

S. V. Babenyshev

Siberian Fire-Rescue Academy, Zheleznogorsk

While studying algebraization phenomena for, what he called, second-order logics, D. Pigozzi [1] discovered that finitely equivalential second-order logics are characterized by the existence of a finite set of ternary terms with special properties. Finitely equivalential second-order logics are interesting from the point of view of Universal Algebra because

- they have quasivarieties as their equivalent algebraic semantical counterparts;

- equational theories of quasivarieties and varieties are a particular case of second-order logics, so they can be also finitely equivalential, under the same conditions.

In [2], an operator-based approach, similar to the one employed in [3], was adopted for studying the same topic of algebraization of second-order logics, which will be called from now on the *2nd-level deductive systems* (to better reflect their propositional nature). Using the notation employed in [2], the pertinent characterization can be formulated as follows.

Theorem 1. *A 2nd-level deductive system $\mathcal{G}$ is finitely equivalential iff there exists a finite set J of ternary terms of the corresponding algebraic signature Σ, such that for every pair of formulas $\alpha, \beta \in \mathrm{Fm}_\Sigma$*

$$\{\varphi(\alpha,\alpha,\beta) \approx \varphi(\alpha,\beta,\beta) \mid \varphi \in J\}^{\mathrm{Th}\mathcal{G}} = \{t(\alpha,\bar{\beta}) \approx t(\alpha,\bar{\beta}) \mid t \in \mathcal{T}_\Sigma\}^{\mathrm{Th}\mathcal{G}},$$

where

- *$\mathcal{T}_\Sigma$ is the set of all unary term functions over absolutely free algebra Fm_Σ of the signature Σ (*translations*);*
- *$X^{\mathrm{Th}\mathcal{G}}$ means the closure of the set X in the closure system $\mathrm{Th}\,\mathcal{G}$ of all theories of the deductive system $\mathcal{G}$.*

In the case of the equational theory of a variety V, considered as a 2nd-level deductive system over formula algebra Fm_Σ, this result amounts to the fact that the set $\{\varphi(\alpha,\alpha,\beta) \approx \varphi(\alpha,\beta,\beta)\}_{\varphi\in J}$ provides a basis for the principal congruence $\{(\alpha,\beta)\}^{\mathrm{Con}V}$ on the formula algebra Fm_Σ.

References

1. D. Pigozzi. Second-order algebraizable logics // Manuscript. 1996.
2. S. Babyonyshev. Metatheories of deductive systems // Ph. D. Thesis. Iowa State University. 2004.
3. B. Herrmann. Characterizing equivalential and algebraizable logics by the Leibniz operator // Studia Logica. 1997. V. 58. P. 305–323.

On Unification and Passive Rules in Multi-modal Temporal Logic of Linear Time and Knowledge LFPK

S. I. Bashmakov, A. V. Kosheleva
Siberian Federal University, Krasnoyarsk

V.V. Rybakov
Manchester Metropolitan University, Manchester, UK

Temporal logic can be viewed as a particular case of modal logic with linear alternative relations [1] or multi-modal logic [2]. Basic unificational problem for modern mathematical logic can be viewed as a question: whether the formula can be converted into a theorem after replacing the variables. Solution of the unificational problem for $\mathcal{LTL}$ has been found by Rybakov [3] and proposed for basic modal and intuitionistic logic.

In [4] has also been proposed descriptions of all non-unifiable formulas in a broad class of modal logics with the proofs, and also given the finite bases of passive rules in these logics. In this work we, continuing [5], have proposed a criterion of formulas non-unifiability in modal logic of knowledge and linear time Future/Past $\mathcal{LPFK}$ which can be considered as a special type of transitive multi-modal logic over the set of integer numbers $\mathbb{Z}$.

Definition 1. *Formula $\alpha(p_1,\dots,p_n)$ is unifiable in an algebraic logic $\mathcal{L}$ iff there is a tuple of formulas $\delta_1,\dots,\delta_n$ such that $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha(\delta_1,\dots,\delta_n)$.*

The alphabet of the language $\mathcal{L}^{LFPK}$ includes a countable set of propositional variables $P := \{p_1,\dots,p_n,\dots\}$, braces (,) default Boolean operations and a set of modal operators $\{\Box_F, \Box_P, \Box_1, \dots, \Box_n\}$. Logic operations $\Diamond_F$, $\Diamond_P$, $\Diamond_i$ determined through $\Box_F$, $\Box_P$, $\Box_i$ as follows: $\Diamond_F = \neg\Box_F\neg$, $\Diamond_P = \neg\Box_P\neg$, $\Diamond_i = \neg\Box_i\neg$.

Temporal k-modal Kripke-frame is a tuple $T = \langle W_T, R_1, R_2, \dots, R_k\rangle$, where W_T is a non-empty set of worlds, $R_1,\dots,R_k$ are some binary relation on W_T, what is more $R_2 = R_1^{-1} := \{(a,b) \mid (b,a) \in R_1\}$ is a converse relation.

Definition 2. *Let $F = \langle W_F, R_1, \dots, R_k\rangle$ is a Kripke-frame, and $\forall R_i$ R_i-cluster is a subset $C^{R_i} \in W_F$ such that $\forall v, z \in C^{R_i} : (vR_iz)\&(zR_iv)$ and $\forall z \in W_F$, $\forall v \in C^{R_i} : ((vR_iz)\&(zR_iv) \Rightarrow z \in C^{R_i})$. For any* *relation* R_i, $C^{R_i}(v)$ *mean that it is the* R_i*-cluster s.t.* $v \in C^{R_i}$ *or cluster, generated by the element* v.

Definition 3. *LFPK-frame is a temporal* $(n+2)$*-modal Kripke-frame*

$$T = \langle Z_T, R_F, R_P, R_1, \ldots, R_n \rangle,$$

where $R_P = R_F^{-1}$ *and:*

a. Z_T *is the disjoint union of clusters of agents* C^t, $t \in \mathbb{Z}$, *and* $C^{t_1} \bigcap C^{t_2} = \emptyset$ *if* $t_1 \neq t_2$;

b. $\forall\, x,\, y \in Z_T\, (x\, R_F\, y \vee y\, R_F\, x)$;

c. $\forall\, x \in Z_T\, (x\, R_F\, x)$;

d. $\forall\, x,\, y,\, z \in Z_T\, (x\, R_F\, y\, \wedge\, y\, R_F\, z \Rightarrow\, x\, R_F\, z)$;

e. $R_1, \ldots, R_n$ *– some equivalent relations in each cluster* C^t.

We denote class of all such frames $\mathcal{LPFK}$.

Definition 4. *Model* M_T *on a* $\mathcal{LPFK}$*-frame* T *is a tuple* $M_T = \langle T, V \rangle$, *where* V *is a valuation of a set of propositional letters* $p \in P$ *on* T, *i.e* $\forall p \in P\ [V(p) \subseteq Z_T]$. *For any such model* M_T $\forall w \in Z_T$:

a. $\langle T, w \rangle \Vdash_V p \Leftrightarrow w \in V(p)$;

b. $\langle T, w \rangle \Vdash_V \Box_F A \Leftrightarrow \forall z \in Z_T(wR_F z \Rightarrow \langle T, z \rangle \Vdash_V A)$;

c. $\langle T, w \rangle \Vdash_V \Box_P A \Leftrightarrow \forall z \in Z_T(wR_P z \Rightarrow \langle T, z \rangle \Vdash_V A)$;

d. $\forall i \in I, \langle T, w \rangle \Vdash_V \Box_i A \Leftrightarrow \forall z \in Z_T(wR_i z \Rightarrow \langle T, z \rangle \Vdash_V A)$.

Definition 5. *Temporal Future/Past logic* $\mathcal{LPFK}$ *is the set of all* $\mathcal{LPFK}$*-valid formulas on all frames:*

$$\mathcal{LPFK} := \{A \in Fma(\mathcal{L}^{LFPK}) | \forall T \in \mathcal{LPFK} : T \Vdash A\}$$

.

Theorem 1. *Any modal formula* A *is non-unifiable in* $\mathcal{LPFK}$ *iff*

$$\Box_F \Box_P A \to \left[\bigvee_{p \in Var(A)} \neg \Box_F \Box_P p \wedge \neg \Box_F \Box_P \neg p \right] \in \mathcal{LPFK}.$$

Definition 6. *Let* $r := A_1, \ldots, A_n / \beta$ *be an inference rule in the logic* $\mathcal{LPFK}$. *The rule* r *called passive for* $\mathcal{LPFK}$ *if for any substitution* g *of formulas instead of variables in* r *never* $g(A_1) \in \mathcal{LPFK}\, \& \ldots \&\, \& g(A_n) \in \mathcal{LPFK}$. *In other words* r *is a passive rule if formulas from its premise have no common unifiers.*

Theorem 2. *The rules* $r_n := \frac{\bigvee_{1\leq i\leq n} \neg\Box_F\Box_P p_i \wedge \neg\Box_F\Box_P\neg p_i}{\perp}$ *form a basis for all passive inference rules in* $\mathcal{LPFK}$.

References

1. K. Segerberg. Modal logics with linear alternative relations // Theoria. 1970. V. 36. P. 301–322.
2. D. M. Gabbay, A. Kurucz, F. Wolter et al. Many-dimensional modal logics: theory and applications // Elsevier Science Pub Co. 2003.
3. V. V. Rybakov. Writing out unifiers in linear temporal logic // J. Logic Computation. 2012. P. 1199–1206.
4. V.V. Rybakov, M. Terziler, C. Gencer. An essay on unification and inference rules for modal logics // Bull. of the Section of Logic. 1999. V. 28, № 3. P. 145—157.
5. S. I. Bashmakov, Unification and inference rules in the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK // J. of Sib. Fed. University. Math. and Physics. 2016. V. 9, № 2. P. 149–157.

On Finite Groups in Which All Maximal Subgroups are π-closed

V. A. Belonogov

N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, Ekaterinburg

Let G be a finite group and π a set of primes. A group G having normal π-Hall subgroup is called π-closed. We write $(G, \pi) \in (*)$ if G is not π-closed and all maximal subgroups of G are π-closed, i. e. G is a minimal non-π-closed group.

Theorem 1. [1] *If* $(G, \pi) \in (*)$ *then* $G/\Phi(G)$ *is a simple non-abelian group or* G *is a Schmidt group.*

Theorem 2. [2] *Let* $(G, \pi) \in (*)$ *and* G *is simple non-abelian group. Then*

(I) $2 \notin \pi$;

(II) G *is isomorphic to one of the following groups:* A_r *where* $r \geq 5$ *is a prime;* $PSL_2(q)$ *where* $q > 5$; $PSL_r(q)$ *and* $PSU_r(q)$ *where* r *is an*

odd prime; $Sz(q)$ *where* $q = 2^{2n+1} \geq 8$; ${}^2G_2(q)$ *where* $q = 3^{2n+1} \geq 27$; ${}^3D_4(q)$; ${}^2F_4(q)$ *where* $q = 2^{2n+1} \geq 8$; $E_8(q)$; *one of sporadic groups* $M_{23}, J_1, J_4, Ly, Fi'_{24}$ *and* F_2.

A further natural **problem** is the following: for every simple group G from (II) to find all sets π of prime numbers such that $(G, \pi) \in (*)$. In [2,Theorem 2] the problem is solved for any sporadic simple group G from (II).

Now we have a theorem in which *the problem is solved for simple groups* A_r *with a prime* $r \geq 5$, $PSL_2(q)$ *with* $q > 5$, $Sz(q)$ *with* $q = 2^{2n+1} \geq 8$, ${}^2G_2(q)$ *with* $q = 3^{2n+1} \geq 27$, ${}^3D_4(q)$ *and* ${}^2F_4(q)$ *with* $q = 2^{2n+1} \geq 8$.

For example, if $G = PSL_2(p)$ with prime $p > 5$ then $(G, \pi) \in (*)$ if and only if $\varnothing \neq \pi \subseteq \pi(p+1) \setminus \{2, 3, 5\}$ or $p \in \pi \subseteq \pi(p(p^2-1)) \setminus \{2, 3, 5\}$, and if $G = Sz(q)$ with $q = 2^r$ for prime r then $(G, \pi) \in (*)$ if and only if $\varnothing \neq \pi \subseteq \pi(q^2 + 1)$ (for non-prime r in latter assertion we must replace $\pi(q^2 + 1)$ by some well-defined its subset $\pi_0(q^2 + 1)$).

The work is supported by the Complex Program of UBRAS (project 15-16-1-5)

References

1. V. A. Belonogov. On finite groups whose all maximal subgroups are π-closed // Works of Int. Scool-Conf. on group theory, ded. to 70 of V. V. Kabanov. Nalchik, 2014. P. 6–9 (in Russian).

2. V. A. Belonogov. Finite simple groups whose all maximal subgroups are π-closed. I // Trudy Inst Mat i Mekh. UrO RAN. 2015. V. 21, № 1. P. 25–34 (in Russian).

Application of $\mathscr{B}_g(n)$-polynomials for Computing of Analytic Functions of Matrices

Yu. N. Belyayev

Syktyvkar State University, Syktyvkar

According to the theorem of Cayley-Hamilton, any matrix A^j of order n can be represented as a linear combination of the first n powers of matrix $A \equiv \|a_{gr}\|$: $A^j = \sum_{h=0}^{n-1} \mathcal{C}_{jh} A^h$. Therefore, if the function $f(\zeta)$ of complex variable ζ can be expanded in a power series $f(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \zeta^j$, and the eigenvalues λ_g, $g = 1, \ldots, n$, of matrix A lie in the circle of convergence of this series, then $f(A) \approx \sum_{h=0}^{n-1} A^h(\alpha_h + \sum_{j=n}^{n+N} \alpha_j \mathcal{C}_{jh})$, in particular

$$\exp A \equiv \|e_{qr}(N)\| \approx \sum_{h=0}^{n-1} A^h \left(\frac{1}{h!} + \sum_{j=n}^{n+N} \frac{1}{j!} \mathcal{C}_{jh} \right). \tag{1}$$

Equalities in the last two formulas become accurate if $N = \infty$.

Theorem 1. *Coordinates $\mathcal{C}_{jh}$ of the matrix A^j in the basis A^0, A, $A^2, \ldots, A^{n-1}$ are equel to*

$$\mathcal{C}_{jh} = \sum_{g=0}^{h} p_{n-h+g} \mathscr{B}_{j-1-g}(n), \quad h = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2}$$

where p_l are coefficients of the characteristic equation of the matrix A, and polynomials $\mathscr{B}_g(n)$ are defined by the equations [1]:

$$\mathscr{B}_g(n) = 0, g = 0, 1, \ldots, n-2;\ \mathscr{B}_{n-1}(n) = 1;\ \mathscr{B}_g(n) = \sum_{l=1}^{n} p_l \mathscr{B}_{g-l}(n). \tag{3}$$

Comparison of formula (2) with representations of the coefficients $\mathcal{C}_{jh}$ by the methods of Cayley-Hamilton, Lagrange-Sylvester, Vandermonde [2] is done. Analytical formulas for the functions A^j and $\exp A$ are found with the help of (2)–(3). Numerical calculation of $\exp A$ by the formulas (1)–(3) is performed by scaling and repeated squaring: $\exp A = [\exp(A/2^j)]^{2^j}$. In this case the required accuracy of numerical calculations is provided by fulfillment of conditions of the following theorem.

Theorem 2. *The relative truncation error*

$$\epsilon \equiv \max |(e_{qr}(\infty) - e_{qr}(N))/e_{qr}(\infty)|$$

in the calculation of the matrix $\exp A$ *using the formulas* (1) - (3) *does not exceed* $\eta^{N+1}/[(n + N)\prod_{i=1}^{N}(n + i)]$, *on the condition that* $\eta = (2n-1)\max|a_{qr}| < 1$.

Application of Theorem 2 is illustrated on the example of solving a system of six differential equations describing the transformation of elastic waves in anisotropic layer.

References

1. Yu. N. Belyayev. On the calculation of functions of matrices // Math. Notes. 2013. V. 94, № 2. P. 177–184.
2. C. Moler, C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of matrix. Twenty-five years later // SIAM Review. 2003. V. 45, № 1. P. 3–49.

Parallel Algorithms and Baer – Kaplansky Theorem in the Theory of Almost Completely Decomposable Abelian Groups

E.A. Blagoveshchenskaya

Petersburg State Transport University, Saint-Petersburg

An almost completely decomposable group (**acd group**) X is a torsion–free abelian group of finite rank containing a completely decomposable subgroup A of finite index. If in addition X/A is a cyclic group then X is called a **crq-group**, see [1]. First we concentrate on the class of *block-rigid* crq-groups X of *ring* type, which means that the types of rank-one summands of A are idempotent and form an antichain, see [2].

Theorem 1. *(Baer–Kaplansky Theorem for crq-groups)*
E. Blagoveshchenskaya, G. Ivanov, P. Schultz

Let X and Y be block-rigid crq-groups of ring type. Then groups X and Y are nearly isomorphic if and only if their endomorphism rings are isomorphic, $End(X) \cong End(Y)$.

In general case of acd-groups when X/A is not necessarily cyclic the links between groups and their endomorphism rings also exist:

Theorem 2. *Let X and Y be acd-groups of ring type. If X and Y are nearly isomorphic then their endomorphism rings are nearly isomorphic as abelian groups.*

The **near isomorphism** is an equivalence, which is weaker than isomorphism. It is traditionally used for classification problem solutions in the theory of torsion-free abelian groups. Such groups have quite complicated structures, non-isomorphic direct decompositions, which can not be classified up to isomorphism. In this situation the determination of groups by their endomorphism rings, proved in Theorem 1, is of special interest, see [3].

Note, that the direct decomposition theory of acd-groups up to near isomorphism is based on parallel algorithms having different applications, in particular, in artificial neural network learning algorithms, see [4].

The author was funded by RFBR (project 14-01-00660 a).

References

1. A. Mader. Almost completely decomposable abelian groups // Gordon and Breach. Algebra, Logic and Applications. Amsterdam, 2000. V. 13.

2. E. Blagoveshchenskaya, G. Ivanov, P. Schultz. The Baer — Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemporary Math. 2001. V. 273. P. 85–93.

3. E. Blagoveshchenskaya. Almost completely decomposable abelian groups and their endomorphism rings. St.-Petersburg: Math. in Polytechnic. University, 2009.

4. E. Blagoveshchenskaya, D. Zuev. On convergence of neural network learning methods // Proceed. of the XIX Int. conf. on computat. mechanics and modern applied software systems (CMMASS' 2015). 2015. P. 130.

The Minimal Condition for Non-abelian Subgroups

N. S. Chernikov

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv

A series of known results are connected with the minimal condition for non-abelian subgroups. For instance, non-abelian locally finite groups with this condition are Chernikov (V. P. Shunkov, 1970); non-abelian weakly graded groups with this condition are Chernikov (N. S. Chernikov, 2008); non-abelian binary finite groups, satisfying the minimal condition for non-abelian metabelian subgroups, are Chernikov too (N. S. Chernikov, 1980). The group G is called weakly graded, if for every g, $h \in G \setminus \{1\}$, the subgroup $< g, g^h >$ possesses a subgroup of finite index $\neq 1$ whenever $| < g > | = \infty$, or g is a p-element $\neq 1$ with some odd prime p and also $[g^p, h] = 1$ and $< g, h >$ is periodic (N. S. Chernikov, see, for example [1]). The class of weakly graded groups is very large. It includes the classes of locally and binary graded groups and (by the way) the classes of locally, binary, residually finite or solvable groups. It includes the classes of $2-$, $RN-$, linear groups. The following recent theorem holds.

Theorem 1. *(N. S. Chernikov [1]). For the weakly graded non-abelian group G the following statements are equivalent:*

(i) *G satisfies the minimal condition for non-abelian non-normal subgroups.*

(ii) *G is a Chernikov group or a solvable group with normal non-abelian subgroups.*

Further, the following new theorem holds (compare with Theorem [2]).

Theorem 2. *(N. S. Chernikov, 2016). The locally graded non-abelian group G satisfies the minimal condition for noncomplemented non-abelian subgroups iff it is a Chernikov group or a solvable locally finite group with complemented non-abelian subgroups.*

The known Olshanskiy's Examples of infinite simple groups with abelian proper subgroups show that in the last theorem the condition: «G is locally graded»' is essential.

Note that locally finite non-abelian groups with complemented non-abelian subgroups are described in [3], [4].

References

1. N. S. Chernikov. Groups satisfying the minimal condition for non-abelian non-normal subgroups // J. of Sib. Federal Univ. Math. and Physics. 2014. V. 7, № 1. P. 22–34.

2. N. S. Chernikov. Shunkov groups with the minimal condition for noncomplemented abelian subgroups // J. of Sib. Federal Univ. Math. and Physics. 2015. V. 8, № 4. P. 377–384.

3. P. P. Baryshovets. On infinite groups with comlemented non-abelian subgroups // Ukr. Mat. Ž. 2013. V. 65, № 11. P. 1443–1455 (in Russian).

4. P. P. Baryshovets. Infinite groups with comlemented non-abelian subgroups // Ukr. Mat. Ž. 2015. V. 67, № 4. P. 447–455 (in Russian).

On Periodic Subgroups of the Finitary Linear Group

O. Yu. Dashkova

The Branch of Moscow state university in Sevastopol, Sevastopol

M. A. Salim

United Arab Emirates University, Al Ain

Let $FL_\nu(K)$ be the finitary linear group where K is a ring with the unit, ν is a linearly ordered set. $FL_\nu(K)$ is investigated in [1, 2]. In particular the finitary unitriangular group $UT_\nu(K)$ is studied in [2].

We study periodic subgroups of the finitary linear group $FL_\nu(K)$ in the case where K is a Dedekind ring, ν is a countable set.

The main result of this paper is the theorem.

Theorem 1. *Let G be a periodic subgroup of $FL_\nu(K)$, K be a Dedekind ring, ν be a countable set. Then G is a (locally nilpotent)-by-countable and locally finite group.*

References

1. V. M. Levchuk. Some locally nilpotent rings and their adjoined groups // Math. Notes. 1987. V. 42, № 5. P. 631–641.

2. Yu. I. Merzlyakov. Equsubgroups of unitriangular groups: the criterion of self-normalization // Reports of the Academy of sciences. 1994. V. 339, № 6. P. 732–735.

Local Derivations and Automorphisms of Lie Algebras of Niltriangular Matrices

A. P. Elisova

Lesosibirsk Pedagogical Institute – Branch
of Siberian Federal University, Lesosibirsk

A *local automorphism* (*a local derivation*) of an algebra A over an associative commutative ring with identity is an automorphism (resp., an endomorphism) of the K-module A which acts on each element $\alpha \in A$ as an automorphism (resp., a derivation) depending, in general, on the choice of α.

We study the local automorphisms and the local derivations of an algebra $R = NT(n, K)$ of all $n \times n$ strictly lower triangular matrices over K.

Local derivations of an algebra R for $n = 3$ were studied in [1–2]. There is a description of local automorphisms of an algebra R in this case see in [1]. In a case $n = 4$ and there are some restrictions on a ring K local derivations of the algebra R were described in [2–3], local automorphisms of this algebra R were described in [3].

Every local automorphism of the associated Lie algebra $\Lambda(R)$, $n \leq 4$, according [3], may be reducible to the local Lie automorphism of a special evident view by the multiplication on local automorphisms of R and on an automorphism of $\Lambda(R)$. Local derivations of $\Lambda(R)$ for $n \leq 4$ are described similarly (see [4]).

Author and V. M. Levchuk proved reduction theorems for $n \geq 4$. In particular,

Theorem 1. *Let $n > 4$. Then every local automorphism of the Lie algebra $\Lambda(R)$ acts modulo R^2 as well as an automorphism of $\Lambda(R)$.*

Matrix units $e_{ij}, 1 \leq j < i \leq n$, generate the algebra R such a K-module. According 4 for $n \geq 4$ an arbitrary local derivation of the algebra R is zero on elements $e_{ii-1}, 1 < i \leq n$, accurate within an addition a derivation of R, and on elements $e_{ii-2}, 2 < i \leq n$ coincides modulo R^3 with a map of a view

$$\omega_t : ta_{31}e_{31} + ta_{42}e_{42} + ... + ta_{nn-2}e_{nn-2} \quad (\alpha = \|a_{ij}\| \in R, t \in K).$$

References

1. A. P. Elisova, I. N. Zotov, V. M. Levchuk et al. Local automorphisms and local derivations of nilpotent matrix algebras // Izv. IGU. 2011. V. 4, № 1. P. 9–19.
2. X. Wang. Local derivations of a matrix algebra over a commutative ring // J. Math. Research and Exposition. 2011. V. 31, № 5. P. 781–790.
3. A. P. Elisova. Local automorphisms of nilpotent algebras of matrices of small orders // Izv. Vuzov. Math. 2013. № 2. P. 40–48.
4. A. P. Elisova. Local automorphisms and local derivations of nilpotent algebras. Diss. Sib. Fed. University. Krasnoyarsk, 2013.

On Solvable Z_n-graded Alternative Algebras

M. E. Goncharov

Sobolev Institute of Mathematics and Novosibirsk State University, Novosibirsk

Let R be an algebra over a field F. Let G be a finite group of automorphisms of R, and $R^G = \{x \in R \mid \phi(x) = x \quad \text{for all } \phi \in G\}$ is a fixed points subalgebra of R.

If R is an associative algebra with a finite group of automorphisms G then classical Bergman-Isaacs theorem says that if the subalgebra of fixed points R^G is nilpotent and R has no $|G|$-torsion, then R is nilpotent [1].

It turns out that for alternative algebras Bergman-Isaacs theorem is false — there are examples of a solvable non-nilpotent alternative algebra A with an automorphism of second order ϕ such that the ring of invariants A^ϕ is nilpotent.

However, Semenov in [2] proved, that if the characteristic of the ground field is zero, G is a finite group of automorphisms of an alternative algebra A and the subalgebra of fixed points A^G is solvable - then A is solvable. In positive characteristic the problem is opened.

We will consider the case when A is an alternative algebra with an automorphism ϕ of finite order n and G is cyclic group generated by ϕ. This problem closely connected with the following: let $A = A_0 \oplus A_1 \oplus$

$\ldots \oplus A_{n-1}$ be a Z_n - graded alternative algebra. Suppose A_0 is solvable. Is it true that A is solvable?

For $n = 2$ Smirnov in [3] proved, that if an alternative algebra A over a field of characteristic not equal 2 admits an automorphism of second order ϕ such that the algebra of invariants A^{ϕ} is solvable, then A is solvable.

For $n = 3$ the author in [4] proved that if the characteristic of the ground field is more that 5 and A_0 is solvable — then again A is solvable.

In this work we are trying to introduce a method that may be used to solve the problem for arbitrary n. We show, that the known result can be obtained using this method. Also, we managed to deal with the case when $n = 5$.

Theorem 1. *Let A be a Z_n-graded alternative algebra over a field F, where $n = 2^p 3^q 5^s$. If $char(f) > 2t$, where $t = 5$ if $s \neq 0$, $t = 3$ if $s = 0$, $q \neq 0$ and $t = 1$ if $s = q = 0$, and A_0 is solvable, then A is solvable.*

The author was supported by Russian Science Foundation (project 14-21-00065).

References

1. G. M. Bergman, I. M. Isaacs. Rings with fixed-point-free group actions // Proc. London Math. Soc. 1973. V. 27. P. 69–87.

2. A. P. Semenov. Subrings of invariants of a finite group of automorphisms of a Jordan ring // Sib. Math. J. 1991. V. 32, № 1. P. 169–172.

3. O. N. Smirnov. Solvability of alternative Z_2-graded algebras and alternative superalgebras // Sib. Math. J. 1991. V. 32, № 6. P. 1030–1034.

4. M. E. Goncharov. On Solvable Z_3-graded alternative algebras // Algebra and Discrete Math. 2015. V. 20, № 2. P. 203–216.

Remarks on Morphisms of Spectral Geometries

F. Jaffrennou
Siberian Federal University, Krasnoyarsk

Non-commutative geometry, conceived by Alain Connes, is a new branch of mathematics whose aim is the study of geometrical spaces using tools from operator algebras and functional analysis. Specifically metrics for non-commutative manifolds are now encoded via spectral triples, a set of data involving a Hilbert space, an algebra of operators acting on it and an unbounded self-adjoint operator, may be endowed with supplemental structures. Our main objective is to prove a version of Takahashi duality between "geometrical" and "algebraic" categories which is adapted to the context of Alain Connes' spectral triples. We present: a description of the relevant categories of geometrical spaces, namely compact Hausdorff smooth finite-dimensional orientable Riemannian manifolds, or more generally Hilbert bundles of Clifford modules over them; and some definitions of categories of algebraic structures, namely commutative Riemannian spectral triples. We obtain the construction of section functors (construction theorem for morphisms) that associate a morphism of spectral triples to every smooth (totally geodesic) map and which provide a suitable environment for the description of morphisms extended to the non-commutative setting.

On Finite-dimensional Double Lie Algebra

P. S. Kolesnikov
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk

Double algebra is a linear space V equipped with two-fold multiplication $B : V\otimes V \to V\otimes V$, $B(a\otimes b) = \sum_i c_i\otimes d_i$. Such systems appear in the approach by Van den Bergh (2008) to noncommutative Poisson algebras: an associative algebra V is a noncommutative Poisson algebra if there is a two-fold multiplication B such that the bracket $\{a, b\} = \sum_i c_i d_i$ is an analogue of the ordinary Poisson bracket.

In order to define noncommutative Poisson structure on V, the map B itself has to satisfy the following properties:

$$B(b,a) = -B(a,b)^{(12)}, \tag{1}$$

$$B_L(a, B(b,c)) - B_R(b, B(a,c)) = B^L(B(a,b),c), \tag{2}$$

Here

$$B_L(a, x\otimes y) = B(a,x)\otimes y, \quad B_R(b, x\otimes y) = x\otimes B(b,y),$$

$$B^L(x\otimes y, c) = (B(x,c)\otimes y)^{(23)},$$

(12), (23) are the permutations of tensor factors.

A double algebra V satisfying (1), (2) is called a double Lie algebra.

V. Kac in his talk on the conference "Lie and Jordan Algebras, Their Representations and Applications-VI Dec 2015, posed the following problem: prove that there are no simple finite-dimensional double Lie algebras (except for 1-dimensional space with trivial map B). Here we solve this problem and state a series of examples of finite-dimensional double Lie algebras.

Suppose V is a double algebra with a two-fold multiplication $B \in \mathrm{End}\,(V\otimes V)$, $\dim V = n < \infty$. The well-known series of isomorphisms

$$\mathrm{End}\,(V\otimes V) \simeq \mathrm{End}\,(V)\otimes \mathrm{End}\,(V) \simeq$$

$$\simeq \mathrm{End}\,(V)^*\otimes \mathrm{End}\,(V) \simeq \mathrm{End}(\mathrm{End}\,(V))$$

allows to identify B with a linear operator $R : \mathrm{End}\,(V) \to \mathrm{End}\,(V)$. Here we identify $\mathrm{End}\,(V)$ with $\mathrm{End}\,(V)^*$ my means of the trace form.

It is natural to expect that if B satisfies (1) and (2) then the corresponding R satisfies some conditions. Indeed, we have

Theorem 1. *The structure of a double Lie algebra on a finite-dimensional space V is completely determined by a skew-symmetric Rota–Baxter operator on* $\mathrm{End}\,(V)$.

Namely, B satisfies (1) and (2) if and only if

$$R = -R^*, \quad R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y))$$

for all $x, y \in \mathrm{End}\,(V)$.

Corollary 1. *If V is a double Lie algebra of finite dimension which does not contain proper nonzero subspaces I such that $B(V,I) \subseteq V \otimes I + I \otimes V$ then* $\dim V = 1$, $B = 0$.

The authors were funded by RSF (project 14-21-00065).

Transfer Unitary K_1-functor Under Polynomial Extension of Rings

V. I. Kopeyko
Kalmyk State University, Elista

Let (R, λ, Λ) be an unitary ring (alias form ring), where R is a ring with an involution $x \to \bar{x}$, λ is a central element of R such that $\lambda \cdot \bar{\lambda} = 1$, and Λ is a form parameter in R. Let $K_1U^{\lambda}(R, \Lambda)$ denote the unitary K_1-group of (R, Λ). We denoted by $W_1U^{\lambda}(R, \Lambda)$ the cokernel of the hyperbolic homomorphism $H : K_1(R) \to K_1U^{\lambda}(R, \Lambda)$, while the kernel of the homomorphism $K_1U^{\lambda}(R, \Lambda) \to K_1(R)$ induces by the forgetful functor denoted by $W_1'U^{\lambda}(R, \Lambda)$.

The purpose of this talk is to define a transfer map

$$(i_n)_* : K_1U^{\lambda}(R[X], \Lambda[X]) \to K_1U^{\lambda}(R[X^n], \Lambda[X^n])$$

for any natural n and to compute the composition $(i_n)_* \circ (i_n)^*$, where

$$(i_n)^* : K_1U^{\lambda}(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to K_1U^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$$

is the group homomorphism induced by the canonical inclusion $i_n : R[X^n] \to R[X]$.

As application we obtain the following K_1-unitary analogies of Springer's theorem (see [1]) from the algebraic theory of quadratic forms.

Theorem 1. *For any odd n, the map*

$$(i_n)^* : W_1'U^{\lambda}(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to W_1'U^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$$

is the splitting injective homomorphism.

Theorem 2. *For any odd n,, the map*

$$\overline{(i_n)^*} : W_1U^{\lambda}(R[X^n], \Lambda[X^n]) \to W_1U^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$$

induced by the $(i_n)^*$ is the splitting injective homomorphism.

The author was funded by RFBR (project 16-01-00148).

References

1. T. Y. Lam. Algebraic theory of quadratic forms. Benjamin, 1973.

Problems on Structure of Finite Quasifields and Projective Translation Planes

O. V. Kravtsova, V. M. Levchuk
Siberian Federal University, Krasnoyarsk

Coordinatization for points and lines of finite projective plane allows to study its geometric properties by studying of algebraic properties of coordinatizating set. Thus, finite desarguesian projective plane is coordinatized by a field, and the weakening of commutativity and associativity for multiplication leads to translation planes that are coordinatized by quasifields. The quasifield with two-sided distributivity is said to be semifield, it coordinatizes a semifield plane. The most complete review on semifields, quasifields and correspondent projective planes is presented in [1], however many problems are little studied.

The problem on solvability of full collineation group of finite projective plane that is coordinatized by proper semifield (question 11.76, 1990, [2]) is unsolved still.

G. Wene hypothesis (1991) on right- or left-primitivity of finite semifield was refuted by I. Rúa who construct the couter-examples [3] of order 32 (2004) and 64 (2007). Nevertheless, all known examples of semifields of small orders (up to 243) have left-cyclic base and 1-generated loop of non-zero elements.

Next problems were stated in [4, 5] for finite quasifields and semifields.

(A) Enumerate maximal subfields and its orders.

(B) Find the finite quasifield S with non-1-generated loop S^*. Hypothesis: a loop S^* of any finite semifield S is 1-generated.

(C) What the spectra of a loop S^* of finite semifield and quasifield are possible?

Also we study

(D) Find the automorphism group order.

We has obtain [5, 6] the solution of problems for all semifields of order 16, for counter-examples Knuth–Rúa semifield of order 32, Hentzel–Rúa semifield of order 64, and some isotop classes representatives for semifields and quasifields of small orders.

The investigations are funded by RFBR (project 16-01-00707).

References

1. N. L. Johnson, V. Jha, M. Biliotti. Handbook of Translation Planes. Taylor and Francis Group. 2007.
2. V. D. Mazurov, E. I. Khukhro. Unsolved problems in group theory // The Kourovka notebook. № 18 (English version). Cornell University Library. 2016.
3. I. R. Rúa, E. F. Combarro, J. Ranilla. New advances in the computational exploration of semifields // Int. J. of Computer Math. 2011. V. 88, № 09. P. 1988–1998.
4. V. M. Levchuk, S. V. Panov, P. K. Shtukkert. The structure of finite quasifields and their projective translation planes // Proceed. XII Int. Conf. on Algebra and Number Theory. Tula, 2014. P. 106–108.
5. V. M. Levchuk, P. K. Shtukkert. Problems on structure for quasi-fields of orders 16 and 32 // J. of Sib. Fed. University. Ser. Math. & Physics. 2014. V. 7, № 3. P. 362–372.
6. O. V. Kravtsova. The automorphism group of finite semifield // Abstracts of the Int. Conf. and PhD Summer School «Groups and Graphs, Algoritms and Automata». Yekaterinburg, 2015. P. 64–65.

Derivations of a Matrix Ring Containing a Subring of Nilpotent Matrices

Feride Kuzucuoğlu

Department of Mathematics, Hacettepe University, Ankara

Let K be an associative ring with identity. Recall that a derivation of a ring K is an additive map $\Psi : K \to K$ so that for all $a, b \in K$, $\Psi(ab) = \Psi(a)b + a\Psi(b)$. Let $NT_n(K)$ be the ring of all (lower) niltriangular $n \times n$ matrices over K which are all zeros on and above the main diagonal. Levchuk characterized in [1] the automorphisms of the ring $NT_n(K)$ over any associative ring K with identity. In 2006, Chun and Park [2] determined derivations of the niltriangular matrix ring $NT_n(K)$. Let $M_n(J)$ be the ring of all $n \times n$ matrices over an ideal J of K and $R = R_n(K, J) = NT_n(K) + M_n(J)$.

We describe all derivations of the matrix ring $R_n(K, J) = NT_n(K) + M_n(J)$. If time permits we will discuss Jordan derivations of the matrix ring $R_n(K, J)$.

This work is joint with U. Sayın.

References

1. V. M. Levchuk. Connections between the unitriangular group and certain rings, II. Groups of automorphisms // Siberian Math. J. 1983. V. 24. P. 543–557.
2. J. H. Chun and J. W. Park. Derivations on subrings of matrix rings // Bull. Korean Math. Soc. 2006. V. 43, № 3. P. 635–644.

Determinantal Representations of the Weighted Moore-Penrose Inverse Matrix Over the Quaternion Skew Field

I. I. Kyrchei

Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine, Lviv

Within the framework of the theory of the noncommutative column-row determinants previously introduced by the author [1] and using obtained quaternion weighted singular value decomposition we get determinantal representations of the weighted Moore-Penrose inverse of an arbitrary quaternion matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{H}^{m\times n}$ with weights $\mathbf{M}$ and $\mathbf{N}$, which are Hermitian positive definite matrices of order m and n, respectively.

Denote $\mathbf{A}^\sharp = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{M}$. If $\mathbf{A}^\sharp\mathbf{A}$ or $\mathbf{A}\mathbf{A}^\sharp$ are Hermitian, then the weighted Moore-Penrose inverse $\mathbf{A}^\dagger_{M,N} = \left(\tilde{a}^\dagger_{ij}\right) \in \mathbb{H}^{n\times m}$ possess the following determinantal representations, respectively,

$$\tilde{a}_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\beta \in J_{r,n}\{i\}} \operatorname{cdet}_i \left(\left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A} \right)_{.\,i} \left(\mathbf{a}_{.j}^{\sharp} \right) \right)_{\beta}^{\beta}}{\sum\limits_{\beta \in J_{r,\,n}} \left| \left(\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A} \right)_{\beta}^{\beta} \right|}, \tag{1}$$

or

$$\tilde{a}_{ij}^{\dagger} = \frac{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,m}\{j\}} \operatorname{rdet}_j \left((\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{j\,.} (\mathbf{a}_{i.}^{\sharp}) \right)_{\alpha}^{\alpha}}{\sum\limits_{\alpha \in I_{r,\,m}} \left| (\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp})_{\alpha}^{\alpha} \right|}. \tag{2}$$

If $\mathbf{A}^{\sharp}\mathbf{A}$ or $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\sharp}$ are non-Hermitian, we obtain determinantal representations of $\mathbf{A}_{M,N}^{\dagger}$ as well.

We use notations from [2].

References

1. I. I. Kyrchei. Cramer's rule for quaternionic systems of linear equations // Fund. Priklad. Mat. 2007. V. 13, № 4. P. 67–94.
2. I. I. Kyrchei. Determinantal representations of the Moore-Penrose inverse over the quaternion skew field and corresponding Cramer's rules // Lin. Multilin. Alg. 2011. V. 59, № 4. P. 413–431.

Linear Logic of Knowledge and Time LTK_r in Case of Intransitive Time Relation

A. N. Lukyanchuk

Siberean Federal University,

Krasnoyarsk State Medical Academy, Krasnoyarsk

The language $\mathcal{L}^{LTK}$ consists of a countable set of propositional letters $P := \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}$, the standard boolean operations and the set of modal operations $\{\Box_T, \Box_{\sim}, \Box_i \ (i \in I)\}$. The intended meaning of the modal operations are: (a) $\Box_T A$ for logic LTK_r means that the formula A true in the current state and will be true in the next state. (b) $\Box_{\sim} A$ means that A is known everywhere in the present time-cluster (i.e. A is a part of the environmental knowledge); (c) $\Box_i A (i \in I)$ stands for the agent i (operating in the system) knows A in the current state. Semantics for the language $\mathcal{L}^{LTK}$ is based on a linear and discrete flow of time, associating a time point with any natural number n.

Theorem 1. *The logic LTK_r has the effective finite model property.*

Theorem 2. *The logic LTK_r is decidable.*

Introduce a special kind of LTK_r-frame, which plays a major role in the main result.

Let $\mathcal{F}_P$, $\mathcal{F}_S$, $\mathcal{F}_i$ be LTK_r-frames with the following structures:

(a) The frame $\mathcal{F}_P = \langle W_{\mathcal{F}_P}, R_T^P, R_\sim^P, R_1^P, \ldots, R_k^P \rangle$ is an LTK_r-frame such that its base set $W_{\mathcal{F}_P}$ consists only one world denoted by @, $W_{\mathcal{F}_P} := \{@\}$.

(b) Let $\mathcal{F}_S = \langle W_{\mathcal{F}_S}, R_T^S, R_\sim^S, R_1^S, \ldots, R_k^S \rangle$ be a finite LTK_r-frame, where $W_{\mathcal{F}_S} = \{\bigcup_{i=0}^d C_i\}$ и $C_0 R_T^S C_1 R_T^S \ldots R_T^S C_d$.

(c) The frame $\mathcal{F}_i = \langle W_{\mathcal{F}_i}, R_T^i, R_\sim^i, R_1^i, \ldots, R_k^i \rangle$ is a finite LTK_r-frame, and each R_T^i-cluster of $\mathcal{F}_i$ consists of only one world. Namely, $W_{\mathcal{F}_i} = \{w_1^i, \ldots, w_{J_i}^i\}$ и $w_1^i R_T^i w_2^i R_T^i \ldots R_T^i w_{J_i}^i$.

Definition 1. *An SP-frame is a tuple*

$$\mathcal{F}_{SP} = \langle W_{SP}, R_T, R_\sim, R_1, \ldots, R_k \rangle$$

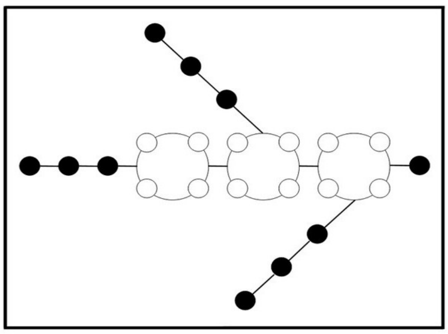
where

1) $W_{SP} = W_{\mathcal{F}_P} \cup W_{\mathcal{F}_S} \cup \bigcup_{i=0}^d W_{\mathcal{F}_i}$;

2) $R_T = R_T^P \cup R_T^S \cup \bigcup_{i=0}^d R_T^i \cup \{\langle z, @\rangle \,|z \in C_d\} \cup \bigcup_{i=0}^d \{\langle w_{J_i}^i, z\rangle \,|w_{J_i}^i$ is R_T-maximal world of $\mathcal{F}_i, z \in C_i \subseteq \mathcal{F}_S\}$;

3) $R_\sim = R_\sim^P \cup R_\sim^S \cup \bigcup_{i=0}^d R_\sim^i$;

4) $R_j = R_j^P \cup R_j^S \cup \bigcup_{i=0}^d R_j^i$ $(1 \le j \le k)$.



Theorem 3. *An inference rule r_{nf} in the reduced normal form is not admissible for LTK_r if and only if there is a finite SP-frame $\mathcal{F}_{SP}$, whose size is computable in the size of r_{nf}, and a valuation V for variables from r_{nf} in $\mathcal{F}_{SP}$, such that*

1) $\mathcal{F}_{SP} \not\models_V Con(r_{nf})$*;*
2) $\mathcal{F}_{SP} \models_V Pr(r_{nf})$*;*
3) there is $\theta_a \in Pr(r_{nf})$*, where*

$$(\mathcal{F}_{SP}, w_1^i) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, w_2^i) \models_V \theta_a, (\mathcal{F}_{SP}, @) \models_V \theta_a,$$

for $(0 \leq i \leq d)$*;*
4) $\forall z, w \in C_d$ *&* $(z \neq w) : (\mathcal{F}_{SP}, z) \models_V \theta_k, (\mathcal{F}_{SP}, w) \models_V \theta_m$ *u* $\theta_k \neq \theta_m$
5) R_T*-cluster* C_d *is not isomorphic to the world @.*

Theorem 4. *The logic* LTK_r *is decidable w.r.t. admissible rules.*

See more in [1, 2].

References

1. A. N. Lukyanchuk. Decidability of multi-modal logic LTK of linear time and knowledge // J. of Sib. Fed. University. Math. & Physics. 2013. V. 6, № 2. P. 220–226.
2. A. N. Lukyanchuk, V. V. Rybakov. Admissible inference rules of the logic of knowledge ang time LTK_r with intransitive time relation // Sib. Math. J. 2015. V. 56, № 3. P. 573–593.

On Arithmetic Graphs of Finite Groups

V. I. Murashka, A. F. Vasil'ev

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

All considered groups are finite. There have been a lot of papers recently in which with every finite group associates certain graph. The considered problem was to analyze the relations between the structure of a group and the properties of its graph. This trend goes back to 1878 when A. Cayley [1] introduced his graph. Another illustration of this direction is the problem of Paul Erdös on non-commuting graphs which was solved in 1976 by B. Neumann [2].

Definition 1. *A function* $\Gamma : \{groups\} \rightarrow \{graphs\}$ *is called a graph function.*

In this paper we are interested only in the following graph functions.

Definition 2. *A graph function* Γ *is called arithmetic if* $V(\Gamma(G))$ *is a subset of the set of divisors of* $|G|$ *for every group* G *and* $\Gamma(1) = \emptyset$. *Graph* $\Gamma(G)$ *is called arithmetic.*

Definition 3. *Let* Γ *be a arithmetic graph function and* $\mathfrak{X}$ *be a class of groups. We shall say that* $\mathfrak{X}$ *is recognized by* Γ *if from* $G_1 \in \mathfrak{X}$ *and* $\Gamma(G_1) = \Gamma(G_2)$ *it follows that* $G_2 \in \mathfrak{X}$.

Problem.

(a) Let Γ be a graph function. Describe all group classes (formations, Fitting classes, Schunk classes) which are recognizable by Γ.

(b) Let $\mathfrak{X}$ be a class of groups (formation, Fitting class, Schunk class). Find graph functions Γ which recognize $\mathfrak{X}$.

In 1968 T. Hawkes [3] considered a directed graph of a group G whose set of vertices is the set $\pi(G)$ of all prime divisors of $|G|$ and (p, q) is an edge if and only if $q \in \pi(G/\mathrm{O}_{p',p}(G))$. We shall call this graph by Hawkes graph and will denote it by $\Gamma_H(G)$.

In this paper we described all formations which are recognized by Γ_H and some other graph functions. In particular we obtained:

Theorem 1. *Let* $\mathfrak{F}$ *be a formation and* $\sigma(p) = \{q|(p, q) \in E(\Gamma_H(\mathfrak{F}))\}$. *Then* $\mathfrak{F}$ *is recognized by* Γ_H *if and only if* $\mathfrak{F} = LF(f)$ *where* $f(p) = \mathfrak{G}_{\sigma(p)}$ *for* $p \in \pi(\mathfrak{F})$ *and* $f(p) = \emptyset$ *otherwise.*

References

1. A. Cayley. Desiderata and suggestions: №2. The Theory of groups: graphical representation // Amer. J. Math. 1878. V. 1, № 2. P. 174–176.

2. B. Neumann. A problem of Paul Erdös on groups // J. Austral. Math. Soc. 1976. V. 21. P. 467–472.

3. T. Hawkes. On the class of the Sylow tower groups // Math. Z. 1968. V. 105. P. 393–398.

On the Embeddability of Noetherian Semiprime Special Lie Algebra in $sl_m(F) \otimes_F C$

S. A. Pikhtilkov, O. A. Pikhtilkova, A. N. Blagovisnaya

Orenburg State University, Orenburg

A Lie algebra L is said to be prime if $[U, V] = 0$ implies $U = 0$ or $V = 0$ for any its ideals U and V of L. We say that the ideal P of a Lie algebra L is prime if the factor algebra L/P is prime.

The intersection of all prime ideals is called the prime radical $P(L)$ of a Lie algebra L [1].

A Lie algebra is said to be Noetherian if the Lie algebra satisfies the ascending chain condition on ideals.

An associative algebra A is called PI-algebra, if there exists a non-commutative polynomial $f(x_1, ..., x_n) \in F(X)$ where $F(X)$ is a free associative algebra such that $f(a_1, ..., a_n) = 0$ for arbitrary $a_1, ..., a_n \in A$.

An algebra L is called a special Lie algebra or SPI-algebra, if there exists an associative SPI-algebra A such that L is included in $A^{(-)}$ as a Lie algebra where $A^{(-)}$ is a Lie algebra with respect to the operation of commutation $[x, y] = xy - yx$ [2].

In 1992, the M. V. Zaitsev stated the problem: is it true that any Noetherian special Lie algebra embedded in the algebra of matrices over a finitely generated commutative ring?

In this work the problem is solved for the case of Noetherian semiprime special Lie algebras.

A Lie algebra is said to be semiprime if $I^2 = 0$ implies $I = 0$ for any its ideal I. This definition holds for associative algebras and for Lie algebras. According to [1], this definition is equivalent to the fact that the prime radical is zero.

A criterion of representability of a special Lie algebra as a finite subdirect product of prime algebras is found in [3].

Lemma 1. *Let L be semiprime Lie algebra. Then the following conditions are equivalent.*

(i) L does not contain infinite direct sums of nonzero ideals.

(ii) L does not contain infinite sets of nonzero pairwise disjoint ideals.

(iii) L satisfies the ascending chain condition on annihilator ideals.

(iv) Every maximal annihilator ideal of L is prime.

(v) The set of maximal annihilator ideals in L is a finite and their intersection is equal to zero.

(vi) L can be represented as a finite subdirect product of prime Lie algebras.

Theorem 1. *Let L be Noetherian semiprime special Lie algebra. Then L embedded in the algebra $sl_m(F) \otimes_F C$, where C is direct sum of fields.*

References

1. I. N. Balaba, A. V. Mikhalev, S. A. Pikhtilkov. Prime Radical of Graded Ω-groups // Fundament. i prikl. math. 2006. V. 12, № 2. P. 159–174.
2. V. N. Latyshev. On Lie algebras with a polynomial identical // Sib. Math. J. 1963. V. 4, № 4. P. 821–829.
3. O. A. Pikhtilkova, S. A. Pikhtilkov. On special Lie algebras having a faithful module with Krull dimension // Izv. : Mathematics. 2016. V. 80, № 6 (in press).

Simple Finite-dimensional Noncommutative Jordan Superalgebras

A. P. Pozhidaev

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk

In this talk we present the main results of the theory of noncommutative Jordan superalgebras. In particular, we give the recently obtained classification of the central simple finite-dimensional noncommutative Jordan superalgebras of degree $>$ 1 over an algebraically closed field of characteristic $p > 2$. The case of characteristic 0 will be discussed as well. In particular, we describe the Poisson brackets on all finite dimensional central simple Jordan superalgebras of degree $>$ 1 except the Kantor double of the supercommutative superalgebra $B(m, n)$.

The author was partially supported by RFBR (project 14-01-00014).

This is a joint work with I. P. Shestakov.

Equations in Polyadic Groups

M. Shahryari
University of Tabriz, Tabriz

The subject of this talk is equations over *polyadic groups*. A polyadic group is a natural generalization of the concept of group to the case where the binary operation of group replaced with an n-ary associative operation, one variable linear equations in which have unique solutions. We study systems of equations and their solution sets in polyadic groups. It is known that for every polyadic group (G, f), there exists a corresponding ordinary group $(G, \cdot)$, an automorphism θ of this ordinary group, and an element $b \in G$, the structure of (G, f) in which complectly determined by $(G, \cdot)$, θ, and b, therefore, we can denote the polyadic group by the notations $\mathrm{der}_{\theta,b}(G, \cdot)$. We prove that a polyadic group (G, f) is equational noetherian, if and only if, the ordinary group $(G, \cdot)$ is equational noetherian. We also determine the structure of coordinate polyadic group of algebraic sets in equational noetherian polyadic groups.

Our main result shows that the algebraic geometries of the polyadic group (G, f) and the corresponding group $(G, \cdot)$ are essentially the same. This algebraic geometry does not depend on the automorphism θ and the special element b. This result gives us an interesting application of polyadic groups to the algebraic geometry over groups. Here we describe this application briefly. Let G be an ordinary group and suppose θ is an automorphism of G satisfying the following two conditions:

1. There exists a fixed point $b \in G$ for θ.

2. There exists a natural number $n \geq 2$ such that for all $x \in G$, $\theta^{n-1}(x) = bxb^{-1}$.

Let $\mathcal{L}$ be the ordinary language of groups containing elements of G as parameters. We obtain an extended language $\mathcal{L}_\theta$ by adding θ to $\mathcal{L}$ as a unary functional symbol. We will show that if the group G is equational noetherian as an $\mathcal{L}$-algebra, then it is also equational noetherian as an $\mathcal{L}_\theta$-algebra (similar statements are also true for the properties of being q_ω-compact and u_ω-compact).

References

1. G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups, I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. 1999. V. 219. P. 16–79.
2. A. Myasnikov, V. Remeslennikov. Algebraic geometry over groups, II. Logical Fundations // J. Algebra. 2000. V. 234. P. 225–276.

About Group Density Function

A. A. Shlepkin

Siberean Federal University, Krasnoyarsk

In following work the question about unequivocally of submitting group by her density function.

Definition 1. *Let $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ is a group with a set of generative elements $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$. Let $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$, where l integer positive number, be a function of group growth in a set of generative elements. If $l > 0$ then $F_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ return number of elements of group G, which presented how irreducible product no more then 1 element of the set $\mathfrak{N}$. If $l = 0$ then $F_{(G,\mathfrak{N})}(0) = 1$. Unity is presented how irreducible product of length 0 [1, p. 102].*

Definition 2. *The function $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = F_{(G,\mathfrak{N})}(l) - F_{(G,\mathfrak{N})}(l-1)$ for $l > 0$ and $P_{(G,\mathfrak{N})}(0) = 1$ for $l = 0$ we will call **group density function** for group G in the set of generative elements $\mathfrak{N}$. Function $P_{(G,\mathfrak{N})}(l)$ for every integer positive l return number of elements of group G presented how irreducible product l elements of set $\mathfrak{N}$.*

Question. Let G be a group with set of generative elements $\mathfrak{N}$, H is a group with set of generative elements $\mathfrak{M}$. When from equality $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = P_{(H,\mathfrak{M})}(l)$ following isomorphism $G \simeq H$?

Theorem 1. *Let $G = \langle \mathfrak{N} \rangle$ and $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ – be a groups with the sets of generative elements $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$, $\mathfrak{M} = \{b_1, ..., b_m\}$ such that $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = P_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Then $n = m$.*

Theorem 2. *Let $G = \langle \mathfrak{N} \rangle$ and $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ – finite groups with set of generative elements $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ such that $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = P_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Then $|G| = |H|$.*

Definition 3. *Let $G = \langle g_1, ..., g_n \rangle$ be a group with set of generative elements $\mathfrak{N} = \{g_1, ..., g_n\}$. The set $\mathfrak{N}$ we will call* ***independent****, if for all $i \in \{1, ..., n\}$, $\langle \mathfrak{N} \setminus \{g_i\} \rangle \cap \langle g_i \rangle = \langle e \rangle$ is a unity subgroup.*

Theorem 3. *Let $G = \langle \mathfrak{N} \rangle$, $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ be a finite abelian p-groups with independent sets of generative elements $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ such that $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = P_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Then $G \simeq H$.*

Because non isomorphic finite abelian groups of the same order are exists (for example A_8 and $L_3(4)$), that's why it is an interesting **Question**, when G, H finite simple non abelian groups, and $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ are independent systems of generative elements for groups G, H.

Hipotesis 1. *Let $G = \langle \mathfrak{N} \rangle$, $H = \langle \mathfrak{M} \rangle$ be a finite simple non abelian groups with independent sets of generative elements $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ such that $P_{(G,\mathfrak{N})}(l) = P_{(H,\mathfrak{M})}(l)$. Then $G \simeq H$.*

Theorem 4. *Let $A_8 = \langle \mathfrak{N} \rangle$, and $L_3(4) = \langle \mathfrak{M} \rangle$, where $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ are independent sets of generative elements for following groups. Then $P_{(A_8,\mathfrak{N})}(l) \neq P_{(L_3(4),\mathfrak{M})}(l)$.*

The work was funded by RFBR (project 16-31-50030).

References

1. O. V. Melnikov, V. N. Remeslennikov, V. A. Romankov et al. General Algebra. M.: Science, 1990. P. 592.

On Hall S-permutably Embedded Subgroups of Finite Groups

D. A. Sinitsa

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

Let G be a finite group. The symbol $G^{\mathfrak{N}}$ denotes the nilpotent residual of G, that is, the intersection of all normal subgroups N of G with nilpotent quotient G/N.

A subgroup A of G is said to be S-quasinormal or S-permutable in G if A permutes with all Sylow subgroups of G.

The S-permutable subgroups possess a series of interesting properties. For instance, the S-permutable subgroups of G form a sublattice of the lattice of all subnormal subgroups of G (Kegel [1]). This important property of S-permutable subgroups allows to introduce the concept of the S-permutable closure of a subgroup. The intersection of all such S-permutable subgroups of G which contain a subgroup H of G is called the *S-permutable closure of H in G* and denoted by H^{sG} [2].

Recall also that a subgroup H of G is said to be a *Hall normally embedded subgroup* of G [3] if H is a Hall subgroup of the normal closure H^G of H in G. By analogy with it, we say that a subgroup H of G is called a *Hall S-permutably embedded subgroup* of G if H is a Hall subgroup of the S-permutable closure H^{sG} of H in G.

Theorem 1. *The following conditions are equivalent:*

(1) Every subgroup of G is Hall S-permutably embedded in G.

(2) The nilpotent residual $G^{\mathfrak{N}}$ of G is a Hall cyclic of square-free order subgroup of G.

(3) $G = D \rtimes M$ is a split extension of a cyclic subgroup D of square-free order by a nilpotent group M, where M and D are both Hall subgroups of G.

Corollary 1. *(Shirong Li and Jianjun Liu [3]) Every subgroup of G is Hall normally embedded in G if and only if $G = D \rtimes M$ is a split extension of a cyclic subgroup D of square-free order by a Dedekind group M, where M and D are both Hall subgroups of G.*

References

1. O. H. Kegel. Sylow-Gruppen and Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–221.

2. W. Guo, A. N. Skiba. Finite groups with given s-embedded and n-embedded subgroups // J. of Algebra. 2009. V. 321. P. 2843–2860.

3. S. Li, J. Liu. On Hall subnormally embedded and generalized nilpotent groups // J. of Algebra. 2013. V. 388. P. 1–9.

Gradewise Properties of Subgroups

A. N. Skiba

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel

For any group A, let $\Theta(A)$ be an arbitrary binary relation on the set of all subgroups of A.

Definition 1. *If a group G has a normal series $\Gamma : 1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_t = G$ such that*

$$((A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}, BG_{i-1}/G_{i-1}) \in \Theta(G/G_{i-1})$$

for each $i = 1, \ldots, t$, then we say that (A, B) enjoys the Γ-gradewise property Θ (or simply (A, B) enjoys the gradewise property Θ) in G.

If for each $i = 1, \ldots, t$ we have

$$((A \cap G_i)G_{i-1}/G_{i-1}, (B \cap G_{i+1})G_{i-1}/G_{i-1}) \in \Theta(G/G_{i-1}),$$

then we say that (A, B) *enjoys the generalized* Γ*-gradewise property* Θ (or simply (A, B) *enjoys the generalized gradewise property* Θ) in G.

A classical result of Thompson asserts that a finite group G is soluble if G has a nilpotent maximal subgroup of odd order. Deskins and Janko proved that Thompson's result remains true if the nilpotent class of the Sylow 2-subgroup of a nilpotent maximal subgroup of G is at most 2. It was also proved by Ballester-Bolinches and Guo [1, Theorem 3] that G is soluble provided it has a nilpotent maximal subgroup M such that $\Omega(P \cap G') \leq Z(P)$ for the Sylow 2-subgroup P of M.

Theorem 1. *A finite group G is soluble if and only if it is gradewise quaternion free and G has a maximal subgroup M with Sylow 2-subgroup P such that M is gradewise nilpotent in G and P' and P are generalized gradewise element-wise permutable in G.*

References

1. A. Ballester-Bolinches, X. Guo. Some results on p-nilpotency and solubility of finite groups // J. Algebra. 2000. V. 228. P. 491–496.

Quandles, Transitive Groups, and Efficient Knot Recognition

D. Stanovský
Charles University, Prague

Given two knot diagrams, can one efficiently determine whether they represent the same knot, up to ambient isotopy (informally, continuous manipulation with the rope)? The answer is unknown. I will explain a recent promising method [1], called quandle coloring, which uses certain non-associative binary algebraic structures to color the arcs of a knot diagram. Using modern SAT-solvers, we built a software which can quickly distinguish knot diagrams with tens of crossings. Kuperberg's NP-time algorithm for recognition of unknottable knots [3] can be also interpreted as coloring by certain quandles.

To make the knot recognition algorithm trully efficient, both in theory and practice, one has to supply good quandles for coloring. Subsequently, one has to develop the algebraic theory of quandles. The second theme of my talk will be a very brief introduction into the theory of connected quandles, as outlined in [2]. The fundamental result is a 1-1 correspondence between connected quandles and pairs (G, ζ) where G is a transitive permutation group and ζ is a central element of the stabilizer such that the conjugacy class ζ^G generates the whole group. I will explain how problems about quandles (for example, enumeration of small connected quandles) translate to problems in the theory of finite groups.

References

1. A. Fish, A. Lisitsa, D. Stanovský. Combinatorial approach to knot recognition // Embracing Global Computing in Emerging Economies, CCIS 514, Springer. 2015.

2. A. Hulpke, D. Stanovský, P. Vojtěchovský. Connected quandles and transitive groups // J. Pure Appl. Algebra. 2016. V. 220/2. P. 735–758.

3. G. Kuperberg. Knottedness is in NP, modulo GRH // Adv. Math. 2014. V. 256. P. 493–506.

Matrix Model of Quadratic Form Schemes

O. A. Starikova
North-Eastern State University, Magadan

The theory of Witt rings of fields has led to different axiomatizations of quadratic form theory, for example abstract Witt rings, special groups, quaternionic structures, quadratic form schemes [1, 2].

Throughout, the symbol R means an associative and commutative ring with identity element and with multiplicative group R^* of invertible elements. For any elements $a = rR^{*2}$ and $b = sR^{*2}$ of group $G = R^*/R^{*2}$ we suppose

$$D(a, b) = \{tR^{*2} \mid t \in (rR^2 + sR^2) \cap R^*\}.$$

When R is a field, the following properties are known:

1) $D(1, a)$ - a subgroup of group G and $a \in D(1, a)$;

2) $a \in D(1, -b) \;\Leftrightarrow b \in D(1, -a)$;

3) $bD(1, -a) \cap D(1, -ac) \cap dD(1, -c) \neq \varnothing \Rightarrow aD(1, -b) \cap D(1, -bd) \cap cD(1, -d) \neq \varnothing$.

Group $G = R^*/R^{*2}$ with its map $a \mapsto D(1, a)$ and distinguished element -1 refers to quadratic form scheme (QF-scheme) of a field R.

Quadratic form scheme is also defined as an abstract group $G = (G, \cdot, 1)$ of exponents 2 with the distinguished element $-1 \in G$, $-a := (-1)a$, and map $a \mapsto D(1, a)$, satisfying conditions 1) - 3). QF-schemes form a category with products in the natural way. The following problem [3] remains open: *Is every QF-scheme realized as the QF-scheme of a field?*

For abstract QF-scheme $G = \{a_i \mid i = 1, \ldots, 2^n\}$ matrix $M = (m_{ij})$ is defined to be

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } a_i \in D(1, -a_j); \\ \delta, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Interpretations of quadratic form scheme axioms, operations of product and group extension, QF-schemes of local type are given.

Список литературы

1. M. Kula. Counting Witt rings // J. Algebra. 1998. V. 206, № 2, P. 568–587.
2. M. Dickmann, F. Miraglia. Special Groups. Boolean-theoretic Methods in the Theory of Quadratic Forms // Memoirs Amer. Math. Soc. 2000. P. 689.
3. M. Marshall. The elementary type conjecture in quadratic form theory // Contemp. Math. 2004. V. 344. P. 275–293.

On Moduli of Semistable Admissible Pairs

N. V. Timofeeva

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl

The problem originates from the necessarity to compactify the moduli of semistable coherent vector bundles E on a smooth projective polarized surface (S, L) without usage nonlocally free coherent sheaves, contrary to the classical compactification done by attaching such sheaves. Besides the interest in the structure aspect of vector bundle theory, this is needed in complex differential geometry and gauge field theory.

Pursuing this aim we allow the surface S to degenerate to the algebraic schemes $\widetilde{S}$ of certain type which are called *admissible*. Admissible scheme always contains a component which is an algebraic variety isomorphic to the blowup of S in some sheaf of ideals of finite colength. Other components of $\widetilde{S}$ can carry nonreduced scheme structure. Each admissible scheme $\widetilde{S}$ carries the *distinguished polarization* $\widetilde{L}$ and the locally free sheaf $\widetilde{E}$ of some prescribed view. Objects $((\widetilde{S}, \widetilde{L}), \widetilde{E})$ (see any of [1], [2]) will be described in details in the talk and are called *semistable admissible pairs*. Pairs $((S, L), E)$ are also included into the class considered. All constructions are done over algebraically closed field of characteristic 0.

The compactification of moduli of semistable vector bundles by attaching appropriate admissible semistable pairs is a part (union of components) of moduli scheme $\widetilde{M}$ of admissible semistable pairs. As proven in the series of author's papers (see [1], [2] and complete list of references within), the compactification of interest is isomorphic (as a moduli functor and hence as an algebraic scheme) to the classical one ascending to to Gieseker and Maruyama. The classical compactification is obtained by attaching semistable torsion-free coherent sheaves with same rank and Hilbert polynomial as vector bundles E have.

In the talk we will describe main features of the isomorphism of compactifications and turn our attention to other components of moduli space of admissible semistable pairs. Namely, we will build up and investigate the functorial morphism between the whole of moduli of semistable pairs and the whole of moduli of semistable torsion-free coherent sheaves with equal ranks and equal Hilbert polynomials.

References

1. N. V. Timofeeva. On a morphism of compactifications of moduli scheme of vector bundles // Sib. Electronic Math. Reports. 2015. V. 12. P. 577–591.
2. N. V. Timofeeva. Isomorphism of Compactifications of Moduli of Vector Bundles: Nonreduced Moduli // Modeling and Analysis of Information Systems. 2015. V. 22, № 5. P. 629–647 (in Russian). English translation: ArXiv: 1411.7872

On Determinability of a Quotient Divisible Abelian Group of Rank 1 by Its Automorphism Group

E. A. Timoshenko

Tomsk State University, Tomsk

V. K. Vildanov

Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod

Let $A \in \mathbf{X}$, where $\mathbf{X}$ is some class of groups. We say that A is *determined by its automorphism group* $\operatorname{Aut} A$ *in the class* $\mathbf{X}$ if $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ implies $A \cong B$ for every $B \in \mathbf{X}$.

The next concept was introduced in [1].

Suppose that an Abelian group A does not contain nonzero divisible torsion subgroups and there is a free subgroup $F \subset A$ of finite rank such that A/F is a divisible torsion group. Then A is called a *quotient divisible group of rank* n, where n is the rank of F.

The symbol $\prod$ denotes a restricted direct product of groups (this analog of the notion of a direct sum is used for multiplicatively written groups). As usual, $\mathrm{t}(A)$ and A_p denote respectively the torsion part and the p-component of A.

Theorem 1. *If A is a quotient divisible group of rank* 1, *then*

$$\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut}(A/\mathrm{t}(A)) \times \prod_{p\in\mathbb{P}} \operatorname{Aut} A_p,$$

where $\mathbb{P}$ is the set of all primes.

Cyclic groups of infinite order and of order n are denoted respectively by Z and $Z(n)$. The notation $\mathcal{QD}_1$ stands for the class of all quotient divisible groups of rank 1 (such groups were studied in [2]).

Theorem 2. *Suppose all p-components of a group $A \in \mathcal{QD}_1$ are nonzero. Then*

$$\operatorname{Aut} A \cong \prod_{\aleph_0} Z \times \prod_{p\in\mathbb{P}} \prod_{k>0} \prod_{\aleph_0} Z(p^k).$$

We say that a finite cyclic group A is *weakly determined by its automorphism group* if for any finite cyclic group $B \ncong A$ the condition $\operatorname{Aut} A \cong \operatorname{Aut} B$ implies that the number of nonzero B_p's is greater than the number of nonzero A_p's.

Theorem 3. *A group $A \in \mathcal{QD}_1$ is determined by its automorphism group in the class $\mathcal{QD}_1$ if and only if $\mathrm{t}(A)$ is a cyclic group which is weakly determined by its automorphism group, while $pA \neq A$ for all $p \in \mathbb{P}$ such that $A_p = 0$.*

It can be checked directly that if $n \leqslant 50$, then $Z(n)$ is weakly determined by its automorphism group for $n = 1, 5, 8, 11, 13, 16, 17, 23, 24, 25, 29, 31, 32, 37, 41, 47$. Any such n gives rise to the group $\mathbb{Q}^{(n)} \oplus Z(n) \in \mathcal{QD}_1$ which is determined by its automorphism group in the class $\mathcal{QD}_1$. (Here $\mathbb{Q}^{(n)}$ is the subring of the field of rationals $\mathbb{Q}$ generated by the element $\frac{1}{n}$.)

References

1. A. Fomin, W. Wickless. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, № 1. P. 45–52.

2. O. I. Davydova. Rank-1 quotient divisible groups // J. Math. Sci. 2008. V. 154, № 3. P. 295–300.

On $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors and $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering Subgroups of Finite Groups

V. A. Vedernikov

Moscow Municipal Pedagogical University, Moscow

M. M. Sorokina

Bryansk State University I.G. Petrovsky, Bryansk

We have introduced definitions of an $\mathfrak{F}^{\omega}$-projector and of an $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroup in a finite group which are the generalization of Gaschütz‘s definitions of an $\mathfrak{F}$-projector and of an $\mathfrak{F}$-covering subgroup respectively.

Considered only finite groups. Let ω be a non-empty set of primes, let $\mathfrak{F}$ and $\mathfrak{X}$ be non-empty classes of groups, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$. A class $\mathfrak{F}$ is called ωP-closed in $\mathfrak{X}$ if for each group G the following condition is satisfied: if $G/Core_G(M) \cap O_{\omega}(G) \in \mathfrak{F}$ for every maximal subgroup M of G, then $G \in \mathfrak{F}$. Let $f : \omega \cup \{\omega'\} \to \{$ formations of groups $\}$ be an ωF-function. A formation $\omega LF(f) = (G : G/O_{\omega}(G) \in f(\omega')$ and $G/F_p(G) \in f(p)$ for all $p \in \omega \cap \pi(G))$ is called an ω-local formation with the ω-satellite f.

Definition 1. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. A subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}^{\omega}$-projector of G if HN/N is an $\mathfrak{F}$-maximal subgroup in G/N for every normal ω-subgroup N of G.*

Definition 2. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty class of groups. A subgroup H of the group G is called an $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroup of G if $H \in \mathfrak{F}$ and whenever $H \leq U \leq G$, V is a normal ω-subgroup of U such that $U/V \in \mathfrak{F}$, then $U = HV$.*

Theorem 1. *Let $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, let $\mathfrak{F}$ be a non-empty ωP-closed homomorph in $\mathfrak{X}$ and let $G \in \mathfrak{X}$. If G has an $\mathfrak{F}$-residual normal ω-subgroup, then there exists at least one $\mathfrak{F}^{\omega}$-projector of G.*

Theorem 2. *Let $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, let $\mathfrak{F}$ be a non-empty subclass of $\mathfrak{X}$. If every group $G \in \mathfrak{X}$ with $O_{\omega}(G) \neq 1$ has an $\mathfrak{F}^{\omega}$-projector, then:*

(1) $\mathfrak{F}$ is ωP-closed in $\mathfrak{X}$;

(2) if $H \in \mathfrak{F}$ and N is a normal ω-subgroup of H, then $H/N \in \mathfrak{F}$.

Theorem 3. *Let $\mathfrak{X}$ be an S-closed homomorph, let $\mathfrak{F}$ be a non-empty ωP-closed homomorph in $\mathfrak{X}$ and let G be an $\mathfrak{X}$-group which has $\pi(\mathfrak{F})$-soluble $\mathfrak{F}$-residual normal ω-subgroup. A subgroup H of G is an $\mathfrak{F}^{\omega}$-projector of G if and only if H is an $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroup of G.*

Theorem 4. *Let $\mathfrak{F}$ be a non-empty ω-local formation, let G be a group and let $G^{\mathfrak{F}}$ be a $\pi(\mathfrak{F})$-soluble ω-group. Then G has at least one $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroup ($\mathfrak{F}^{\omega}$-projector) and any two $\mathfrak{F}^{\omega}$-covering subgroups (any two $\mathfrak{F}^{\omega}$-projectors) of G are conjugate.*

Theorems 1-3 give a generalization of theorems of Erickson from [1]. Theorem 4 implies the known results of L.A. Shemetkov, Schmid, E.F. Shmigirev on $\mathfrak{F}$-covering subgroups in finite groups (see, for example, theorem 15.6, 15.7 [2]).

References

1. R. P. Erickson. Projectors of finite groups // Comm. Algebra. 1982. V. 10. P. 1919–1938.
2. L. A. Shemetkov. Formations of finite groups. M.: Nauka, 1978.

Содержание

Научное издание

АЛГЕБРА И ЛОГИКА: ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Тезисы докладов Международной конференции,
посвященной 70-летию В. М. Левчука

Красноярск, 24–29 июля 2016 г.

Ответственные за выпуск:
Башмаков Степан Игоревич
Зотов Игорь Николаевич
Нужин Яков Нифантьевич
Созутов Анатолий Ильич

Корректура *А. А. Быковой*

Подписано в печать 12.07.2016. Печать плоская. Формат 60×84/16
Бумага офсетная. Усл. печ. л. 7,7. Тираж 100 экз. Заказ № 2177

Библиотечно-издательский комплекс
Сибирского федерального университета
660041, Красноярск, пр. Свободный, 82а
Тел. (391) 206-26-67; http://bik.sfu-kras.ru
E-mail: publishing_house@sfu-kras.ru