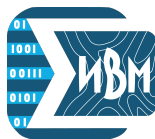
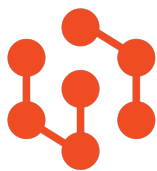


СБОРНИК ТЕЗИСОВ

XXVIII

ВСЕРОССИЙСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ  
ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ  
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ  
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ

10–15 июля 2023 г.  
г. Красноярск



*Российская Академия  
Наук*



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Сибирский федеральный университет

**СБОРНИК ТЕЗИСОВ XXVIII ВСЕРОССИЙСКОЙ  
КОНФЕРЕНЦИИ ПО ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ  
ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ**

*Электронное издание*

Красноярск  
СФУ  
2023

УДК 539.3/.6:519.61(083)  
ББК 30.121я43+22.193.1я43  
С232

Ответственный за сборник: **Магденко Евгений Петрович**

**С232 Сборник тезисов XXVIII Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности / Е. П. Магденко. (6,0 Мб). – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2023. – Систем. требования: РС не ниже класса Pentium I; 128 Mb RAM; Windows 98/XP/7; Adobe Reader V8.0 и выше. – Загл. с экрана.**

ISBN 978-5-7638-4861-8

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на 28-й Всероссийской конференции по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, 10–15 июля 2023 г., г. Красноярск.

Материалы сборника могут быть интересны научным работникам, аспирантам и студентам, специализирующимся в области механики сплошных сред.

*Проведение конференции и издание сборника тезисов поддержано Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).*

**УДК 539.3/.6:519.61(083)  
ББК 30.121я43+22.193.1я43**

© Сибирский федеральный  
университет, 2023

*Электронное учебное издание*

Подготовлено к публикации Издательством  
Библиотечно-издательского комплекса  
Подписано в свет 10.09.2023. Заказ № 19564  
Тиражируется на машиночитаемых носителях  
Библиотечно-издательский комплекс  
Сибирского федерального университета  
660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 82а  
Тел.: (391) 206-26-16; <http://rio.sfu-kras.ru>  
E-mail: [publishing\\_house@sfu-kras.ru](mailto:publishing_house@sfu-kras.ru)

## ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ

### **Председатель:**

Фомин В. М. – академик РАН, д.ф.-м.н. ИТПМ СО РАН (Новосибирск).

### **Заместители председателя:**

Краус Е. И. – д.ф.-м.н., ИТПМ СО РАН (Новосибирск).

Садовский В. М. – чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, ИМиФИ СФУ (Красноярск).

### **Секретари:**

Бузюркин А. Е. – к.ф.-м.н., ИТПМ СО РАН (Новосибирск).

Магденко Е. П. – к.ф.-м.н., ИВМ СО РАН, ИМиФИ СФУ (Красноярск).

### **Члены программного комитета:**

Аннин Б. Д. – академик РАН, д.ф.-м.н., ИГиЛ СО РАН, НГУ (Новосибирск).

Баженов В. Г. – д.ф.-м.н., НИИ механики ННГУ (Нижний Новгород).

Брагов А. М. – д.т.н., НИИ механики ННГУ (Нижний Новгород).

Буренин А. А. – чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИМиМ ДВО РАН (Комсомольск-на-Амуре).

Георгиевский Д. В. – д.ф.-м.н., МГУ, ИПМ РАН (Москва).

Голушко С. К. – д.ф.-м.н., ФИЦ ИВТ, НГУ (Новосибирск).

Горнов А. Ю. – д.т.н., ИДСТУ СО РАН (Иркутск).

Горячева И. Г. – академик РАН, д.ф.-м.н., ИПМех РАН (Москва).

Гузев М. А. – академик РАН, д.ф.-м.н., ИПМ ДВО РАН (Владивосток).

Ерофеев В. И. – д.ф.-м.н., ИПМ РАН, ННГУ (Нижний Новгород).

Колубаев Е. А. – д.т.н., ИФПМ СО РАН (Томск).

Коробейников С. Н. – д.ф.-м.н., ИГиЛ СО РАН (Новосибирск).

Матвеев В. П. – академик РАН, д.т.н., ИМСС УрО РАН (Пермь).

Морозов Н. Ф. – академик РАН, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН, СПбГУ (Санкт-Петербург).

Немировский Ю. В. – д.ф.-м.н., ИТПМ СО РАН, НГТУ (Новосибирск).

Никитин И. С. – д.ф.-м.н., ИАП РАН (Москва).

Панин А. В. – д.ф.-м.н., ИФПМ СО РАН (Томск).

Панин С. В. – д.т.н., ИФПМ СО РАН (Томск).

Петров И. Б. – чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., МФТИ (Долгопрудный).

Петров Ю. В. – чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., ИПМаш РАН, СПбГУ (Санкт-Петербург).

Радченко А. В. – д.ф.-м.н., ИФПМ СО РАН (Томск).

Ревуженко А. Ф. – д.ф.-м.н., ИГД СО РАН, НГУ (Новосибирск).

Роменский Е. И. – д.ф.-м.н., ИМ СО РАН (Новосибирск).

Сапожников Г. А. – д.ф.-м.н., СО РАН (Новосибирск).

Сенашов С. И. – д.ф.-м.н., СибГУ науки и технологий (Красноярск).

Трусов П. В. – д.ф.-м.н., ПНИПУ (Пермь).

Филимонов М. Ю. – д.ф.-м.н., ИММ УрО РАН, УрФУ (Екатеринбург).

Фролов М. Е. – д.ф.-м.н., ИПММ СПбПУ (Санкт-Петербург).

Хлуднев А. М. – д.ф.-м.н., ИГиЛ СО РАН, НГУ (Новосибирск).

Чехонин К. А. – д.ф.-м.н., ХО ИПМ ДВО РАН (Хабаровск).

Altenbach Holm – Altenbach Holm – иностр. чл. РАН, Prof., Institut für Mechanik Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg (Germany).

Kovtunenکو Victor – д.ф.-м.н., Dr., Institute for Mathematics and Scientific Computing, University of Graz (Austria).

Саркисян С. О. – чл.-корр. НАН РА, д.ф.-м.н., Гюмрийский гос. педагогический институт (Армения).

### **Научные направления конференции:**

- Вопросы математического и физического моделирования упругопластической деформации и разрушения на макро- и микроуровнях.
- Микроструктурные превращения в средах со структурой при высокоэнергетических воздействиях.
- Проблемы разработки алгоритмов решения задач динамики и разрушения сплошных сред с учетом пористости и кинетики накопления повреждений.
- Задачи динамического взаимодействия тел с усложненными физико-химическими свойствами в широком диапазоне давлений и температур.
- Вычислительные проблемы и методы решения задач механики деформируемого твердого тела, в том числе на многомасштабных уровнях.
- Численные методы решения задач прочности, устойчивости и разрушения конструкций из композиционных материалов.
- Редкие газы.
- Аналитические методы интегрирования дифференциальных уравнений.
- Метаматериалы.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<i>П. С. Аронов, М. П. Галанин, А. С. Родин</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ УЧАСТКА ТВЭЛА С УЧЕТОМ КОНТАКТА И ПОЛЗУЧЕСТИ.....	11
<i>Р. Р. Балохонов, В. А. Романова, А. В. Землянов</i> МНОГОУРОВНЕВЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ АДДИТИВНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ.....	14
<i>С. П. Батуев, П. А. Радченко, А. В. Радченко</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ МЕТАЛЛОКЕРАМИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ УДАРЕ.....	16
<i>Н. И. Белозеров, К. А. Чехонин</i> САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕХНОЛОГИИ ПРЯМОГО ЛАЗЕРНОГО НАРАЩИВАНИЯ СЛОЯ .....	19
<i>В. А. Гордин, А. А. Шемендюк</i> УПРУГИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ: НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ .....	22
<i>Г. Л. Горынин, С. К. Голушко, А. Г. Горынин</i> МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ .....	25
<i>А. Г. Горынин, С. К. Голушко, Г. Л. Горынин</i> МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ОДНОРОДНЫХ И КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК .....	27
<i>В. В. Горяйнов, А. Д. Чернышов</i> ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕНИЯХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БРУСЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ .....	29

- А. С. Григорьев, Е. В. Шилько*  
 ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РОСТА ТРЕЩИН  
 ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ХРУПКИХ ГЕТЕРОГЕННЫХ  
 МАТЕРИАЛАХ ..... 32
- А. И. Дмитриев, С. О. Огнев, Ю. М. Коротеев, А. Ю. Никонов*  
 РАЗРАБОТКА МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
 МНОГОСЛОЙНОГО ПОКРЫТИЯ СИСТЕМЫ TiAlTaSiN..... 35
- О. В. Дудко, А. А. Лаптева, В. Е. Рагозина*  
 РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ  
 ОДНОМЕРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
 РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ  
 ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ОТРАЖЕНИЙ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ..... 37
- Е. А. Ефимов*  
 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН  
 В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ С РАЗЛИЧНОЙ РЕОЛОГИЕЙ ..... 41
- А. В. Заболотский, А. И. Дмитриев*  
 О ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ РАЗРУШЕНИИ ОГНЕУПОРОВ..... 43
- В. Н. Зиновьев, И. В. Казанин, В. М. Фомин*  
 ТЕХНОЛОГИЯ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ГЕЛИЯ И ПАРОВ ВОДЫ  
 ИЗ ПРИРОДНОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ  
 МЕМБРАННО-СОРБЦИОННОГО МЕТОДА ..... 46
- А. В. Иванов, Г. Л. Горынин*  
 РАСЧЁТ СЛОИСТЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ  
 АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ ..... 50
- И. В. Казанин, В. Н. Зиновьев, К. Э. Прокопьев,  
 А. С. Верещагин, В. М. Фомин*  
 РАЗДЕЛЕНИЕ ВОДОРОДНО-ГЕЛИЕВЫХ СМЕСЕЙ  
 С ПОМОЩЬЮ МЕМБРАННО-СОРБЦИОННОГО МЕТОДА..... 52
- И. Э. Келлер, Д. С. Дудин, Н. К. Салихова,  
 Г. Л. Пермьяков, Д. Н. Трушников*  
 ИСКАЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВОЗВЕДЕНИИ НА НЕЙ РЕБРА  
 ПРОВОЛОЧНО-ДУГОВОЙ НАПЛАВКОЙ С ПОСЛОЙНОЙ ПРОКОВКОЙ...54
- А. Г. Князева*  
 ТЕРМОВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ МОДИФИКАЦИИ  
 ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ ..... 56

- Г. Н. Кувыркин, Д. Р. Рахимов*  
 АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ  
 ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ  
 ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ..... 58
- А. А. Кутуков, Н. А. Кудряшов*  
 ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ  
 ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ  
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
 ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ..... 62
- С. А. Лаврук, Т. А. Хмель, А. А. Афанасенков*  
 ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДОБАВЛЕНИЯ ЧАСТИЦ АЛЮМИНИЯ  
 НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАЗОВОЙ ДЕТОНАЦИИ В КАНАЛЕ  
 С РАСШИРЕНИЕМ..... 65
- А. А. Лапина, Г. М. Еремина, Е. В. Шилько*  
 ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ  
 ВНУТРИКАНЕВОЙ ЖИДКОСТИ НА МЕХАНИЧЕСКИЙ ОТКЛИК  
 ПРОКСИМАЛЬНОГО ОТДЕЛА БЕДРЕННОЙ КОСТИ ЧЕЛОВЕКА ..... 68
- Д. В. Лычагин, А. Ю. Никонов, В. А. Романова*  
 НЕОДНОРОДНОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ ГЦК  
 МОНОКРИСТАЛЛОВ: ЭКСПЕРИМЕНТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ..... 71
- И. В. Магнитский, А. Э. Дворецкий, С. В. Тацилов, Е. С. Сергеева*  
 МНОГОУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОГО  
 ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ  
 КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ..... 75
- А. Е. Медведев, А. Д. Ерохин*  
 МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЛОЕНИЯ АОРТЫ С АНЕВРИЗМОЙ..... 77
- В. А. Медведев, Н. А. Кудряшов*  
 ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ  
 НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ  
 НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ..... 81
- С. Т. Милейко*  
 НОВЫЕ КОМПОЗИТЫ С МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ  
 ДЛЯ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ ..... 85
- И. А. Модин, А. В. Кочетков, М. Х. Абузьяров, Вл. Вл. Баландин*  
 ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНИКОВ  
 С ГРАНУЛИРОВАННЫМИ СЛОЯМИ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ШАРИКОВ . 88



- Е. В. Нагорных, В. Г. Баженов, Д. А. Самсонова*  
 ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ  
 И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ  
 ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ  
 ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ  
 НАГРУЖЕНИЯХ ..... 92
- Ю. В. Немировский, С. В. Тихонов*  
 ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГИЙ ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ  
 БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ..... 97
- А. Ю. Никонов, А. И. Дмитриев*  
 ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРНЫХ ПЕРЕСТРОЕК ВБЛИЗИ ОБЛАСТИ  
 СОПРЯЖЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ МЕТАЛЛОВ В УСЛОВИЯХ  
 ДЕФОРМАЦИИ..... 101
- Д. Р. Нифонтов, Н. А. Кудряшов*  
 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ  
 ДИСПЕРСИЕЙ И НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ВИДЕ ПОЛИНОМА..... 103
- М. М. Пегливанова, И. А. Гальчун, В. Ю. Филлин*  
 РАСЧЕТНОЕ СРАВНЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ К ПРОЦЕДУРЕ  
 ИСПЫТАНИЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ И НОРМИРУЕМЫМ  
 ХАРАКТЕРИСТИКАМ ПЛАСТИЧНОСТИ  
 ИМПОРТОЗАМЕЩАЕМЫХ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ ..... 106
- М. Г. Петров*  
 ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ  
 УГЛЕПЛАСТИКА В РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРНО-СИЛОВЫХ  
 УСЛОВИЯХ ..... 110
- И. Е. Петраков*  
 КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА КОМПОЗИТНОЙ  
 ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА..... 113
- О. А. Плехов, А. А. Костина, М. С. Желнин, Е. А. Гачегова, А. Н. Вшивков*  
 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ,  
 ВЫЗВАННЫХ ЛАЗЕРНОЙ УДАРНОЙ ПРОКОВКОЙ,  
 В ТИТАНОВОМ СПЛАВЕ ВТ-6..... 115
- А. В. Радченко, П. А. Радченко, С. П. Батуев*  
 ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ  
 УДАРНИКА НА ПРОНИКАНИЕ В ПРЕГРАДУ ПРИ УДАРЕ ..... 119

- П. А. Радченко, А. В. Радченко, С. П. Батуев*  
 МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИПЕРСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
 КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА С ЗАЩИТНЫМИ ЭКРАНАМИ  
 МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ..... 121
- Е. В. Решетникова, В. О. Каледин, А. Д. Ульянов, А. С. Лазненко*  
 РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА  
 ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ  
 ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОБЪЕКТНОГО ПОДХОДА ..... 124
- А. Н. Рогалев*  
 УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ  
 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
 ПРИ СТРУКТУРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ ..... 127
- Е. С. Роговенко, Е. В. Фоменко, А. Г. Анишиц*  
 ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ И ГАЗОТРАНСПОРТНЫХ  
 СВОЙСТВ СТЕКЛОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МЕМБРАННЫХ  
 МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ЦЕНОСФЕР ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОЛ ..... 130
- А. С. Родин, М. П. Галанин*  
 РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО  
 КОНТАКТА СИСТЕМЫ ТЕЛ ..... 135
- О. В. Садовская, В. М. Садовский*  
 АЛГОРИТМЫ КОРРЕКТИРОВКИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО  
 МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ  
 ПОРИСТОЙ СРЕДЫ..... 137
- В. М. Садовский, О. В. Садовская*  
 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЙ В ТОНКИХ  
 ПРОСЛОЙКАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ..... 141
- Ю. С. Седова, Н. М. Бессонов*  
 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ  
 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА,  
 НАСЫЩЕННОГО ВОДОРОДОМ ..... 143
- Т. А. Трофименко, К. А. Чехонин*  
 УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ  
 УПРОЧНЕНИЕМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ  
 НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕХНОЛОГИИ ПРЯМОГО ЛАЗЕРНОГО  
 НАРАЩИВАНИЯ СЛОЯ ..... 146

*М. Ю. Федоров, Я. В. Глазюк, В. Ю. Попов*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОРПУСОВ

ДЕТЕКТОРОВ НЕЙТРОННОГО ПОТОКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЯДЕРНЫХ

РЕАКТОРОВ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ..... 149

*И. Е. Шиповский, В. А. Трофимов*

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ

И РАЗРУШЕНИЯ ОТКОСОВ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ ..... 153

## МОДЕЛИРОВАНИЕ УЧАСТКА ТВЭЛА С УЧЕТОМ КОНТАКТА И ПОЛЗУЧЕСТИ

П. С. Аронов<sup>1, a</sup>, М. П. Галанин<sup>1, b</sup>, А. С. Родин<sup>1, c</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва;

<sup>a</sup>aronovps@mail.ru, <sup>b</sup>galan@keldysh.ru, <sup>c</sup>rals@bk.ru

**Введение.** Математическое моделирование термомеханического состояния тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ) в энергетических реакторах является актуальной задачей. Важную роль в процессе эксплуатации ТВЭЛ играет контактное взаимодействие таблеток друг с другом и с оболочкой. Изначально между топливными таблетками и оболочкой имеется зазор, который уменьшается при эксплуатации вследствие изменения геометрических параметров топлива и оболочки.

В работе приведена постановка квазистационарной мультиконтактной задачи термомеханики и представлен алгоритм ее численного решения с учетом изменения во времени деформаций и напряжений за счет эффекта ползучести. Рассмотрено применение алгоритма к задаче, моделирующей процессы в участке ТВЭЛ с учетом зазора между таблетками и оболочкой.

**Математическая постановка задачи.** Рассмотрена задача, моделирующая термомеханические процессы, происходящие в ТВЭЛе, который имеет следующую конструкцию: внутри цилиндрической оболочки  $G_N$  расположен столб из  $N-1$  поставленных друг на друга одинаковых цилиндрических таблеток  $G_1, \dots, G_{N-1}$ , имеющих внутреннее отверстие и фаски на обоих торцах.

Предположим, что эффектом связанности можно пренебречь, поэтому задачу теплопроводности будем решать отдельно, а полученное температурное поле использовать при решении контактной задачи термомеханики.

Математическая формулировка квазистатической задачи механики деформируемого твердого тела для случая, когда объемные силы отсутствуют, включает в себя следующие соотношения для каждого тела с номером  $m = \overline{1, N}$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ) [1]:

- уравнения равновесия

$$\sigma_{ji,j}(\mathbf{u}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in G_m, \quad t > 0;$$

- кинематические граничные условия

$$u_i(\mathbf{x}, t) = u_{i_0}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_D, \quad t > 0;$$

- силовые граничные условия

$$\sigma_{ji}(\mathbf{u}, t)n_j = p_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in S_N, \quad t > 0;$$

- соотношения Коши для линейного тензора полной деформации

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in G_m, \quad t > 0;$$

- определяющие уравнения (закон Гука)

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \varepsilon_{kl}^0(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in G_m, \quad t > 0,$$

где  $x_i$  – координаты вектора  $x \in G_m$ ;  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора полной деформации;  $\varepsilon_{kl}^0$  – компоненты тензора неупругой деформации;  $u_i$  – компоненты вектора перемещения;  $C_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих постоянных;  $p_i$  – компоненты вектора поверхностных сил;  $n_j$  – компоненты вектора внешней нормали к соответствующей поверхности  $S_j$ ,  $S_D$  и  $S_N$  – объединение поверхностей, на которых заданы кинематические и силовые граничные условия соответственно.

В системе насчитывается  $q = 2N - 3$  контактные пары  $(S_{j,1}^k, S_{j,2}^k)$ :  $N - 2$  контактные пары таблетка/таблетка и  $N - 1$  контактная пара таблетка/оболочка. Для каждой  $j$ -й контактной пары дополнительные условия на поверхности  $S_{j,1}^k$  для случая контакта без трения выглядят следующим образом (для поверхности  $S_{j,2}^k$  условия записываются аналогично):

$$\begin{aligned} \sigma_\tau^1(\mathbf{x}_1) &= 0; \\ \sigma_n^1(\mathbf{x}_1) &= \sigma_n^2(\bar{\mathbf{x}}_2), \quad 0; \\ u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\bar{\mathbf{x}}_2), \quad \delta_{0n}(\mathbf{x}_1); \\ \sigma_n^1(\mathbf{x}_1)(u_n^1(\mathbf{x}_1) + u_n^2(\bar{\mathbf{x}}_2) - \delta_{0n}(\mathbf{x}_1)) &= 0, \end{aligned}$$

где  $\delta_{0n}(\mathbf{x}_1) \dots 0$  – функция, задающая начальный зазор.

Для моделирования процесса ползучести использована теория течения [2]. Для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений для производной тензора деформации ползучести по времени использован алгоритм, основанный на применении метода трапеций, для линеаризации использован метод Ньютона.

Слабая постановка задачи основана на минимизации функционала энергии, в который входит интеграл по контактным поверхностям. Задача решена с помощью метода конечных элементов в осесимметричной постановке, в расчетах применены элементы второго порядка на четырехугольной сетке. Дискретизация интеграла по контактным поверхностям выполнена с помощью mortar-метода [3]. Минимизация функционала в каждый момент времени приводит к формированию следующей системы линейных алгебраических уравнений [4] на  $k$ -й итерации (для текущего приближения конфигурации контактной поверхности):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{M}^{(k-1)} \\ \mathbf{M}^{(k-1)T} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{(k)} \\ \Delta \lambda^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{R}_c^{(k-1)} \end{Bmatrix}. \quad (1)$$

Система уравнений (1) решена с помощью модифицированного метода Якоби [4].

**Результаты и обсуждение.** В выполненных расчетах полагалось, что нижние торцы оболочки и нижней таблетки закреплены по вертикали, на

верхнем торце верхней таблетки задано постоянное давление 50 МПа, на внешней поверхности оболочки – постоянное давление 10 МПа. Проведены серии расчетов с различными входными данными, в том числе расчет, в котором в начальный момент времени между  $i$ -й таблеткой и оболочкой задан зазор  $\delta_{0n}^i = 0,01(1 + \sin(\pi z_i / 1000))$ , где  $z_i$  – осевая координата центра  $i$ -й таблетки (в мм). В проведенных расчетах считалось, что начальная температура  $T_0 = 300$  К, температура оболочки является постоянной ( $T_f = 623$  К), линейная мощность тепловыделения в таблетках является постоянной по пространству, за 1 час линейно возрастает от 0 до номинального значения и далее остается постоянной. На внешней поверхности таблеток задано условие теплообмена с оболочкой, на других поверхностях задан нулевой поток.

Выполнены серии расчетов для участка твэла, включающего от 1 до 100 таблеток и различных моментов времени на несогласованных сетках. Среднее время использования твэла в реакторе составляет несколько лет, поэтому выбрано время  $3,2 \cdot 10^8$  с (около 10 лет). В работе использованы реалистичные модели материалов, взятые из открытой библиотеки MATPRO [5]. Результаты показали корректное выполнение кинематических и силовых условий на контактных поверхностях. Проведенные расчеты продемонстрировали, что учет деформаций ползучести приводит к тому, что радиальные напряжения за 10 лет уменьшаются в 5–10 раз по сравнению с начальными напряжениями.

**Заключение.** Представлена постановка квазистационарной задачи мультиконтактного взаимодействия системы осесимметричных термоупругих тел с учетом деформаций ползучести. Изложен численный алгоритм решения подобных задач, основанный на методе конечных элементов. Представлены результаты моделирования термомеханических процессов, проходящих в участке твэла, содержащего до 100 таблеток, на интервале времени до 10 лет, с учетом наличия зазора между таблетками и оболочкой.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00260.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008.
2. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1975.
3. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2006.
4. Аронов П.С., Галанин М.П., Родин А.С. *Сравнение методов решения систем линейных уравнений, возникающих в задачах с изменяющейся конфигурацией контактной поверхности*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, № 39. 2021.
5. Hagrman D.L. *MATPRO – A Library of Materials Properties for Use in the Analysis of Light Water Reactor Fuel Rod Behavior*. NUREG/CR-6150 TREE-1280. 1993.

## МНОГОУРОВНЕВЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ АДДИТИВНЫХ И КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*Р. Р. Балохонов<sup>1, а</sup>, В. А. Романова<sup>1</sup>, А. В. Землянов<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;*

*<sup>а</sup>rusy@ispms.ru*

Литейные алюминивно-кремниевые сплавы широко используются в авиации, космосе, энергетике и машиностроении. Система AlSi12 представляет собой многоуровневый композит, характеризующийся наличием поликристаллической структуры на макроуровне, дендритной структуры ячеек первичного алюминия, окруженного эвтектическим каркасом, на мезоуровне и эвтектики «алюминий – частицы кремния» на микроуровне. Изготовление изделий сложной формы из силуминов методами локальной металлургии, например, электронно-лучевым аддитивным плавлением проволоки (ЭЛАП), является на сегодняшний день новым и одним из наиболее перспективных направлений. Несмотря на широкое использование аддитивных и композиционных материалов, проблемы их прочности и долговечности на сегодняшний день до конца не решены. Связано это, прежде всего, с тем, что композиты характеризуются сложной многоуровневой структурой. В связи с этим особую актуальность и значимость приобретает прогнозирование механического поведения композитов с учетом границ раздела различной геометрии масштаба и свойств. Моделирование является важным дополнением к экспериментальным исследованиям, позволяет изучать эволюцию локальных параметров напряженно-деформированного состояния внутри объема композита и в процессе его нагружения, а также снизить материальные и временные затраты на проведение дорогостоящих экспериментов. Работ, связанных с моделированием деформации и разрушения ЭЛАП силуминов с явным учетом многомасштабной структуры, на сегодняшний день в литературе нет.

В работе исследуются неоднородное деформирование и разрушение ЭЛАП и композиционных материалов с алюминиевой матрицей и частицами кремния и карбидов металлов. Краевые динамические задачи в двумерной и трехмерной постановках решаются численно методами конечных разностей и конечных элементов. Методами пошагового заполнения [1, 2] и динамической съемки поверхностей природных камней щебенки [3, 4] созданы трехмерные структуры композитов с частицами неправильной угловатой формы. Для описания упругопластической реакции однородной и поликристаллической матрицы используются изотропные и анизотропные модели типа Дюамеля-Неймана, включающие ассоциированный закон пластического течения и физическую теорию пластического течения соответственно. Разрушение частиц и матрицы происходит при критических значениях интенсивностей напряжений и накопленной пластической деформации соответственно. Исследованы особенности формирования и эволюции остаточных

напряжений, локализации пластической деформации, зарождения и развития трещин при растяжении и сжатии композитов и ЭЛАП силуминов, как из начального недеформированного состояния, так из состояния после охлаждения. Проведен сравнительный анализ деформации и разрушения композита с учетом и без учета поликристаллического строения матрицы. Изучено влияние объемной доли частиц, адгезии на границе раздела «матрица-частица», толщины композитного покрытия [5]. Для ЭЛАП сплавов исследованы закономерности деформирования и эффективные свойства эвтектики и материала на уровне дендритной структуры.

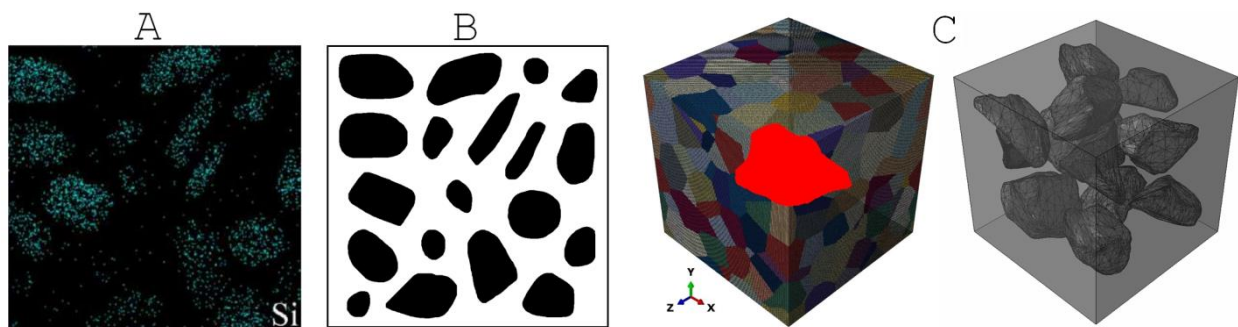


Рис. 1. А – ЭДС картирование зоны эвтектики ( $\alpha$ -Al+Si) аддитивного AlSi12;  
 В – соответствующая модельная структура композита;  
 С – трехмерные структуры металлокерамических композитов

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00222, <https://rscf.ru/project/23-11-00222/>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Balokhonov R., Romanova V., Zinovieva O., Zemlianov A. *Microstructure-based analysis of residual stress concentration and plastic strain localization followed by fracture in metal-matrix composites*. Engineering Fracture Mechanics, 259 (2022) 108138.
2. Balokhonov R., Romanova V., Zinovieva O., Dymnich E. *A computational study of the effects of polycrystalline structure on residual stress-strain concentrations and fracture in metal-matrix composites*. Engineering Failure Analysis 138 (2022) 106379.
3. Balokhonov R., Romanova V., Buyakova S. et al. *Deformation and Fracture Behavior of Particle-Reinforced Metal Matrix Composites and Coatings*. Physical Mesomechanics. 2022. V. 25. P. 492-504.
4. Balokhonov R., Kulkov A., Zemlyanov A. et al. *Evolution of Residual Stresses and Fracture in Thermomechanically Loaded Particle-Reinforced Metal Matrix Composites*. Physical Mesomechanics. 2021. V. 24. P. 503-512.
5. Balokhonov R., Romanova V., Schmauder S., Emelianova E. *A numerical study of plastic strain localization and fracture across multiple spatial scales in materials with metal-matrix composite coatings*. Theoretical and Applied Fracture Mechanics. 2019. V. 101. P. 342-355.



## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ МЕТАЛЛОКЕРАМИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ УДАРЕ

С. П. Батуев<sup>1, а</sup>, П. А. Радченко<sup>1</sup>, А. В. Радченко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;

<sup>а</sup>*spbatauev@gmail.com*

Современные противоударные средства защиты представляют собой слоистую конструкцию из нескольких материалов. Одним из материалов, широко используемых в защитных конструкциях, является высокотвердая керамика. Наиболее широкое применение в противоударных конструкциях получили карбид бора ( $B_4C$ ), карбид кремния ( $SiC$ ), оксид алюминия ( $Al_2O_3$ ). Керамические материалы имеют низкую плотность, высокие твердость, модуль упругости и прочность на сжатие. В то же время керамика обладает низкой трещиностойкостью и прочностью на растяжение. Керамика располагается на фронтальной поверхности защитной конструкции, на подложке, которая обеспечивает защиту от фрагментов керамики и ударника. В качестве подложки используются пластичные металлические сплавы, полимерные материалы, композиты на основе углепластиков или органопластиков. Исследованию свойств высокотвердой керамики посвящено много экспериментальных, теоретических и численных работ, как российских, так и зарубежных исследователей, среди них можно отметить работы [1–4].

В нашей работе численно моделируется взаимодействие стального ударника (область  $D_1$ ) с трехслойной преградой (рис. 1). Материал верхнего слоя преграды – карбид бора (область  $D_2$ ), последующие слои (области  $D_3$  и  $D_4$ ) состоят из алюминиевого сплава Д16Т и композиционного анизотропного материала (органопластика). Ударник взаимодействует с преградой с начальной скоростью  $v_0$  под углом  $\alpha$  (угол между продольной осью ударника и нормалью  $\mathbf{n}$  к преграде). В начальный момент времени  $t=0$  направление вектора скорости совпадает с продольной осью ударника. Рассмотрен диапазон скоростей взаимодействия 400–1000 м/с и углов встречи 0–70°. На контактных поверхностях между ударником и преградой реализованы условия скольжения без трения, на контактных поверхностях между слоями преграды – условия «слипания».

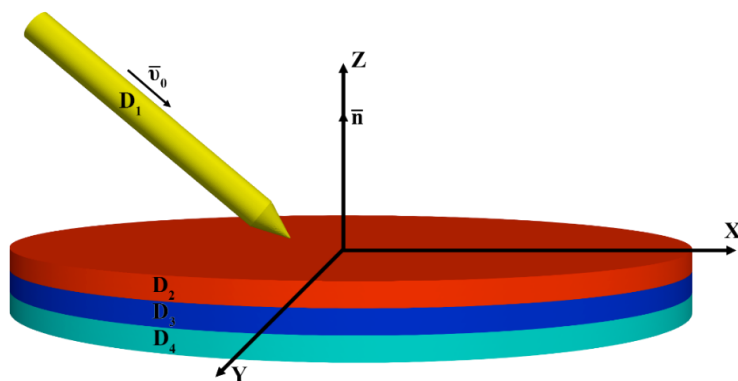


Рис. 1. Постановка задачи

Моделирование проводится в полной трехмерной постановке [5]. Поведение металлического слоя преграды и материала ударника описывается упругопластической моделью [5]. В качестве критерия разрушения материалов ударника и металлического слоя преграды принимается предельная величина интенсивности пластических деформаций [5–6]:

$$e_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{3T_2 - T_1^2},$$

где  $T_1, T_2$  – первый и второй инварианты тензора деформаций.

Поведение керамики В4С описывалось упругохрупкой пластичной средой, хрупко разрушающейся при растяжении. Шаровая часть тензора напряжений (давление) определялась соотношением

$$P = \left[ \exp \left( 4b \frac{V_0 - V}{V_0} \right) - 1 \right] \frac{\rho_0 c_0^2}{4b},$$

где  $\rho_0$  – начальная плотность,  $c_0$  и  $b$  – коэффициенты ударной адиабаты,  $D = c_0 + bu_m$ ,  $u_m$  – массовая скорость,  $V_0$  и  $V$  – начальный и текущий удельные объемы. Уравнение ударной адиабаты карбида бора взято из работы [3], прочностные характеристики из [1–2]. В качестве критерия разрушения карбида бора предлагается тензорно-полиномиальный критерий Хоффмана [7], учитывающий различия пределов прочности при сжатии и растяжении.

Поведение анизотропного композита описывалось в рамках модели хрупкоразрушающегося ортотропного материала [8]. До разрушения компоненты тензора напряжений в материале преграды определялись из соотношений обобщенного закона Гука, записанного в терминах скоростей деформаций:

$$\dot{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} e_{kl},$$

где  $\sigma^{ij}$  – контравариантные компоненты тензора напряжений;  $C^{ijkl}$  – упругие постоянные, которые можно выразить через технические характеристики материала: модули Юнга  $E_i$  вдоль трех осей симметрии и коэффициенты Пуассона  $\nu_{ij}$ ; точка над символом означает производную по времени. Моделирование разрушения органопластика проводится в рамках феноменологического подхода [8]. В качестве критерия прочности использовался тензорно-полиномиальный критерий Цая – Ву [9]:

$$f(\sigma^{ij}) = F_{ij}\sigma^{ij} + F_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} + \dots = 1, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3.$$

Здесь  $F_{ij}$  и  $F_{ijkl}$  являются компонентами тензоров 2-го и 4-го ранга соответственно и подчиняются следующим законам преобразования:  $F'_{ab} = F_{ij}q_{ia}q_{jb}$ ,  $F'_{abcd} = F_{ijkl}q_{ia}q_{jb}q_{kc}q_{ld}$ , где  $q_{ij}$  – косинус угла между соответствующими осями.

Моделирование проводится в трехмерной постановке методом конечных элементов с использованием авторского алгоритма и программного комплекса EFES [10], позволяющего моделировать фрагментацию взаимодействующих тел с образованием новых контактных и свободных поверхностей, эрозионное

разрушение материалов. Адекватность математической модели и численного алгоритма подтверждается хорошим согласием экспериментальных и численных результатов [5, 6, 9].

Проведено сравнение результатов с экспериментальными и расчетными данными [1, 4], показавшее их хорошее согласование. Изучено влияние последовательности расположения металлического и композитного слоя на защитные свойства преграды. Определены геометрические и кинематические параметры, при которых происходит рикошет ударника от преграды. Исследовано влияние ориентации осей симметрии ортотропного композита на ударно-волновую картину и разрушение слоистой преграды.

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00407, <https://rscf.ru/project/22-21-00407/>.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Moynihan T.J., Chou S.-C., Mihalcin A.L. *Application of the depth-of-penetration test methodology to characterize ceramics for personnel protection*. Defence Technology. 2000. V. 15. No. 6. P. 829-836.
2. Савиных А.С., Гаркушин Г.В., Разоренов С.В. и др. *Динамическая прочность реакционно-спеченной керамики карбида бора*. Журнал технической физики. 2015. Т. 85. № 6. С. 77-82.
3. Молодец А.М., Голышев А.А., Шахрай Д.В. *Уравнения состояния и кривая плавления карбида бора в области высоких давлений ударного сжатия*. ЖЭТФ. 2017. Т. 151. № 3. С. 550-557.
4. Kraus A.E., Kraus E.I., Shabalin I.I. *Impact resistance of ceramics in a numerical experiment*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. 2020. V. 61. No. 5. P. 847-854.
5. Radchenko P.A., Batuev S.P., Radchenko A.V. *Effect of projectile rotation on high-velocity impact fracture*. Physical Mesomechanics. 2022. V. 25. No. 2. P. 119-128.
6. Канель Г.И., Щербань В.В. *Пластическая деформация и откольное разрушение железа «Армко» в ударной волне*. Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16. № 4. С. 93-103.
7. Hoffman O. *The brittle strength of orthotropic materials*. Journal of Composite Materials. 1967. V. 1. No. 2. P. 200-206.
8. Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. *Modeling the Destruction of an Anisotropic Composite Barrier in Interaction with Slender Strikers at an Angle*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2022. V. 95. No. 1. P. 90-96.
9. Tsai S.W., Wu E.M. *A general theory of strength for anisotropic materials*. Journal of Composite materials. 1971. V. 5. P. 58-80.
10. Радченко П.А., Батуев С.П., Радченко А.В. *Трёхмерное моделирование деформации и разрушения гетерогенных материалов и конструкций при динамических нагрузках (EFES 2.0)*. Государственная регистрация программы для ЭВМ. – № 2019664836 от 14.11.2019.

## САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕХНОЛОГИИ ПРЯМОГО ЛАЗЕРНОГО НАРАЩИВАНИЯ СЛОЯ

Н. И. Белозеров<sup>1, а</sup>, К. А. Чехонин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Вычислительный центр ДВО РАН ХФИЦ, Хабаровск;

<sup>а</sup>nbel444@mail.ru

Целью настоящей работы является параметрическое исследование лазерной наплавки порошков высокопрочных алюминиевых сплавов для построения микроструктурной карты процесса нанесения слоев в аддитивных технологиях. Такая карта дает возможность ориентироваться в широком диапазоне различных параметров и эффективно находить оптимальные режимы воздействия. Предложена самосогласованная численная модель, включающая в себя теплопроводность, гидродинамику и кинетику фазового перехода, разработана для лазерной наплавки с коаксиальной инъекцией порошка (рис. 1 а).

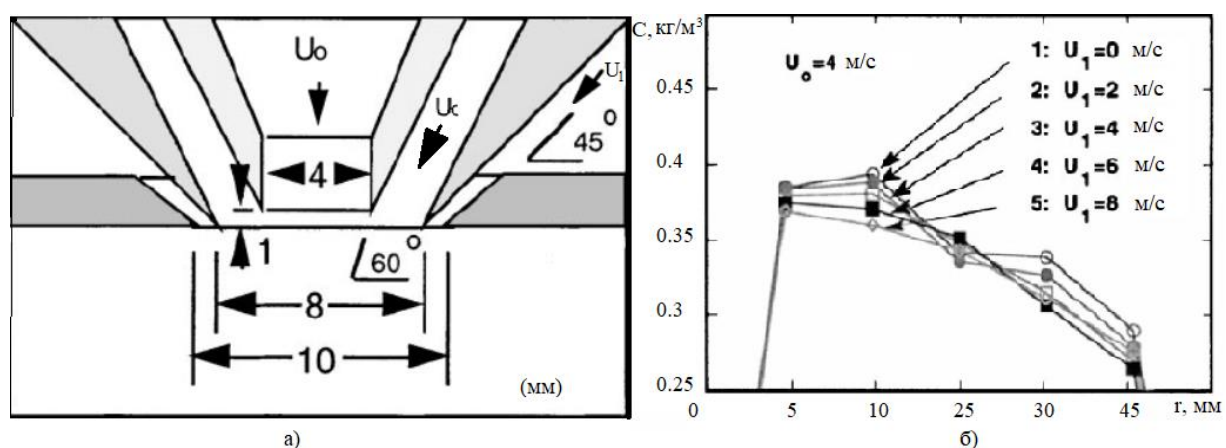


Рис. 1. а) геометрия коаксиального сопла,  $U_0$ ,  $U_1$  – среднерасходные скорости инертного газа,  $U_c$  – инертного газа с частицами порошка;

б) распределение концентрации  $C$  порошка в радиальном направлении струи  $r$  на выходе из сопла при варьировании расходом экранирующего газа  $U_1$

Для расчета микроструктуры использовано модифицированное микрокинетическое уравнение Колмогорова – Авраами, решение которого согласуется с уравнениями гидродинамического переноса тепла и свободной поверхности. Рассмотрены гидродинамические особенности истекания многофазной турбулентной коаксиальной струи с частицами порошка. Рассчитана динамика распределения концентрации порошка по сечению турбулентной струи (рис. 1 б), температурных, концентрационных и фазовых полей в ванне расплава (рис. 2–4), а также движение свободной поверхности под действием гидродинамических сил и при добавлении порошка.

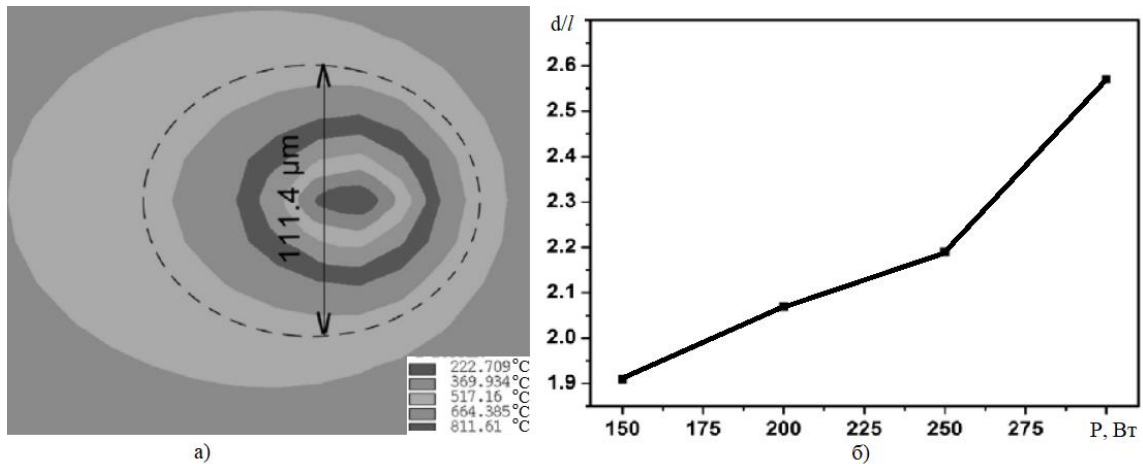


Рис. 2. а) распределение температуры на поверхности ванны расплава; б) влияние мощности лазера  $P$  на относительную глубину ванны расплава  $d/l$  ( $l$  – длина ванны) при постоянной скорости сканирования ( $v = const$ )

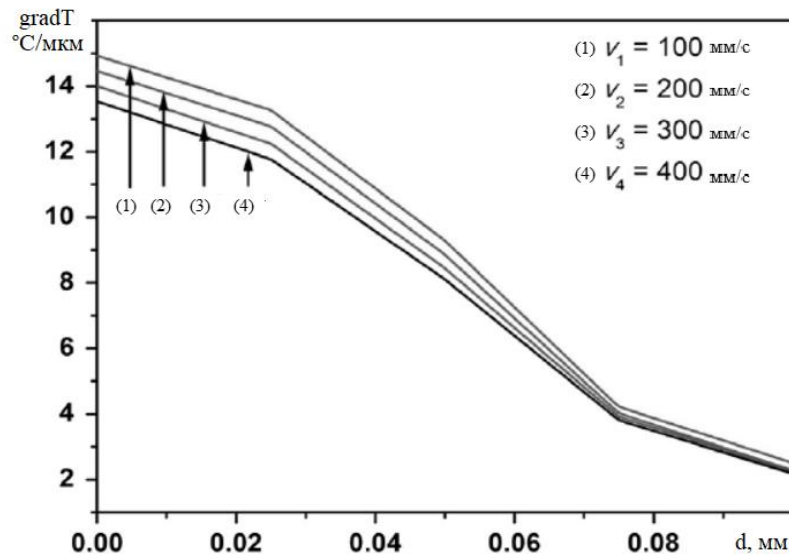


Рис. 3. Влияние скорости сканирования  $v$  на градиент температуры по глубине ванны  $d$

Тепломассоперенос в ванне расплава зависит от распределения мощности излучения в лазере (рис. 2 б), скорости сканирования, расхода порошка и сил Марангони на свободной поверхности. Он формирует геометрию наплавленного слоя, а следовательно, и теплоотвод в зоне кристаллизации (рис. 3).

При этом центр ванны расплава с максимальной температурой отстает от центра лазерного пятна. Показано влияние сил Марангони, давления «отскока» на свободной поверхности и параметра Грасгофа на структуру конвективного процесса в ванне расплава и захват газа с формированием пористости (рис. 4). Варьирование основными параметрами процесса (интенсивность мощности лазерного источника, скорость сканирования и массовый расход порошка) приводит к значительному изменению структуры конвективного теплопереноса, а следовательно, и геометрических размеров, получаемых микроструктур и механических и адгезионных свойств наплавленного слоя. Более высокие скорости сканирования и охлаждения приводят к более мелкой структуре зерен

в наплавленном слое. Полученные результаты дают возможность разрабатывать практические рекомендации по реализации оптимальных режимов воздействия и контроля структуры наплавленного материала.

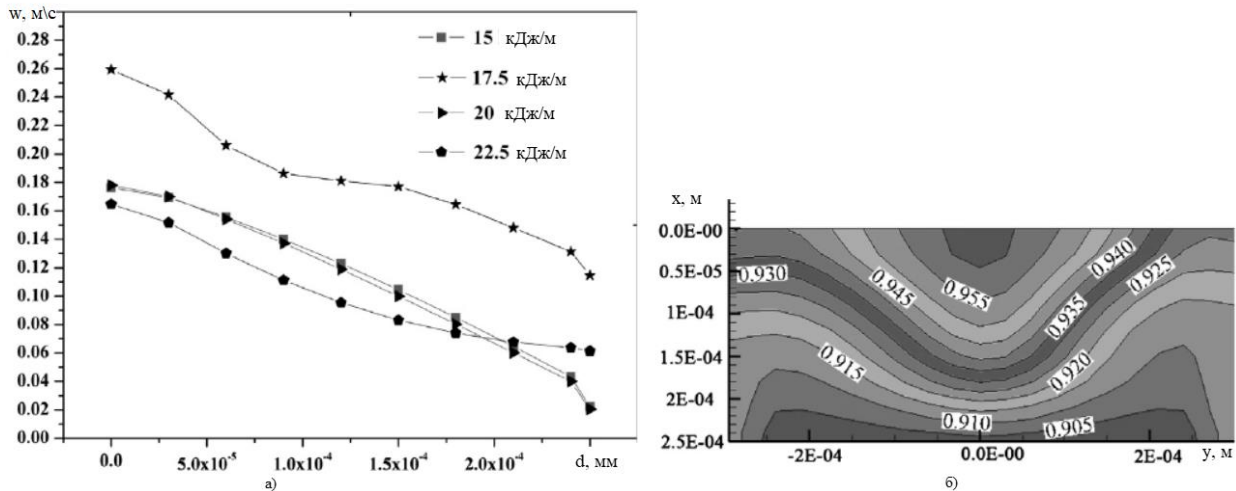


Рис. 4 а) скорость движения газового пузыря  $w$  в ванне расплава в функции от интенсивности мощности луча лазера; б) распределение относительной плотности ( $\rho_l / \rho_s$ ) расплава алюминия в ванне при интенсивности лазера 15 кДж/м

Численный распараллеленный алгоритм решения задачи основан на методе смешанных конечных элементов с сеточным согласованием аппроксимации основных переменных задачи по LBV условию и использованием подсеточных функций Хьюджа для конвективных членов. В подобластях расчетной области с максимальными градиентами температуры и в окрестности свободной поверхности расплава шаг сетки адаптировался с наибольшим уменьшением шага в 15 раз.

Валидация и верификация математической модели и численного алгоритма производились путем сравнения с известными асимптотическими решениями по слиянию двух вязких капель, растеканию капли на плоской поверхности и шаре с учетом гистерезиса контактных углов смачивания и сравнения с известными численными и экспериментальными исследованиями на последовательности сгущающихся сеток.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Государственного задания Вычислительного центра ХФИЦ.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bäuerle D. *Laser Processing and Chemistry: Fourth Edition*. – Springer, 2011.
2. Thompson S.M. *An overview of Direct Laser Deposition for additive manufacturing; Part I: Transport phenomena, modeling and diagnostics*. Additive Manufacturing, 2015. С. 36-62.



## УПРУГИЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ: НЕОТРАЖАЮЩИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

*В. А. Гордин<sup>1,2,a</sup>, А. А. Шемендюк<sup>1,3,b</sup>*

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»,  
факультет экономических наук, департамент математики;*

<sup>2</sup> *ФГБУ Гидрометцентр России;*

<sup>3</sup> *University of Lausanne, HEC, Department of Actuarial Science;*

<sup>a</sup>*vagordin@mail.ru*

<sup>b</sup>*aleksandr.shemendyuk@unil.ch*

Уравнение упругих поперечных колебаний стержня

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - R^2 \rho \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + ER^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = f(t, x) \quad (1)$$

не разрешено относительно старшей производной по времени. Здесь  $\rho$  – плотность стержня,  $R$  – радиус поперечного сечения,  $E$  – модуль Юнга,  $t$  – время,  $x$  – пространственная переменная,  $u := u(t, x)$  – неизвестная амплитуда поперечных колебаний стержня,  $f(t, x)$  – внешний источник колебаний.

Корректность смешанной краевой задачи требует по два граничных условия на каждом краю. Для простейшей неявной схемы Кранка – Николсон, аппроксимирующей уравнение (1), построены граничные условия, обеспечивающие уход колебаний стержня через границы почти без отражений. Такие граничные условия существенно не локальны по времени. Их построение базируется на применении обобщенной рациональной аппроксимации Паде – Эрмита для аппроксимации символов соответствующих разностных операторов на шаблонах, составленных из сравнительно небольшого числа узлов сетки. На рис. 1 приведены результаты численных экспериментов для одного из вариантов прозрачных граничных условий по сравнению с классическими в этой задаче граничными условиями, которые не обеспечивают отражение выходящих из вычислительной области волн. Подробнее о граничных условиях полного поглощения, устойчивости решения и алгоритме построения см. [1] и <https://cs.hse.ru/mmsg/transbounds>.

Для нахождения решения уравнения (1) с высокой точностью построены три компактные схемы, использующие три слоя по времени и пять точек по пространству:

$$\begin{aligned}
& u_0^\tau + u_0^{-\tau} + a(u_{-h}^\tau + u_{-h}^{-\tau} + u_h^\tau + u_h^{-\tau}) + bu_0^0 + c(u_{-h}^0 + u_h^0) + d(u_{-2h}^0 + u_{2h}^0) \\
& + e(u_{-2h}^\tau + u_{-2h}^{-\tau} + u_{2h}^\tau + u_{2h}^{-\tau}) \\
& = r_1(f_0^\tau + f_0^{-\tau}) + q_1(f_{-h}^\tau + f_{-h}^{-\tau} + f_h^\tau + f_h^{-\tau}) + r_0 f_0^0 \\
& + q_0(f_{-h}^0 + f_h^0) + p_0(f_{-2h}^0 + f_{2h}^0) + p_1(f_{-2h}^\tau + f_{-2h}^{-\tau} + f_{2h}^\tau + f_{2h}^{-\tau}),
\end{aligned}$$

где нижний индекс при функциях  $u$  и  $f$  обозначает пространственный сдвиг на шаг  $h > 0$  от центральной точки, а верхний – на шаг по времени  $\tau > 0$ ; коэффициенты схемы представлены в табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты схемы Кранка – Николсона и трех компактных схем.  
Здесь безразмерные параметры  $\nu = ER^2/\rho \cdot \tau^2/h^4$  и  $\mu = R^2/h^2$

	Кранк – Николсон	3-5-3	5-5-5	5-5-5 оптимальная
$a$	$-(2\nu + \mu)/\alpha$	$24(1 - 6\mu)/\alpha$	$96(7 - 15\nu - 30\mu)/\alpha$	$(1488 - 2880\nu - 5760\mu)/\alpha$
$b$	$-(2 + 4\mu)/\alpha$	$-96(2 - 9\nu + 6\mu)/\alpha$	$-144(41 - 150\nu + 90\mu)/\alpha$	$(-11376 + 43200\nu - 25920\mu)/\alpha$
$c$	$2\mu/\alpha$	$-48(1 + 12\nu - 6\mu)/\alpha$	$-192(7 + 75\nu - 30\mu)/\alpha$	$(-2976 - 28800\nu + 11520\mu)/\alpha$
$d$		$144\nu/\alpha$	$-24(1 - 150\nu - 30\mu)/\alpha$	$(24 + 7200\nu + 1440\mu)/\alpha$
$e$	$\nu/2\alpha$		$12(1 + 30\nu - 30\mu)/\alpha$	$(-12 + 720\nu - 720\mu)/\alpha$
$p_0$		$-10\tau^2(\nu - \mu)/\alpha$	$10\tau^2/\alpha$	$-10\tau^2/\alpha$
$q_0$		$20\tau^2(1 + 2\nu - 2\mu)/\alpha$	$560\tau^2/\alpha$	$1240\tau^2/\alpha$
$r_0$		$20\tau^2(4 - 3\nu + 3\mu)/\alpha$	$2460\tau^2/\alpha$	$4740\tau^2/\alpha$
$p_1$		$-\tau^2(\nu - \mu)/\alpha$	$\tau^2/\alpha$	$-\tau^2/\alpha$
$q_1$		$2\tau^2(1 + 2\nu - 2\mu)/\alpha$	$56\tau^2/\alpha$	$124\tau^2/\alpha$
$r_1$	$\tau^2/2\alpha$	$2\tau^2(4 - 3\nu + 3\mu)/\alpha$	$246\tau^2/\alpha$	$474\tau^2/\alpha$
$\alpha$	$1 + 3\nu + 2\mu$	$96(1 + 3\mu)$	$72(41 + 30\nu + 90\mu)$	$72(79 + 60\nu + 180\mu)$

При схожем количестве арифметических операций на каждом шагу по времени компактные схемы демонстрируют 4–5 порядок точности для периодической задачи, что по крайней мере на два порядка больше по сравнению со 2-м порядком схемы Кранка – Николсона. Далее, мы строим компактную аппроксимацию для граничного условия «заземленный конец», т.е.  $u(t, 0) = \partial_x u(t, 0) = 0$ , и демонстрируем серьезное преимущество полученного метода по сравнению с классической аппроксимацией  $u(t, 0) = u(t, h) = 0$ , см (рис. 2).



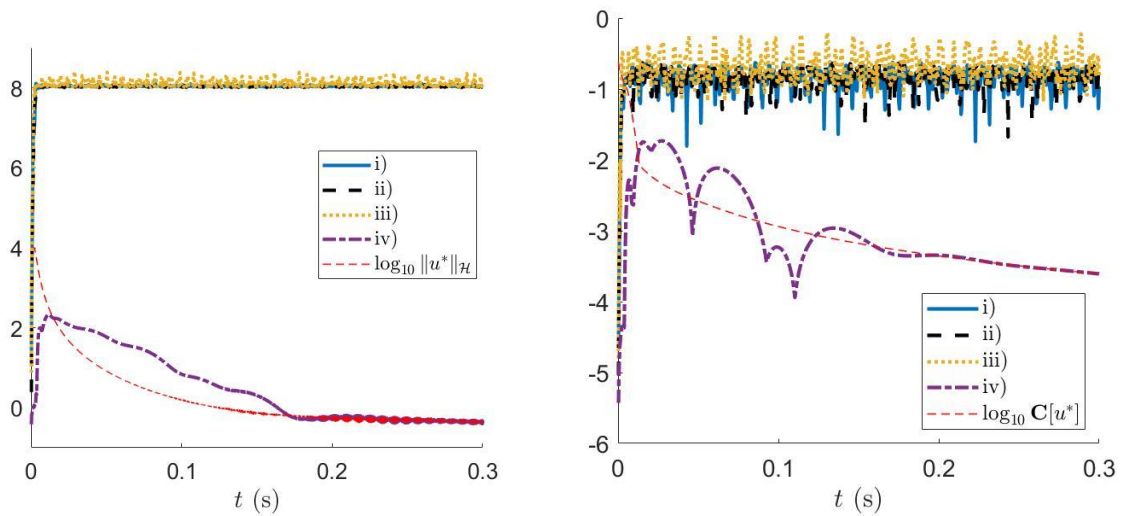


Рис. 1. Десятичный логарифм полной энергии  $\mathcal{H}$  (слева) и  $C$ -нормы (справа) разности полученного и точного  $u^*$  решений при классических граничных условиях: i) заземленный конец; ii) шарнирно-опертый конец; iii) свободный конец; iv) прозрачные граничные условия

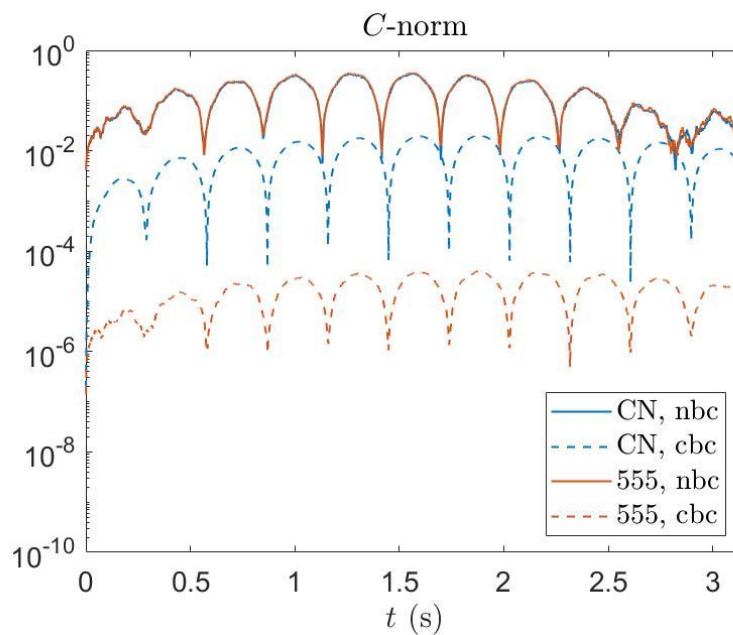


Рис. 2. Логарифм  $C$ -нормы разности полученного и точного решений смешанной краевой задачи с заземленным стержнем с обоих краев. Здесь CN – схема Кранка – Николсона; 555 – компактная схема для уравнения (1), использующая пять пространственных точек и три слоя по времени. Сплошная линия (nbc) – наивная аппроксимация граничного условия «заземленный конец»; пунктирная линия (cbc) – компактная аппроксимация

## ЛИТЕРАТУРА

- Gordin V.A., Shemendyuk A.A. *Discrete transparent boundary conditions for the equation of rod transverse vibrations*. Applied Mathematical Modelling. 2020. Vol. 88. P. 550-572.

## МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Г. Л. Горынин<sup>1, a</sup>, С. К. Голушко<sup>2, 3, b</sup>, А. Г. Горынин<sup>2, c</sup>

<sup>1</sup>Сургутский государственный университет

<sup>2</sup>Новосибирский государственный университет

<sup>3</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск

<sup>a</sup>ggorynin@list.ru, <sup>b</sup>s.k.golushko@gmail.com, <sup>c</sup>a.gorynin@g.nsu.ru

Доклад посвящен применению метода асимптотического расщепления для расчета тонкостенных стержней различных профилей. Ранее метод был успешно применен для построения общей теории расчета композитных стержней произвольного профиля, вне зависимости от толщины стенок и типа сечения [1–3]. Однако значительный интерес представляет рассмотрение тонкостенных стержней открытого и замкнутого профилей в силу широкого распространения таких стержней в инженерной практике.

Решение задачи о пространственном деформировании тонкостенного стержня получено путем расщепления задачи по продольной координате без введения каких-либо гипотез о распределении напряжений или перемещений в сечении. Общий случай деформирования стержня включает в себя четыре аппроксимации: продольное растяжение-сжатие, изгиб в двух перпендикулярных плоскостях и кручение стержня.

Для нахождения механических и геометрических свойств поперечных сечений решены двумерные краевые задачи с помощью метода конечных элементов, реализованного средствами пакета с открытым исходным кодом FEniCS Project. Геометрия поперечного сечения и его сетка созданы отдельно средствами генератора сеток Gmsh.

Получены разрешающие системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающие общий случай деформирования стержня. Произведено сравнение полученных результатов с численными решениями трехмерной задачи теории упругости и с решениями, полученными на основе других стержневых теорий строительной механики.

*Работа выполнена в рамках реализации Программы Центра НТИ НГУ «Моделирование и разработка новых функциональных материалов с заданными свойствами».*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления.* Новосибирск: Наука. 2004.

2. Gorynin G., Nemirovsky Yu. *Deformation of Laminated Anisotropic Bars in the Three-dimensional Statement 1. Transverse-longitudinal Bending and Edge Compatibility Condition*. Mechanics of Composite Materials. 2009. Vol. 45. No 3. P. 257-280.

3. Голушко С.К., Горынин Г.Л., Горынин А.Г. *Метод асимптотического расщепления в динамических задачах пространственной теории упругости*. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование, Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 188. С. 43-53.

## МЕТОД АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА ОДНОРОДНЫХ И КОМПОЗИТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Г. Горынин<sup>1, a</sup>, С. К. Голушко<sup>1,2, b</sup>, Г. Л. Горынин<sup>3, c</sup>

<sup>1</sup>Новосибирский государственный университет, Новосибирск

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий, Новосибирск

<sup>3</sup>Сургутский государственный университет, Сургут

<sup>a</sup>a.gorynin@g.nsu.ru, <sup>b</sup>s.k.golushko@gmail.com, <sup>c</sup>ggorynin@list.ru

Доклад посвящен применению метода асимптотического расщепления для решения статических задач деформирования однородных изотропных и композитных цилиндрических оболочек. Ранее метод успешно применялся для решения задач деформирования композитных балок и пластин [1–3], однако возможности метода применительно к оболочкам вращения до сих пор не были исследованы.

Рассмотрена задача упругого деформирования композитной цилиндрической оболочки под действием осесимметричной нагрузки. Решение построено путем разложения компонент тензора напряжений и вектора перемещений по степеням дифференциальных операторов, действующих вдоль оси цилиндра. При этом малым параметром выступает отношение толщины оболочки к длине цилиндра. В результате решение исходной двумерной задачи сведено к последовательному решению одномерных задач, которые в свою очередь допускают аналитическое решение. В случае, когда получение аналитического решения затруднено, краевые задачи по толщине стенки цилиндра решены численно с использованием конечно-элементного пакета с открытым исходным кодом FEniCS Project.

Получена разрешающая система уравнений деформирования цилиндрической оболочки. Показано, что разработанная методика расчета позволяет восстанавливать все компоненты тензора напряжений как для толстостенных, так и для тонких цилиндрических оболочек, а также позволяет учитывать краевые эффекты, возникающие в местах крепления оболочки. Произведено сравнение полученных аналитических и численных решений с конечно-элементным решением исходной осесимметричной задачи.

*Работа выполнена в рамках реализации Программы Центра НТИ НГУ «Моделирование и разработка новых функциональных материалов с заданными свойствами».*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления.* Новосибирск: Наука, 2004. 408 с.

2. Gorynin G., Nemirovsky Yu. *Deformation of Laminated Anisotropic Bars in the Three-dimensional Statement 1. Transverse-longitudinal Bending and Edge Compatibility Condition*. Mechanics of Composite Materials. 2009. Vol. 45. No 3. P. 257-280.

3. Голушко С.К., Горынин Г.Л., Горынин А.Г. *Метод асимптотического расщепления в динамических задачах пространственной теории упругости*. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование, Итоги науки и техники. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. 2020. Т. 188. С. 43-53.

## ПРИМЕНЕНИЕ БЫСТРОЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕНИЯХ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БРУСЕ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В. В. Горяйнов<sup>1, а</sup>, А. Д. Чернышов<sup>2, б</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный технический университет;

<sup>а</sup>gorvit77@mail.ru

<sup>2</sup>Воронежский государственный университет инженерных технологий;

<sup>б</sup>chernyshovad@mail.ru

В данной работе представим решение задачи о напряжениях в бруске со смешанными граничными условиями методом быстрых разложений [1], коэффициенты которых будем определять с помощью быстрой тригонометрической интерполяции.

В условиях плоской деформации проекции вектора перемещений материальных точек бруска зависят только от координат  $x, y$ :

$$U = U(x, y), \quad V = V(x, y), \quad W = 0. \quad (1)$$

Запишем уравнения равновесия Ламе для перемещений с учетом массовых сил  $X(x, y), Y(x, y)$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + X(x, y) = 0, \quad (2)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + Y(x, y) = 0. \quad (3)$$

К уравнениям (2), (3) добавим граничные условия. Будем считать, что упругий брусок имеет прямоугольное сечение  $\Omega = (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$ . На сторонах бруска зададим смешанные граничные условия – на сторонах  $x = 0$ ,  $x = a$  и  $y = b$  зададим напряжения в виде

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x=0} = F_1(y), \quad \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \Phi_1(y), \quad (4)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial U}{\partial x} + \lambda \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_{x=a} = F_2(y), \quad \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{x=a} = \Phi_2(y). \quad (5)$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial V}{\partial y} + \lambda \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{y=b} = F_3(x), \quad \mu \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \Big|_{y=b} = \Phi_3(x), \quad (6)$$

а на стороне  $y = 0$  зададим перемещения

$$U \Big|_{y=0} = g_1(x), \quad V \Big|_{y=0} = g_2(x). \quad (7)$$

Функции, входящие в граничные условия (4)–(7), следует подбирать с учетом условий согласования  $\Phi_3(0) = \Phi_1(b)$ ,  $\Phi_3(a) = \Phi_2(b)$ , выполнение которых позволит найти непрерывное решение краевой задачи (2)–(7).

Для решения будем использовать приближенный аналитический метод быстрых синус-разложений [1], в соответствии с которым представим  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  в виде суммы граничных функции 6-го порядка и ряда Фурье по синусам

$$U = \sum_{i=1}^8 A_i(x) P_i(y) + \sum_{m=1}^{N_1} u_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b}, \quad x \in [0; a], \quad y \in [0; b],$$

$$V = \sum_{i=1}^8 B_i(x) P_i(y) + \sum_{m=1}^{N_1} v_m(x) \sin m\pi \frac{y}{b}, \quad (U, V) \in C^{(6)}(\Omega).$$
(8)

Здесь  $N_1$  – число учитываемых членов в рядах Фурье,  $A_i(x)$  и  $B_i(x)$ ,  $i = 1 \div 8$  коэффициенты граничных функций,  $P_i(y)$ ,  $i = 1 \div 8$  – быстрые полиномы [1].

Неизвестные функции  $A_i(x)$ ,  $B_i(x)$ ,  $i = 1 \div 8$  и  $u_m(x)$ ,  $v_m(x)$ ,  $m = 1 \dots N_1$  представим быстрыми разложениями по переменной  $x$ . В повторных разложениях будем использовать граничные функции тех же порядков, что и в быстрых разложениях (8) по переменной  $y$ :

$$A_i(x) = \sum_{k=1}^8 a_k^{(i)} P_k(x) + \sum_{n=1}^{N_2} a_{n+8}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a}, \quad B_i(x) = \sum_{k=1}^8 b_k^{(i)} P_k(x) + \sum_{n=1}^{N_2} b_{n+8}^{(i)} \sin n\pi \frac{x}{a},$$

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^8 u_k^{(m)} P_k(x) + \sum_{n=1}^{N_2} u_{n+8}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a}, \quad v_m(x) = \sum_{k=1}^8 v_k^{(m)} P_k(x) + \sum_{n=1}^{N_2} v_{n+8}^{(m)} \sin n\pi \frac{x}{a},$$

$$i = 1 \dots 8, \quad m = 1 \dots N_1.$$
(9)

В (9) обозначено через  $N_2$  – число учитываемых членов в рядах Фурье,  $a_k^{(i)}$ ,  $b_k^{(i)}$ ,  $u_k^{(m)}$  и  $v_k^{(m)}$ ,  $i = 1 \dots 8$ ,  $m = 1 \div N_1$  – коэффициенты граничных функций вторичных разложений;  $P_k(x)$ ,  $k = 1 \div 8$  – быстрые полиномы [1].

Таким образом, краевая задача (2)–(7) сведена к определению  $2(8 + N_1)(8 + N_2)$  неизвестных коэффициентов

$$a_k^{(i)}, b_k^{(i)}, u_k^{(m)}, v_k^{(m)}, i = 1 \dots 8, k = 1 \dots 8, m = 1 \dots N_1, a_{n+8}^{(i)}, b_{n+8}^{(i)}, u_{n+8}^{(m)}, v_{n+8}^{(m)}, n = 1 \dots N_2. \quad (10)$$

При задании граничных условий (4)–(7) четыре коэффициента  $a_1^{(1)}, b_1^{(1)}, a_2^{(1)}, b_2^{(1)}$  найдем с помощью значений компонент перемещений  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  в угловых точках  $(0, 0)$  и  $(a, 0)$ :

$$a_1^{(1)} = b_1^{(1)} = a_2^{(1)} = b_2^{(1)} = 0.$$

Для нахождения остальных  $(2(8 + N_1)(8 + N_2) - 4)$  коэффициентов из (10) используем быструю тригонометрическую интерполяцию, апробированную в работах [2, 3]. Для этого подставим  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (8) в дифференциальные уравнения (2), (3) и граничные условия (4)–(7). Далее промежуток  $[0, b]$  равномерно разобьем точками  $y = y_s = sb / (N_1 + 8)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 8$

на  $N_1 + 8$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (4), (5) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (8), в каждой внутренней расчетной точке  $y = y_s$ ,  $s = 1, \dots, N_1 + 7$ . Аналогично, промежуток  $[0, a]$  равномерно разобьем точками  $x = x_s = sa / (N_2 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 7$  на  $N_2 + 7$  отрезков и запишем уравнения, полученные из граничных условий (6), (7) при подстановке  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (8), в каждой внутренней расчетной точке  $x = x_s$ ,  $s = 1, \dots, N_2 + 6$ . Затем, на область прямоугольника  $x \in [0; a]$ ,  $y \in [0; b]$  равномерно нанесем сетку в  $N_2 + 8$  точках  $x = x_s = sa / (N_2 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_2 + 7$  и в  $N_1 + 8$  точках  $y = y_s = sb / (N_1 + 7)$ ,  $s = 0, 1, \dots, N_1 + 7$ . Для составления системы линейных алгебраических уравнений используются только внутренние точки, образующие сетку из  $(N_1 + 6)(N_2 + 6)$  внутренних точек  $(x_s, y_s)$ . Затем, уравнения (2), (3) при подстановке в них  $U = U(x, y)$  и  $V = V(x, y)$  из (8) запишем в каждой расчетной точке  $(x_s, y_s)$ . В результате приходим к замкнутой системе  $2(N_1 + 6)(N_2 + 6) + 4(N_1 + 7) + 4(N_2 + 6)$  линейных алгебраических уравнений относительно оставшихся  $(2(8 + N_1)(8 + N_2) - 4)$  неизвестных из (10). Данная система уравнений решена в среде Maple. После чего найденные неизвестные (10) подставлены в быстрые разложения (8). Тем самым построено приближенное аналитическое решение краевой задачи (2)–(7).

При изучении свойств поля напряжений представляет интерес расположение точки с наибольшим значением интенсивности напряжений  $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\left( (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy})^2 \right) / 2}.$$

В вычислительных экспериментах соотношение сторон прямоугольника подбиралось таким образом, чтобы площадь сечения бруса оставалась постоянной. Выяснилось, что среди всех прямоугольных сечений с различными габаритными размерами (но одинаковой площадью сечений) наименьшее значение  $\tilde{\sigma}_{\max}$  наблюдается в брус с квадратным сечением.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Чернышов А.Д. *Метод быстрых разложений для решения нелинейных дифференциальных уравнений*. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54. № 1. С. 13-24.
2. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Danshin A.A. *Analysis of the stress field in a wedge using the fast expansions with pointwise determined coefficients*. IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. 2018. 973. 012002.
3. Горяйнов В.В. *Анализ погрешности быстрых рядов Фурье при их многократном дифференцировании для случая вычисления коэффициентов ряда поточечным методом*. Вестник Воронежского государственного технического университета. 2011. Т. 7. № 2. С. 36-40.



## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ РОСТА ТРЕЩИН ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА В ХРУПКИХ ГЕТЕРОГЕННЫХ МАТЕРИАЛАХ

А. С. Григорьев<sup>1, a</sup>, Е. В. Шилько<sup>1, b</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;

<sup>a</sup>grigoriev@ispms.ru; <sup>b</sup>shilko@ispms.ru

Хрупкие материалы зачастую обладают гетерогенной внутренней структурой, в которой присутствуют различного рода дефекты и несплошности различного масштаба (микротрещины, поры, границы зерен), что во многом определяет их механическое поведение, включая характер разрушения. В частности, такие особенности структуры способны многократно замедлять рост трещины и даже изменять режим роста от непрерывного к дискретному и тем самым качественно изменять макроскопическую вязкость разрушения [1-4]. Поэтому одним из актуальных направлений в механике разрушения является исследование влияния многомасштабной системы несплошностей структуры на динамику процесса роста трещины. Классический подход к анализу динамического роста трещин в хрупких материалах базируется на использовании линейной механики разрушения, которая не учитывает многомасштабную гетерогенность структуры материала. Для более детального описания поведения материала вблизи вершины трещины, где законы линейной механики не применимы, применяются более общие континуальные модели или различные модификации модели когезионной зоны. Такие модели, как правило, оперируют пространственными параметрами (ширина когезионной зоны, размер зоны предразрушения в нелокальных критериях разрушения, характерные размеры структурных элементов и т.д.), которые эффективно характеризуют или определяют размеры области инкубации разрушения. При этом интерпретация подобных параметров всегда является дискуссионным вопросом ввиду сложности экспериментальных исследований этой области.

Перспективной альтернативой такому подходу являются динамические модели, основанные на принципах структурно-кинетической (физической) теории прочности. Ключевым параметром данной теории является время инкубации разрушения, которое интегрально характеризует процесс разрушения материала на рассматриваемом пространственном масштабе. Время инкубации разрушения является структурно зависимым параметром, поскольку учитывает интегральный эффект сложных процессов зарождения несплошностей на более низких масштабах и их объединения в трещину рассматриваемого масштаба. Ранее авторами была предложена математическая модель разрушения хрупких материалов, основанная на таком структурно-кинетическом подходе и реализованная в рамках численного метода однородно деформируемых дискретных элементов [5-8]. В представленной работе эта модель применена для исследования динамики процесса роста трещины сдвига

в хрупких гетерогенных материалах с различной степенью неоднородности внутренней структуры.

Моделировался процесс распространения трещины продольного сдвига на низкопрочной прямолинейной границе раздела двух высокопрочных блоков с одинаковыми физико-механическими характеристиками. Исследование проводилось в двумерной постановке в приближении плоскодеформированного состояния. Сложность гетерогенной внутренней структуры материала учитывалась эффективно через изменение ключевого параметра модели – времени инкубации разрушения.

Результаты исследования показали, что среднее значение скорости  $V_c$  модельной трещины, распространяющейся в «однородном» материале (с низкой степенью гетерогенности структуры) в установившемся режиме, близко к теоретически определенному верхнему пределу (скорости волны Рэлея  $V_R$  в материале блоков):  $V_c/V_R \approx 0,85$ . Близкие к единице значения  $V_c/V_R$  традиционно наблюдаются для сдвиговых трещин в беспористых материалах с высокой степенью однородности структуры [9].

Увеличение степени неоднородности внутренней структуры материала приводит к уменьшению скорости роста трещины по логарифмическому закону. Более того, уменьшается стабильность роста трещины. При высоких значениях времени инкубации разрушения (характерных для материалов с высокой степенью гетерогенности структуры) режим распространения трещины изменяется от непрерывному к скачкообразному: рост трещины периодически останавливается, после чего быстро ускоряется до скоростей порядка 10-20 % от характерной скорости волны Рэлея. Подобное поведение наблюдается и в экспериментальных исследованиях хрупких материалов с сильно неоднородной структурой [1].

Ключевым результатом исследований является оценка размеров области, в которой происходит инкубация разрушения. Показано, что размер области инкубации разрушения не является константой на протяжении всего процесса роста трещины, а динамика его изменения, как и абсолютное значение, зависит от степени неоднородности структуры материала. Действительно, динамика роста трещины определяется инкубационными процессами в вершине трещины и ее окрестностях, которые традиционно ассоциируются с зоной подготовки разрушения. Информация о ширине данной зоны и ее связи со скоростью роста трещины важна для определения параметров моделей когезионной зоны или структурных параметров нелинейных моделей динамического разрушения. В настоящей работе текущая ширина когезионной зоны определялась как длина участка интерфейса впереди вершины трещины, в которой в данный момент происходит инкубация разрушения (согласно используемому критерию разрушения). Результаты моделирования свидетельствуют о том, что средняя ширина зоны подготовки разрушения систематически возрастает с увеличением степени неоднородности внутренней структуры материала.

Учет конечного времени подготовки разрушения, особенно в задачах, связанных с зарождением, формированием и ростом трещины, позволяет

эффективно описать процессы, происходящие на масштабах гетерогенной внутренней структуры материала. Полученные результаты исследования дают понимание физических особенностей процесса роста трещины сдвига, а оценки ширины зоны подготовки разрушения и динамики ее изменения могут быть использованы для анализа процесса роста трещины с использованием традиционных моделей когезионной зоны и их аналогов.

*Исследования выполнены в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2021-0002.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Albertini G., Lebihain M., Hild F. et al. *Effective toughness of heterogeneous materials with rate-dependent fracture energy*. Physical Review Letters. 2021. V. 127. P. 035501.
2. Lebihain M., Leblond J.-B., Ponson L. *Effective toughness of periodic heterogeneous materials: the effect of out-of-plane excursions of cracks*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2020. V. 137. P. 103876.
3. Hossain M.Z., Hsueh C.J., Bourdin B. et al. *Effective toughness of heterogeneous media*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2014. V. 71. P. 15.
4. Wang N., Xia S. *Cohesive fracture of elastically heterogeneous materials: An integrative modeling and experimental study*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2017. V. 98. P. 87.
5. Grigoriev A.S., Shilko E.V., Skripnyak V.A. et al. *Kinetic approach to the development of computational dynamic models for brittle solids*. International Journal of Impact Engineering. 2019. V. 123. P. 14-25.
6. Grigoriev A.S., Zabolotskiy A.V., Shilko E.V. et al. *Analysis of the quasi-static and dynamic fracture of the silica refractory using the mesoscale discrete element modeling*. Materials. 2021. V. 14. P. 73-76.
7. Psakhie S.G., Shilko E.V., Grigoriev A.S. et al. *A mathematical model of particle–particle interaction for discrete element based modeling of deformation and fracture of heterogeneous elastic–plastic materials*. Engineering Fracture Mechanics. 2014. V. 130. P. 96-115.
8. Shilko E.V., Psakhie S.G., Schmauder S. et al. *Overcoming the limitations of distinct element method for multiscale modeling of materials with multimodal internal structure*. Computational Material Science. 2015. V. 102. P. 267-285.
9. Svetlizky I., Kammer D.S., Bayart E. et al. *Brittle fracture theory predicts the equation of motion of frictional rupture fronts*. Physical Review Letters. 2017. V. 118. P. 125501.

## РАЗРАБОТКА МОЛЕКУЛЯРНО-ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МНОГОСЛОЙНОГО ПОКРЫТИЯ СИСТЕМЫ TiAlTaSiN

*А. И. Дмитриев<sup>1, а</sup>, С. О. Огнев<sup>2</sup>, Ю. М. Коротеев<sup>1</sup>, А. Ю. Никонов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский Томский политехнический университет,  
Томск; <sup>а</sup>dmitr@ispms.ru*

Среди большого многообразия защитных покрытий наибольшее распространение получили покрытия на основе нитридов переходных металлов. На сегодняшний день наиболее перспективными являются покрытия TiAlN, легированные дополнительными химическими элементами, а также многослойные композиции, свойства которых эффективно дополняют друг друга. Как показали недавние исследования [1], одним из наиболее перспективных легирующих элементов является Ta, который позволяет не только существенно увеличить трещиностойкость покрытий, но и повысить температуру образования в них фазы вюрцита, что обеспечивает сохранение высокой твердости покрытий при повышенных температурах. Тем не менее и у таких покрытий есть определенные недостатки, например образование столбчатых кристаллов. Принимая во внимание имеющиеся данные, перспективным направлением улучшения свойств покрытий на основе Ti-Al-N является одновременное введение Ta и Si, что позволит создать покрытия, обладающие комбинацией улучшенных свойств, характерных для композиций  $Ti_{1-x-y}Al_xTa_yN$  и  $Ti_{1-x-y}Al_xSi_yN$ .

Наряду с экспериментальными исследованиями задача получения и изучения механических свойств новых многокомпонентных покрытий может быть существенно ускорена путем проведения компьютерного моделирования. Одной из ключевых задач построения компьютерной модели является определение функции взаимодействия между структурными элементами моделируемой системы. В настоящей работе на основе теории функционала электронной плотности были рассчитаны потенциалы межатомного взаимодействия между атомами Si-Ti, Si-Al, Si-Ta и Si-N. Полученные зависимости приведены на рис. 1 а.

Согласно представленным результатам наибольшая энергия связи наблюдается для пар Si-N (7.205 эВ) и Si-Ta (6.974 эВ). Потенциалы взаимодействия этих пар очень близки друг другу по форме, а их отличие заключается в различных положениях минимума. Длина связи Si-Ta примерно на 0,6 Å больше длины связи Si-N. Наименьшая энергия связи наблюдается для пары Si-Al (3.322 эВ), при этом потенциал взаимодействия этих атомов наиболее пологий из всех рассмотренных на расстояниях, превышающих равновесные. Таким образом, связь Si-Al является наиболее мягкой и слабой из всех рассмотренных. Это коррелирует с результатами псевдопотенциального расчета энергии связи кремния на поверхностях (001), (110) и на метал-

лическом окончании поверхности (111) пленок MeN, согласно которым взаимодействие кремния с атомами алюминия характеризуется наименьшими энергиями связи.

Рассчитанные потенциалы были использованы для построения модели многокомпонентного покрытия Ti-Al-Ta-Si-N в рамках классического метода молекулярной динамики. Моделируемый кристаллит представлял собой куб со стороной 82,5 Å, что соответствовало 20 параметрам кубической решетки вдоль направлений (100), (010) и (001) (рис. 1 б). В качестве базового выбирался следующий состав покрытия: Ti-20 ат.%, Al- 25 ат.%, Si- 2,5 ат.%, Ta- 2,5 ат.% и N- 50 ат.%. Анализировалась устойчивость построенной модели покрытия к различным термомеханическим воздействиям. В последующей серии расчетов варьировалась концентрация легирующих включений многокомпонентного покрытия Ti-Al-Ta-Si-N с целью прогнозирования его оптимального состава и структуры. Все вычисления проводились с использованием программного пакета LAMMPS.

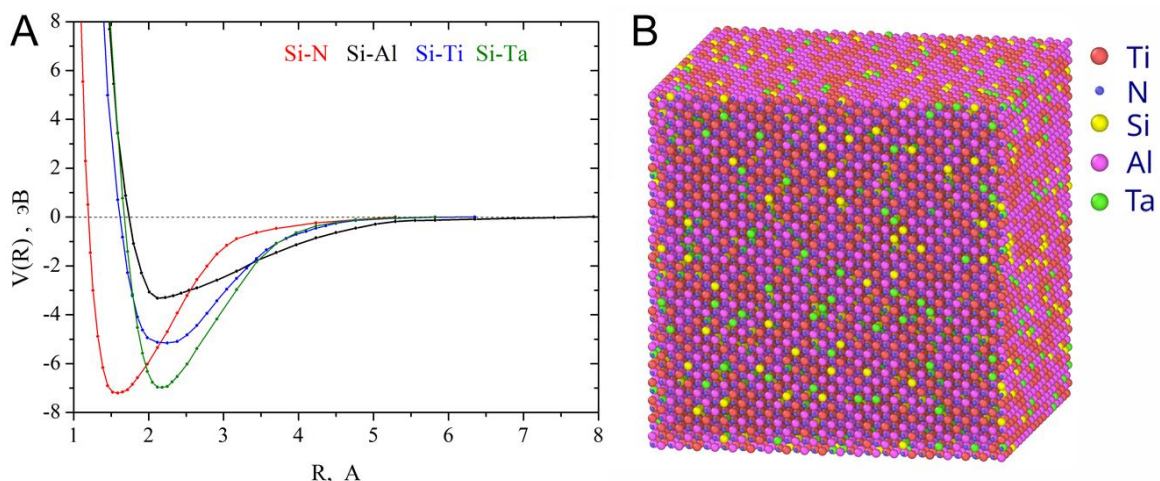


Рис. 1. А – рассчитанные парные потенциалы межатомного взаимодействия; В – структура моделируемого кристаллита многокомпонентного покрытия

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-19-00441, <https://rscf.ru/project/22-19-00441>).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yang Y., Xu Y.X., Chen L., Mayrhofer P.H. *Improved Ti-Al-N coatings through Ta alloying and multilayer architecture*. Surf. Coat. Technol. 2017. V. 328. P. 428-435.

# РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ РАЗНОМОДУЛЬНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ОТРАЖЕНИЙ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

О. В. Дудко<sup>1,a</sup>, А. А. Лантева<sup>1,b</sup>, В. Е. Рагозина<sup>1,c</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматизации и процессов управления ДВО РАН, Владивосток

<sup>a</sup> [dudko@iacp.dvo.ru](mailto:dudko@iacp.dvo.ru); <sup>b</sup> [lanastal@mail.ru](mailto:lanastal@mail.ru); <sup>c</sup> [ragozina@vlc.ru](mailto:ragozina@vlc.ru)

В работе развивается один из приближенно-аналитических подходов к построению обобщенных решений нестационарных краевых задач одномерной динамики упругого деформирования разномодульных материалов с учетом эффектов взаимодействия и отражения нелинейных волн деформаций. Объектом исследования являются разномодульные упругие среды с различным сопротивлением растяжению и сжатию, к которым можно отнести горные породы, древесину, различные композиты, сплавы и т.д.

Для описания механических свойств разномодульного материала принимаем тензорно-линейный вариант модели [1] с неаналитической формой физической нелинейности. В одномерном случае малых деформаций разномодульной упругой среды [1] уравнение движения для продольного перемещения  $u(x, t)$  имеет вид

$$(c(e))^2 u_{xx} = \ddot{u}, \quad c(e) = \begin{cases} a & \text{при } e < 0, \\ b & \text{при } e > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где характеристическая скорость  $c(e)$  является кусочно-постоянной функцией деформации  $e = \partial u / \partial x$ , значения  $a, b$  вычисляются через плотность и упругие модули среды [1], в число которых входит константа разномодульности. Для определенности считаем, что  $a > b$ .

В случаях, когда краевые условия задают ударное воздействие, решение уравнения (1) приобретает обобщенную форму со скачками первых производных функции  $u(x, t)$  на движущихся фронтах одномерных сильных разрывов – волнах деформаций. Фронты сильных разрывов разбивают область деформирования на локальные зоны гладкости перемещений и непрерывности деформаций. Перемещение и скачки его первых производных на каждом фронте сильного разрыва должны удовлетворять условиям Гюгонио [2] для «склеивания» всех локальных зон в обобщенное поле. С учетом этих условий решение уравнения движения (1) с переменной характеристической скоростью  $c(e)$  допускает три типа одномерных сильных разрывов, которые называем в терминах [2]: ударная волна, скачком переводящая среду из растянутого состояния в сжатое; простой разрыв, скачком изменяющий уровень деформации с сохранением типа деформированного состояния; полусигнотон, у которого, с одной стороны, деформации не равны нулю, а с другой – нулевые.

В [3–5] показано, что в среде [1] одномерные полусигнотоны и простые разрывы движутся с характеристическими скоростями  $a$ ,  $b$  (т.е. бывают быстрые и медленные), а скорость ударной волны находится в диапазоне  $(b; a)$ . Разница в скоростях приводит к возможности попутных и встречных столкновений фронтов разнотипных сильных разрывов. Это, в свою очередь, усложняет процедуру построения обобщенного решения краевой задачи из-за увеличения количества зон локальных решений и их расходящихся границ – прямых и отраженных волн, типы которых могут отличаться от первоначальных типов взаимодействующих фронтов. Дополнительно необходимо отметить, что при учете всех эффектов столкновения и отражения волновых фронтов в процедуре решения краевой задачи появляются точки ветвления, когда в актуальной волновой картине существует более одной пары подходящих для столкновения сильных разрывов.

Для построения обобщенного решения нестационарных одномерных краевых задач в рамках линеаризованных соотношений модели [1] был предложен подход [3], основанный на кусочно-линейной аппроксимации нелинейного изначально гладкого краевого условия. Одновременная линеаризация модельных соотношений (с сохранением их физической нелинейности) и нестационарных краевых условий задачи упрощает процесс моделирования динамики нестационарного одномерного деформирования разномодульной упругой среды, поскольку позволяет воспользоваться формализмом линейной теории упругости в локальных зонах. Обобщенное решение задачи строится в форме рекуррентной цепочки локальных решений с линейными перемещениями, вычисляемыми на последовательных ограниченных этапах времени. При этом каждое локальное решение «помнит» все предыдущие этапы, начиная от начального момента времени.

Ниже опишем в общих чертах шаги предлагаемого подхода.

1. В качестве нестационарного условия на границе полуограниченного разномодульного упругого тела (полупространства или стержня) задаем кусочно-линейную функцию граничного продольного перемещения (это может быть как изначальная его форма, так и аппроксимация гладкой функции).

2. Проводим предварительный анализ возможных столкновений волновых фронтов при заданном кусочно-линейном краевом условии: строим конечное множество различных инцидентов, сначала с участием первичных сильных разрывов, порождаемых движением граничных точек, затем – вторичных прямых и отраженных сильных разрывов, возникших в результате инцидентов, уже включенных в это множество.

Описание каждого элемента множества инцидентов содержит пару взаимодействующих волн и прогноз результатов их столкновения – вторичные волновые фронты и согласованный с их свойствами знак деформации в растущей локальной зоне между ними.

3. Полуоткрытый интервал времени деформирования разбиваем на локальные этапы. В дискретное множество точек разбиения включаем узловые точки краевого условия и моменты времени столкновения возникающих волно-



вых фронтов между собой или с границей. Множество моментов времени пополняется в процессе решения задачи.

4. Далее запускаем итерационный процесс построения обобщенного решения, двигаясь по последовательным этапам времени.

4.1. Отправной точкой итерационного процесса считаем обобщенное решение первичной волновой картины, построенное на интервале от начального момента времени и до момента первого столкновения. Локальные перемещения и деформации в каждой новой локальной зоне первичной волновой картины вычисляем с учетом актуальной части граничного перемещения и известных решений в соседних локальных зонах.

4.2. На актуальном этапе решения проверяем волновую картину на наличие пригодных для столкновения фронтов, а также потенциальных точек ветвления. При отсутствии «кандидатов на столкновение» переходим к шагу 5.

4.3. Если в актуальной волновой картине нет точки ветвления (т.е. существует только одна пара пригодных для взаимодействия сильных разрывов), то добавляем момент столкновения в дискретное множество временных точек и строим решение в новой локальной зоне, возникающей после столкновения. Затем переходим к шагу 4.6, чтобы сверить полученное локальное решение с прогнозом, который описывает выбранный инцидент.

4.4. Если актуальная волновая картина имеет точку ветвления, то вычисляем время столкновения для всех «конкурирующих» на текущем этапе инцидентов и выбираем среди них тот, для которого это время имеет меньшее значение (выбранный момент времени включаем в множество точек разбиения полуоткрытого временного интервала).

4.5. Выбрав конкретный инцидент, строим решение в новой локальной зоне с учетом «соседних» локальных решений, полученных на предыдущих этапах. Затем сверяем полученный результат с прогнозом.

4.6. Если типы расходящихся вторичных сильных разрывов и деформированное состояние в новой локальной зоне между ними удовлетворяет прогнозу выбранного инцидента, то возвращаемся к шагу 4.2 для выбора следующего инцидента в измененной волновой картине.

4.7. При нарушении прогноза проводим корректировку результирующей волновой картины, подбирая другие типы вторичных фронтов с учетом их свойств по классификации разрывов, а только затем переходим к шагу 4.2.

5. Процесс построения решения останавливаем, если в актуальной волновой картине больше не существует хотя бы двух волновых фронтов, пригодных для столкновения, или если разбиение временного интервала стало слишком частым, что может привести к накоплению вычислительной ошибки.

Описанный подход является достаточно универсальным и может быть адаптирован для решения одномерных краевых задач практически с любыми режимами граничного воздействия (в т. ч. циклическим или импульсным нагружением). В [5] подобная схема действий использована в качестве основы алгоритма поиска пути на графе для решения нестационарной краевой задачи о продольном растяжении-сжатии разномодульного упругого полубесконечно-



го стержня. Предложенный подход позволил выявить ряд характерных особенностей динамики упругого деформирования разномодульной среды [1]. Некоторые из этих особенностей можно показать только при учете всего множества различных взаимодействий волновых фронтов и эффектов отражения в обобщенном решении краевой задачи. Это, например, возникновение вторичной отраженной ударной волны и движущихся жестких слоев, возникающих на удалении от нагружаемой границы, и т.д.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мясников В.П., Олейников А.И. *Основы механики гетерогенно-сопротивляющихся сред*. Владивосток: Дальнаука, 2007.
2. Маслов В.П., Мосолов П.П. *Общая теория уравнений движения разномодульной упругой среды*. ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 3. С. 419-437.
3. Дудко О.В., Лаптева А.А., Рагозина В.Е. *Нестационарные одномерные динамические задачи разномодульной упругости с кусочно-линейной аппроксимацией краевых условий*. Вестник ПНИПУ. Механика. 2019. № 4. С. 37-47.
4. Дудко О.В., Лаптева А.А., Семенов К.Т. *О распространении плоских одномерных волн и их взаимодействии с преградами в среде, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию*. Дальневосточный математический журнал. 2005. Т. 6. № 1-2. С. 94-105.
5. Дудко О.В., Лаптева А.А., Рагозина В.Е. *Эволюция волновой картины кусочно-линейного растяжения-сжатия разномодульного упругого стержня*. СибЖИМ. 2022. Т. 25. № 4. С. 54-70.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ГЕОЛОГИЧЕСКИХ СРЕДАХ С РАЗЛИЧНОЙ РЕОЛОГИЕЙ

*Е. А. Ефимов*

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск;  
efimov@icm.krasn.ru*

При решении прямых задач сейсмологии необходимо учитывать крупномасштабные неоднородности, обусловленные особенностями строения массивов пород. При распространении волн наличие крупных неоднородностей может вызывать эффекты, значительно влияющие на картину волновых полей. Например, в средах с блочно-слоистой структурой возможно распространение маятниковых волн, возникающих за счёт деформации прослоек между блоками. Волны такого типа не могут наблюдаться в рамках однородных осреднённых моделей [3]. Если неоднородности имеют малый размер и в отдельности слабо влияют на характер распространения волн, то можно воспользоваться осреднёнными однородными моделями. Однородные модели применимы для описания материалов блоков в блочно-слоистой среде.

На мелкомасштабном уровне горная порода может быть представлена как пористый упругий материал, насыщенный влагой или газом. Одна из наиболее употребительных однородных моделей пороупругости была разработана Био [1]. Она описывает продольные и поперечные «быстрые» волны в твёрдой фазе среды, а также «медленную» продольную волну в поровой жидкости. Движение вязкой жидкости вызывает диссипативные процессы, с которыми связаны эффекты затухания волн в горных породах. Для описания затухания волн можно воспользоваться более простыми и удобными с точки зрения численной реализации моделями вязкоупругого тела. Наиболее адекватной является обобщённая модель стандартного линейного тела, поскольку хорошо воспроизводит результаты экспериментов, показывающих, что добротность остаётся постоянной в сейсмическом диапазоне частот (1-200 Гц) [2].

Недостаток применения теории вязкоупругости заключается в том, что при распространении ударной волны диссипация энергии будет происходить за фронтом на вязких элементах по мере их релаксации. Поэтому диссипация на фронте волны может быть учтена в рамках теории пластичности. Пластическая волна, на которой происходит диссипация энергии, возникает, когда напряжения достигают предела текучести.

Для двумерных задач динамики изотропных вязкоупругих и упруго-пластических сред дифференциальный оператор записывается в симметрической  $t$ -гиперболической форме. Численное решение задач строится на основе метода расщепления по пространственным переменным и физическим процессам. На отдельных этапах расщепления решаются одномерные системы уравнений теории упругости и уравнения, описывающие вязкие процессы. Упругопластическая задача формулируется в виде вариационного неравенства

[4], при численном решении которого используется процедура корректировки Уилкинса.

Решение одномерных задач теории упругости вычисляется по схеме с контролируемой диссипацией, предложенной Г.В. Ивановым. Данная схема выводится из закона сохранения, записанного в дискретной форме, что позволяет явно выразить мощность схемной диссипации. В полностью консервативной форме схема имеет второй порядок аппроксимации.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Biot M.A. *Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media*. Journal of Applied Physics. 1962. V.33, P. 1482-1498.
2. McDonal F.J. *Attenuation of Shear and Compressional Waves in Pierre Shale*. Geophysics. 1958. V. 23, PP. 421-439.
3. Кочарян Г. Г. *Модель необратимого деформирования горного массива блочной структуры при взрывном воздействии*. Взрывное дело. 1990. № 90/47. С. 30-42.
4. Садовский В.М. *Разрывные решения в задачах динамики упругопластических сред*. М.: Наука, 1997.

## О ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ РАЗРУШЕНИИ ОГНЕУПОРОВ

*А. В. Заболотский<sup>1,2, a</sup>, А. И. Дмитриев<sup>2, b</sup>*

<sup>1</sup>ООО «Группа «Магнезит», Сатка, Челябинская обл.;

<sup>2</sup>ФБГУН Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

<sup>a</sup> zabolotsky@bk, <sup>b</sup> rudmitr@ispms.ru

Для осуществления высокотемпературных процессов в промышленности используется класс материалов, называемых огнеупорами. Такие материалы ограждают высокотемпературные зоны оборудования и за счет сравнительно невысокой теплопроводности обеспечивают допустимый уровень температуры на поверхности и вокруг агрегатов. Эксплуатация оборудования может происходить как по непрерывному, так и по периодическому режиму. В последнем случае огнеупор подвергается значительным скачкам температур, которые в свою очередь приводят к развитию термомеханических напряжений и носят название термического удара. Влияние термоудара на эксплуатацию оборудования значительно: огнеупорные футеровки, как правило, не испытывают значительных механических нагрузок в процессе нормальной эксплуатации, в то время как термомеханические воздействия способны вызвать серьезные повреждения уже на начальном этапе службы.

Огнеупоры представляют собой хрупкие при обычных условиях керамические материалы, однако, при температуре эксплуатации они проявляют пластические свойства. При этом распространённой является ситуация, когда вблизи рабочей поверхности имеет место пластическая деформация, а на противоположной стороне – хрупкое растрескивание. В результате термомеханическое разрушение огнеупоров приводит к формированию специфической картины расположения трещин, анализ которой требует совместного рассмотрения температурного поля и напряжённо-деформированного состояния материала [1].

Многочисленные исследования автора с применением численных методов привели к разработке модели разрушения огнеупорного материала, находящегося в градиентном поле температур. Учет температурной зависимости свойств материала и нагрузок, возникающих в результате собственного теплового расширения, позволяют определить преимущественные направления растрескивания при помощи градиентного деформационного критерия, сформулированного ранее [2] для определения области растрескивания и модифицированного автором для выявления преимущественного направления разрушения.

Не менее важным вопросом для эксплуатации огнеупора является не только направление растрескивания, но и скорость образования магистральных трещин. При этом необходимо учитывать, что огнеупорные материалы обладают сложной микроструктурой, представленной армирующими зёрнами разного размера, связующей, относительно однородной матрицей, а также порами, заполненными воздухом и микротрещинами, формирующимися

на стадии производства материалов, либо внесенными вместе с зерновыми компонентами. Все эти дефекты, с одной стороны, являются концентраторами напряжений, приводящими к более раннему началу роста трещин, с другой стороны – препятствиями для роста трещин, приводящими к специфическому квази-хрупкому характеру разрушения в широком интервале скорости приложения нагрузок. Проведенные исследования показали, что фактические значения прочности материалов коррелируют с такой схемой роста дефекта, включающей рост микротрещины между соседними зернами каркаса, а затем уже катастрофическое формирование магистральной трещины при соответствующем значении внешней нагрузки [3].

Таким образом, для прогнозирования ресурса огнеупора необходимо выполнить ряд модельных расчетов для разных размерных уровней. Во-первых, необходим расчет термомеханических напряжений для уровня агрегата, который вследствие сложной геометрической формы и сложного характера теплообмена как правило выполняется численными методами. Во-вторых, определить критический размер трещины для изделий, находящихся в наиболее напряженных зонах агрегатов [4]. Критическим размером трещины считается такой ее размер, при котором существующие внешние нагрузки приведут к ее росту до разрушения изделия. На третьем этапе необходимо провести моделирование роста трещины, используя геометрическую модель структуры материала и напряженно-деформированное состояние, определённое на первом этапе – в качестве граничных условий. При этом следует учитывать энергетический аспект роста трещины – локальное снижение напряжений в области ее вершины за счет формирования новой поверхности.

Таким образом, предлагаемый подход позволяет анализировать конструктивные особенности оборудования – по картине разрушения восстанавливать условия, которые привели к разрушению. Кроме того, возможно прогнозирование срока службы материала при изменении условий эксплуатации с учетом не только изменения внешнего воздействия, но и собственных свойств материала.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта № 22-19-00688, <https://rscf.ru/project/22-19-00688>).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Zabolotskiy A. V., Turchin M. Yu., Khadyev V. T., Migashkin A. O. Numerical investigation of refractory stress-strain condition under transient thermal load // AIP Conference Proceedings. 2020. Vol. 2310. Article 020355. DOI: 10.1063/5.0034479.
2. Kuliev V. D., Morozov E. M. The gradient deformation criterion for brittle fracture // Doklady Physics. 2016. Vol. 61. P. 502-504. DOI: 10.1134/S1028335816100062.

3. Заболотский А. В., Борзов А. Н., Хадыев В. Т., Андреев К. П. Цифровизация промышленных тепловых процессов и агрегатов // Черная металлургия: Бюл. научно-технической и экономической информации. 2021. Т. 77, № 2. С. 209-214.

4. Murakami Y. Stress intensity factors handbook (Pergamon Press, Oxford, 1987), vol. 2, pp. 530-532.

## ТЕХНОЛОГИЯ ИЗВЛЕЧЕНИЯ ГЕЛИЯ И ПАРОВ ВОДЫ ИЗ ПРИРОДНОГО ГАЗА НА ОСНОВЕ МЕМБРАННО-СОРБЦИОННОГО МЕТОДА

*В. Н. Зиновьев<sup>1, а</sup>, И. В. Казанин<sup>1</sup>, В. М. Фомин<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск; <sup>а</sup>zinoviev@itam.nsc.ru*

В состав природного газа, наряду с легкими углеводородами (метан, этан, пропан, бутан и др.), входят азот, углекислый газ, серосодержащие соединения, водород, гелий и другие примеси. При этом из всех перечисленных компонентов природного газа особо следует выделить гелий, как особо ценный, поскольку он относится к редким и почти невозобновляемым на Земле природным ресурсам с уникальными свойствами. Это делает его практически незаменимым для широкого ряда приложений, например, в медицине в качестве компонента дыхательных смесей, в науке и технике для создания сверхчистых сред, сверхпроводящих материалов, сверхмощных магнитных полей, сверхнизких температур и т.д. [1]. Утилизация природного газа только в качестве энергетического сырья неизбежно ведет к безвозвратным потерям гелия, так как при сжигании газа он поступает в атмосферу, а далее происходит его транспорт в космос. Следовательно, для сохранения этого ценного ресурса гелий необходимо предварительно извлекать из природного газа, а при превышении потребности в нем – накапливать излишки в подземных хранилищах [2]. В настоящее время основным способом извлечения гелия из природного газа в промышленном масштабе является криогенная технология, основу которой составляет последовательная конденсация углеводородных фракций, входящих в состав природного газа [3]. В последнее время широкое распространение получает мембранный метод выделения гелия из природного газа, который основан на избирательной проницаемости материала мембраны по отношению к гелию [4]. В настоящей работе обобщается опыт по экспериментальному обоснованию применения мембранно-сорбционного метода для совместного извлечения гелия и паров воды из природного газа, который накоплен в ИТПМ СО РАН за последние годы.

Предлагаемый мембранно-сорбционный метод состоит в использовании полых микросферических мембран (микросфер, ценосфер), стенка которых избирательно проницаема для гелия и непроницаема для других газов, и гранулированных сорбентов на их основе для выделения гелия и паров воды из природного газа. Селективное поглощение гелия сорбентом (сорбция) происходит при наличии положительной разницы в парциальных давлениях гелия снаружи и внутри микросфер, который затем может быть извлечён из них (десорбция), путём создания обратного градиента парциального давления гелия за счет вакуумирования емкости с сорбентом [5, 6].

Исследование сорбционных характеристик композитного сорбента, созданного на основе псевдобемита и синтетических микросфер из натрий-борсиликатного стекла, с целью его применения в мембранно-сорбционных технологиях выделения гелия из природного газа с его одновременной осушкой продемонстрировало, что имеется принципиальная возможность использования данного композитного сорбента для совмещения процессов осушки природного газа от водяных паров и извлечения из него гелия, что может позволить сократить технологическую схему предварительной подготовки природного газа. Кроме того, было установлено, что степень насыщения композитного сорбента парами воды практически не оказывает влияния на темпы поглощения гелия [7].

Были проведены специальные эксперименты по извлечению гелия из реального природного газа, полученного с одной из скважин Средне-ботуобинского газового месторождения, расположенного в Республике Саха (Якутия). Исходный состав природного газа включал примесь гелия с концентрацией 0,488% об. В результате проведения в адсорбере лабораторного стенда последовательных операций: сорбции гелия из природного газа сорбентом, последующего вакуумирования адсорбера и заключительной десорбции гелия из сорбента, удалось добиться увеличения концентрации гелия в гелиевом концентрате, которая составила около 40% об., что почти на два порядка превышает исходную концентрацию.

Для определения транспортных характеристик композитного сорбента были проведены эксперименты по исследованию течения газовой смеси, состоящей из гелия и любого другого газа, не поглощаемого сорбентом, через зернистую среду, состоящую из неподвижных гранул сорбента равномерно распределенных в исследуемой емкости. Кроме того, аналогичные эксперименты были выполнены по исследованию транспорта газовой смеси через пористую среду связующего для отдельных индивидуальных гранул данного композитного сорбента.

С целью выяснения фактических сроков эксплуатации и сохранности функциональных свойств композитного сорбента было проведено экспериментальное исследование влияния циклической нагрузки на ресурс и сорбционные характеристики сорбента состоящего из микросфер, селективно проницаемых для гелия в качестве наполнителя, и псевдобемита в качестве связующего. Установлено, что после многократных циклов нагружения газовой смесью при давлении до 10 МПа композитный сорбент сохраняет структурную целостность и неизменность сорбционных характеристик.

Для проведения масштабирования мембранно-сорбционного метода как способа выделения гелия из природного газа, в ИТПМ СО РАН была спроектирована и построена опытно-промышленная установка. На этой установке были проведены испытания и отладка всех необходимых операций, составляющих основу предполагаемого технологического процесса извлечения гелия из природного газа с помощью композитного сорбента на основе микросферических частиц, проницаемых по отношению к гелию и непро-



нищаемых для других компонент. Результаты испытаний подтвердили принципиальную применимость предлагаемого метода, который может быть использован в будущем при его внедрении в виде мембранно-сорбционной технологии извлечения гелия и паров воды из природного газа на газовых месторождениях.

Выполнена экспериментальная проверка применимости технологии совместного выделения гелия и паров воды из природного газа, основанная на мембранно-сорбционном методе, разработанном в ИТПМ СО РАН.

Определены транспортные характеристики для пористого связующего материала отдельной гранулы композитного сорбента и среды из таких гранул при течении через них газовой смеси, состоящей из гелия и любого другого газа, не поглощаемого сорбентом, через зернистую среду, состоящую из неподвижных гранул сорбента равномерно распределенных в исследуемой емкости.

Показано, что в результате многократных циклов нагружения композитного сорбента газовой смесью при давлении до 10 МПа не происходит нарушения структурной целостности сорбента и сохраняется неизменность его сорбционных характеристик.

На примере образца реального природного газа со Среднеботуобинского газового месторождения, в исходный состав которого входила примесь гелия с концентрацией 0,488% об., получен гелиевый концентрат с обогащением гелия в нем на два порядка.

На созданной в ИТПМ опытно-промышленной установке проведена отработка основных операций технологии, использующих принципы предлагаемого мембранно-сорбционного метода, показавшая его принципиальную применимость для извлечения гелия и паров воды при его внедрении на газовых месторождениях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Якуцени В.П. *Традиционные и перспективные области применения гелия*. Нефтегазовая геология. Теория и практика. 2009. Т. 4, № 1. С. 1-13.
2. Эдер Л.В. и др. *Анализ современного состояния и прогноз развития мировой гелиевой промышленности с учетом перспектив по хранению гелия*. Газовая Промышленность. 2020. Т. 810, № 12. С. 68-76.
3. Золототрубова А.А. *Извлечение гелия из природного газа: классические и новые методы получения гелиевого концентрата и товарного гелия*. Успехи в химии и химической технологии. М.: Российский химико-технологический университет имени Д.И. Менделеева, 2018. Т. 32, № 8. С. 77-79.
4. Голубева И.А. и др. *Мембранные технологии извлечения гелия из природных газов, перспективы развития российской гелиевой промышленности*. Газовая Промышленность. 2021. Т. 816, № 5. С. 20-26.

5. *Способ разделения многокомпонентной парогазовой смеси* / В.М. Фомин [и др.] (Российская Федерация); заявитель ИТПМ СО РАН; патент. поверен. Симонов Б.П. – No 2508156; заявл. 27.02.2014; опубл. 10.11.2013, Бюл. «Изобретения. Полезные модели», No 6; приоритет 03.05.2012, 2012118350 (Рос. Федерация). – 7 с.: пат. 2508156 С2 USA. P. 1-8.

6. Фомин В.М. *Мембранно-сорбционный метод обогащения гелия из природного газа. Идея, научное обоснование и технология*. Казань: Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2015. P. 3929-3930.

7. Зиновьев В.Н. и др. *О совместном выделении паров воды и гелия из природного газа*. Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т. 23, № 5. С. 771-777.

## РАСЧЁТ СЛОИСТЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ

А. В. Иванов<sup>1, а</sup>, Г. Л. Горынин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Сургутский государственный университет

<sup>а</sup>sketcherrus8@gmail.com

Используется метод асимптотического расщепления для расчёта слоистых криволинейных стержней. В цилиндрической системе координат рассмотрим криволинейный стержень (рис. 1). В безразмерных координатах угол  $\psi$  изменяется от 0 до 1, в поперечном сечении стержня введены координаты  $\rho, y$ .

В соответствии с теорией метода [1, 2] напряжения и перемещения ищутся в виде:

$$\left(u_{\alpha}^{\eta}\right)_i^n = \sum_{k=0}^N \left(U_{\alpha}^{\eta}\right)_i^k \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k, \quad \left(\sigma_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^n = \sum_{k=0}^N \left(\tau_{\alpha\beta}^{\eta}\right)_i^k \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k.$$

С учётом этого пространственная задача теории упругости расщепляется на систему рекуррентных задач в поперечном сечении [3].

Показано, что перемещения сечения подчиняются системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+3} B_r^{\eta,k} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k &= p_r(\psi), \\ \sum_{k=0}^{n+2} B_{\psi}^{\eta,k} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k &= p_{\psi}(\psi), \\ \sum_{k=0}^{n+3} B_y^{\eta,k} \frac{d^k \eta^{(n)}}{d\psi^k} \varepsilon^k &= p_y(\psi), \end{aligned}$$

где  $p_{\alpha}(\psi)$  – суммарная нагрузка на сечение в направлении  $\alpha$ ,  $B_{\beta}^{\eta,k}$  – константы, которые вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} B_r^{\eta,k} &= \int_F \left( \left(\tau_{\psi\psi}^{\eta}\right)_i^k \varepsilon_1 - \left(\tau_{r\psi}^{\eta}\right)_i^{k-1} \right) dF, \\ B_{\psi}^{\eta,k} &= - \int_F (1 + \rho \varepsilon_1) \left(\tau_{\psi\psi}^{\eta}\right)_i^{k-1} dF, \quad B_y^{\eta,k} = - \int_F \left(\tau_{y\psi}^{\eta}\right)_i^{k-1} dF. \end{aligned}$$

При рассмотрении тонкого слоистого стержня введена операция усреднения по сечению, которая позволяет свести задачу к системе из двух уравнений. При  $n = 1$  получается первое приближение задачи о криволинейных стержнях:

$$\begin{aligned} B_r^{v_r,0} v_r + B_r^{v_r,2} \frac{d^2 v_r}{d\psi^2} \varepsilon^2 + B_r^{v_r,4} \frac{d^4 v_r}{d\psi^4} \varepsilon^4 + B_r^{v_{\psi},1} \frac{dv_{\psi}}{d\psi} \varepsilon + B_r^{v_{\psi},3} \frac{d^3 v_{\psi}}{d\psi^3} \varepsilon^3 &= p_r, \\ B_{\psi}^{v_r,1} \frac{dv_r}{d\psi} \varepsilon + B_{\psi}^{v_r,3} \frac{d^3 v_r}{d\psi^3} \varepsilon^3 + B_{\psi}^{v_{\psi},2} \frac{d^2 v_{\psi}}{d\psi^2} \varepsilon^2 &= p_{\psi}. \end{aligned}$$

В частном случае при рассмотрении трёхслойной арки, узкого прямоугольного сечения система принимает вид:

$$B \frac{d^4 v_r}{d\psi^4} \varepsilon^4 + 2\varepsilon_1^2 A v_r + 2\varepsilon_1 A \frac{dv_\psi}{d\psi} \varepsilon = p_r,$$

$$\varepsilon_1 \frac{dv_r}{d\psi} \varepsilon + \frac{d^2 v_\psi}{d\psi^2} \varepsilon^2 = p_\psi,$$

где

$$A = B_r^{v_\psi, 3} = bE_1 h + bE_2 \left( \frac{1}{2} - h \right),$$

$$B = B_r^{v_r, 4} = -E_1 b \left( -\frac{2}{3} h^3 + h^2 - \frac{1}{2} h \right) - E_2 b \left( \frac{2}{3} h^3 - h^2 + \frac{1}{2} h - \frac{1}{12} \right).$$

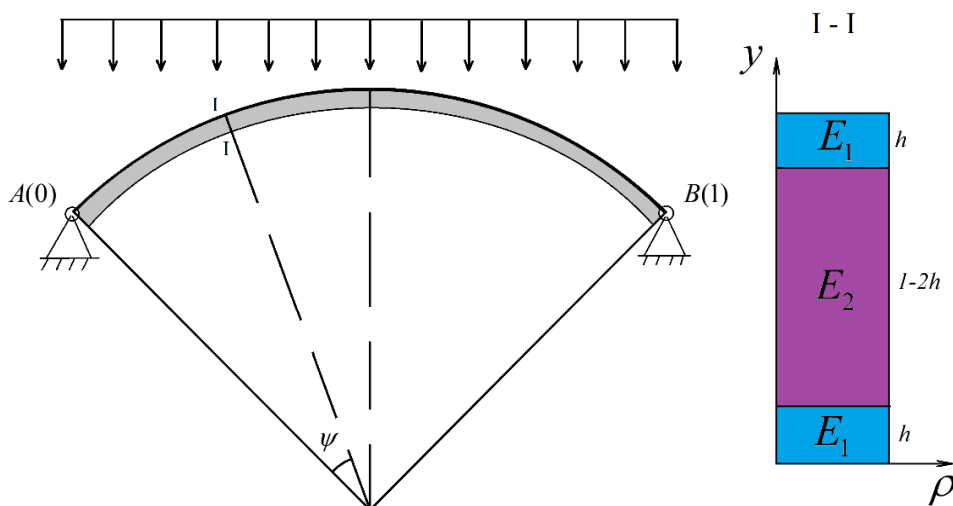


Рис. 1. Арка под распределённой нагрузкой и сечение

Произведено сравнение полученных результатов с численными решениями трехмерной задачи теории упругости и с решениями, полученными на основе других стержневых теорий строительной механики.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Деформирование слоистых анизотропных стержней в пространственной постановке. Продольно-поперечный изгиб и условие кромочной совместимости*. Механика композитных материалов. 2009. Т. 45. № 3.
2. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления*. Новосибирск: Наука, 2004.
3. Горынин Г.Л. *Деформирование слоистых криволинейных стержней с вертикальной осью симметрии в пространственной постановке. Сообщение 1. Общая теория*. Известия высших учебных заведений. Строительство. 2021. № 4(748). С. 5-20.

## РАЗДЕЛЕНИЕ ВОДОРОДНО-ГЕЛИЕВЫХ СМЕСЕЙ С ПОМОЩЬЮ МЕМБРАННО-СОРБЦИОННОГО МЕТОДА

*И. В. Казанин, В. Н. Зиновьев, К. Э. Прокопьев,*

*А. С. Верещагин, В. М. Фомин*

*Институт теоретической и прикладной механики*

*им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск; kazanin@itam.nsc*

В целом ряде технологических процессов возникают задачи по разделению водородно-гелиевых смесей газов, одним из примеров может быть производство водорода технологией парового риформинга гелийсодержащего природного газа. Разделение водородно-гелиевой смеси традиционными криогенными, адсорбционными и мембранными методами связано с целым рядом технологических сложностей и значительными дополнительными затратами, которые обуславливаются параметрами разделяемых газов и особенностями применяемых технологий. В случае криогенного метода требуется глубокое охлаждение всей смеси, так как эти газы имеют очень низкие и близкие температуры сжижения, 4,22 К и 20,28 К для гелия и водорода соответственно. Мембранные методы привлекают своей простотой, эффективностью, низкими затратами, физической основой является различная способность газов проникать через полупроницаемые материалы – мембраны под действием перепада их парциальных давлений. Но в паре водород-гелий, где оба компонента обладают высокой проницаемостью, селективность известных полимерных мембран является достаточно низкой, что делает неэффективным применение данных мембран. Известна исключительно высокая селективность мембран из кварцевого стекла по гелию [1]. Коэффициент проницаемости кварцевого стекла для гелия превышает таковой для метана на семь порядков, при этом отмечается и достаточно высокая селективность и для пары водород-гелий (до 2 порядков в зависимости от химического состава стеклофазы, количества и природы присутствующих фаз включений [2]). Однако использование кварца или других силикатных материалов в качестве плоских или капиллярно-трубчатых мембран проблематично из-за низкой скорости диффузии гелия, сложности в организации большой поверхности массообмена и эксплуатации мембран при большой разнице давления по разные их стороны. В случае с адсорбционными методами приходится выделять слабо сорбирующийся компонент с низкой концентрацией – гелий.

В данной работе исследования сфокусированы на применении мембранно-сорбционного метода для разделения водородно-гелиевой смеси. Мембранно-сорбционный метод изначально был предложен в ИТПМ СО РАН для решения задач по выделению гелия из природного газа [3]. Ключевая особенность метода заключается в использовании в качестве мембранных элементов – полых микросферических частиц из силикатных материалов

и сорбентов на их основе, обладающих высокой селективной проницаемостью для гелия. Применение полых микросферических частиц в качестве мембранных элементов позволяет решить часть особенностей, связанных с силикатными материалами и мембранами на их основе, которым присущи низкие параметры проницаемости и высокие коэффициенты селективности, а именно: значительно увеличить суммарную площадь газообмена, при этом сферическая форма и малые размеры обеспечивает высокую гидростатическую прочность, что напрямую связано с параметрами производительности разделительных установок.

Вследствие этого такие частицы могут использоваться как микробаллоны, во внутренний объем которых проникает гелий из смеси и удерживается в нем. Микросферы ведут себя как контейнеры для гелия, а разделение смеси основано на селективности их оболочки [4]. Для разделения газовой смеси используется циклический режим работы установки, аналогичный методу короткоциклового адсорбции (КЦА).

В работе проводятся исследования по разделению водородно-гелиевых смесей мембранно-сорбционным методом. Экспериментально получены сорбционные зависимости поглощения водорода и гелия различными типами полых микросферических частиц из силикатных материалов и композитного гранулированного сорбента на их основе. Определены кинетические характеристики поглощения, коэффициенты проницаемости и селективности, динамические характеристики процессов сорбции гелия, водорода, гелий-водородных смесей различного состава данными сорбентами. Показано значительное различие в темпах сорбционных процессов водорода и гелия для исследуемых сорбентов: для кремнеземных микросфер характерное время процессов сорбции гелия и водорода при 110 °С различается более чем в 30 раз, для композитного сорбента – в 200 раз. Проведены эксперименты по разделению гелий-водородной смеси газов с использованием кремнеземных микросфер, получено хорошее соответствие расчетных и экспериментальных результатов разделения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и Правительства Новосибирской области (код проекта 23-29-10068).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дытнерский Ю.И., Брыков В.П., Каграманов Г.Г. *Мембранное разделение газов*. М.: Химия, 1991.
2. Шелби Д. *Структура, свойства и технология стекла* // Пер. с англ. М.: Мир, 2006.
3. Патент РФ № 2508156, *Способ разделения многокомпонентной парогазовой смеси*. Фомин В.М. [и др.]. 2014.
4. Зиновьев В.Н. [и др.]. *Экспериментальное определение коэффициента гелиевой проницаемости на примере полых микросферических мембран*. Теплофизика и Аэромеханика. 2018. Т. 25. № 6. С. 855-864.

## ИСКАЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ ВОЗВЕДЕНИИ НА НЕЙ РЕБРА ПРОВОЛОЧНО-ДУГОВОЙ НАПЛАВКОЙ С ПОСЛОЙНОЙ ПРОКОВКОЙ

*И. Э. Келлер<sup>1, a</sup>, Д. С. Дудин<sup>1</sup>, Н. К. Салихова<sup>1</sup>, Г. Л. Пермяков<sup>2</sup>,  
Д. Н. Трушников<sup>2, b</sup>*

*<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь;*

*<sup>a</sup> kie@icmm.ru*

*<sup>2</sup>Пермский национальный исследовательский политехнический университет;*

*<sup>b</sup> trdimitr@yandex.ru*

Технологии аддитивного производства проволочно-дуговой наплавкой с послойной точечной обработкой давлением в последние десять лет разрабатываются в мире рядом научных организаций, в том числе Пермским национальным исследовательским политехническим университетом, где научились получать изделия из алюминиево-магниевого сплава АМг5, титанового сплава ВТ6, аустенитных нержавеющей сталей 12Х18Н10Т и AISI 308LSi и других конструкционных сталей и сплавов. При этом используются различные эффективные технологии (плазменная, плазменно-дуговая с плавящимся электродом, холодного переноса металла) с проковкой каждого наплавленного слоя материала пневматическим ударным инструментом.

Рациональные параметры послойной проковки возводимого ребра на пластине способны минимизировать искажения геометрии конструкции, которые происходят вследствие усадочных деформаций. Для понимания закономерностей образования и устранения таких искажений построена численная модель формирования напряженно-деформированного состояния в призматическом брусе прямоугольного поперечного сечения, закрепленном на жестком основании, при его аддитивном производстве с послойной проковкой [1]. Экспериментально определены законы упрочнения всех исследуемых материалов в широком диапазоне скоростей деформаций, для чего использованы стандартные испытания на статическое одноосное растяжение и динамические испытания на сжатие методом Кольского на разрезном стержне Гопкинсона. Воздействие пневмомолотка в численной модели определялось с помощью тензометрированной стальной мишени и подтверждалось по искажениям поперечного сечения прокованного бруса из сплава АМг5. Для верификации модели по распределению пластических деформаций и по глубине использовались результаты измерений распределения микротвердости в поперечном срезе образца.

Предложен способ реконструкции неоднородного распределения по высоте бруса продольной компоненты технологических собственных деформаций и вызываемых ими остаточных напряжений, вызывающих искажение геометрии оребренной панели [2]. Согласно этому способу, с верхней грани упругого ребра на жестком основании электроэрозионной установкой

последовательно срезают тонкие параллельные полосы, для каждой из которых измеряют прогиб, и по этим данным вычисляют распределение по глубине ребра собственных деформаций и остаточных напряжений с использованием выведенных формул. Данный способ был апробирован на односторонне прокованном брусе АМг5, закрепленном на стальном основании. Восстановленное распределение, характеризующееся сжимающими продольными собственными деформациями, оказалось соответствующим результатам численного расчета.

Формирование распределений собственных напряжений и остаточных напряжений, а также изгиба пластины при возведении на ней ребра аддитивным производством с послойной проковкой изучается на основе численного моделирования несвязанных упругопластической задачи проковки, тепловой задачи и статической упругопластической задачи и инженерных дифференциально-разностных моделей механики растущего тела, построенных для этой задачи. Последние предсказывают немонотонное изменение продольного прогиба конструкции и определяющую роль в этом нескольких первых наплавленных слоев, которые следует проковывать в необходимой мере либо заменять “жертвенным” слоем без собственных деформаций. Выполнен ряд экспериментов наплавки стального ребра на пластину аддитивным производством с послойной проковкой и без нее и измерены величины продольного изгиба. Численный упругопластический расчет конструкции с распределением собственных деформаций, полученных из дифференциально-разностной модели, подтверждается данными экспериментов и позволяет подбирать оптимальные режимы послойной обработки давлением аддитивно возводимых ребренных конструкций.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 21-19-00715).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Келлер И.Э., Казанцев А.В., Дудин Д.С., Пермяков Г.Л., Карташев М.Ф. *Искажение формы, локализация пластической деформации и распределение остаточных напряжений при односторонней проковке/обкатке бруса. Применение результатов к аддитивному производству шпангоута с послойной обработкой давлением. Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14. № 4. С. 434-443.*

2. Келлер И.Э., Дудин Д.С., Петухов Д.С., Пермяков Г.Л., Трушников Д.С. *Способ определения остаточных напряжений в ребре на жестком основании. Заявка в Роспатент № 2022133445 от 20.12.2022.*



## ТЕРМОВЯЗКОУПРУГАЯ МОДЕЛЬ МОДИФИКАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО СЛОЯ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

*А. Г. Князева*

*Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск  
anna-knyazeva@mail.ru*

В 3D-технологиях, моделированию которых посвящается огромное число публикаций, в едином цикле смесь порошков претерпевает сложные изменения. При плавлении в области действия луча лазера или электронного луча порошок (или его легкоплавкая часть) переходит из твердого состояния в жидкое; затем при остывании имеет место переход в твердую фазу и кристаллизация. Весь процесс сопровождается разнообразными физическими и химическими явлениями. С такими преобразованиями связаны и изменения в реологическом поведении. При математическом моделировании сопутствующих явлений возникает проблема выбора или построения подходящей модели, которая адекватно описывала бы поведение материала как в твердой и жидкой фазах, так и в двухфазной области. С этим связано разнообразие подходов к моделированию.

В настоящей работе представлена связанная модель обработки движущимся источником тепла слоя порошка, расположенного на подложке, в предположении, что превращение материала «порошок-жидкость-твердое тело» характеризуется изменением теплоемкости и вязкоупругих свойств. В качестве основы для построения модели использована модель типа Максвелла, которая допускает переход как к жидкости, так и к упругому телу при изменении коэффициента сдвиговой вязкости. В [1] показано, что связанная модель горения, основанная на модели среды Максвелла, допускает неединственность режимов распространения фронта. Появляются особенности при исследовании устойчивости стационарных режимов, связанные со взаимодействием явлений разной физической природы [2]. В [3] предпринята попытка описать усадку порошкового слоя в рамках модели Максвелла.

В общем случае коэффициент теплового расширения, коэффициент сдвиговой вязкости, теплоемкость, коэффициент теплопроводности, а также коэффициенты Ламе могут зависеть от состава и от температуры. В настоящей работе принимается, что в окрестности температуры плавления изменяется теплоемкость и вязкость. Другие величины считаются неизменными. Плавление системы, состоящей из реагентов и продуктов реакции, описывается с помощью введения интервала температур плавления, где доля жидкой фазы изменяется от 0 до 1. В этом интервале температур теплоемкость и вязкость зависят от доли жидкой фазы.

$$c_{\varepsilon} = [c_{\varepsilon}]_s + Q_m (\partial \eta_L / \partial T) / m; \quad (1)$$

$$\kappa = \kappa_s (1 - \eta_L) + \kappa_L \eta_L. \quad (2)$$

Доля жидкой фазы – функция температуры.

Чтобы отразить факт отличия вязкости для порошковой среды с исходными компонентами от вязкости продукта реакции, в (2) можно принять

$$\kappa_S = \kappa_0(1 - \eta) + \kappa_p \eta, \quad (3)$$

где  $\kappa_0$  – эффективная вязкость порошкового слоя;  $\kappa_p$  – вязкость продукта реакции.

В модели предполагается, что химические реакции, приводящие к образованию продукта, начинаются с момента появления жидкой фазы, а скорость суммарной реакции зависит не только от температуры, но и от работы напряжений.

Задача о равновесии решается в приближении плоского напряженного состояния.

Задача содержит несколько характерных времен и пространственных масштабов, соответствующих разным физическим явлениям, что привело к необходимости перехода к безразмерным переменным и разработке вычислительного алгоритма. Оценки дают довольно широкую область изменения безразмерных параметров.

Первые результаты представлены в [1], где на модельных примерах показаны некоторые качественные особенности, проявляющиеся в модели при учете плавления, изменения вязкости и потерь тепла в окружающую среду. Установлено, что связанная и несвязанная модели дают разные результаты.

В настоящей работе проанализированы физические масштабы и безразмерные комплексы. Продемонстрированы качественные особенности в поведении температуры и напряжений в интервале температур плавления вследствие изменения вязкости с долей жидкой фазы и формированием продукта химической реакции. Обнаружены краевые эффекты, связанные со взаимодействием процессов разной физической природы. Предложенная модель может представлять интерес для изучения физических явлений, сопутствующих технологическим процессам, где наблюдаются сложные изменения фазового состояния.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема номер FWRW-2022-0003*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Князева А.Г., Сорокова С.Н. *Стационарные режимы превращения в вязкоупругой среде*. ФГВ. 2006. Т. 42, № 5. С. 63-73.
2. Князева А.Г., Сорокова С.Н. *Устойчивость волны горения в вязкоупругой среде к малым одномерным возмущениям*. ФГВ. 2006. Т. 42. № 4, С. 50-60.
3. Knyazeva A.G. *Kinetics of powder layer shrinkage during electron-beam treatment*. Journal of Physics: Conference Series. 2016. 754. paper. 042009
4. Knyazeva A.G. *Thermo-visco-elastic model of powder layer modification by moving heat source*. Proceedings of 8th International Congress on Energy Fluxes and Radiation Effects (EFRE–2022). Томск: 1966. P. 1324-1329.

## АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Г. Н. Кувыркин<sup>1</sup>, Д. Р. Рахимов<sup>1, а</sup>

<sup>1</sup>Московский государственный технический университет

им. Н. Э. Баумана, Москва

<sup>а</sup>sketcherrus8@gmail.com

Математическое моделирование процессов нелинейного деформирования изотропных материалов при неизотермическом нагружении в основном строится на вариантах теории течения с комбинированным упрочением [1, 2]. В данной работе предложен вариант эндохронной теории термопластичности для изотропных материалов, а также вычислительный алгоритм решения определяющих соотношений.

Определяющие соотношения эндохронной теории термопластичности для изотропного материала, устанавливающие интегральную зависимость между напряжениями, деформацией и изменением температуры  $\theta = T - T_0$  имеют следующий вид:

$$s_{ij} = \int_0^z \rho(z-z') \frac{de_{ij}}{dz'} dz', \quad \sigma_o = \int_0^z \psi(z-z') \frac{d\varepsilon_o}{dz'} dz' - \int_0^z \phi(z-z') \frac{d\theta}{dz'} dz', \quad (1)$$

где  $s_{ij}$  – компоненты девиатора напряжений;  $e_{ij}$  – компоненты девиатора деформации;  $\sigma_o$  – среднее напряжение;  $\varepsilon_o$  – средняя деформация;  $\rho(z), \psi(z), \phi(z)$  – ядра интегральных выражений, зависящие от температуры  $T$ ;  $z$  – внутреннее время, определяемое как [3, 4]

$$dz = \frac{d\xi}{f(\xi)}, \quad f(\xi) \geq 1, \quad f(0) = 1,$$

где  $f(\xi)$  – функция упрочения, зависящая от температуры  $T$ ;  $d\xi$  – приращение меры внутреннего времени, вычисляемое по формуле [5]

$$d\xi^2 = \frac{2}{3} de_{ij} de_{ij} + m^2 d\theta^2, \quad (2)$$

где  $m$  – материальный параметр модели, описывающий необратимое деформирование при изменении температуры.

Ограничения, накладываемые на ядра интегральных выражений, имеют следующий вид [6]:

$$\rho(z) \geq 0, \quad \frac{d\rho(z)}{dz} \leq 0, \quad \psi(z) \geq 0, \quad \frac{d\psi(z)}{dz} \leq 0, \quad \frac{d\phi(z)}{dz} \leq 0. \quad (3)$$

Продифференцируем соотношение (1) по внутреннему времени  $z$ :

$$\begin{aligned}\frac{ds_{ij}}{dz} &= \rho(0) \frac{de_{ij}}{dz} + \int_0^z \frac{d}{dz} (\rho(z-z')) \frac{de_{ij}}{dz'} dz', \\ \frac{d\sigma_o}{dz} &= \psi(0) \frac{d\varepsilon_o}{dz} - \varphi(0) \frac{d\theta}{dz} + \int_0^z \frac{d}{dz} \psi(z-z') \frac{d\varepsilon_o}{dz'} dz' - \int_0^z \frac{d}{dz} \varphi(z-z') \frac{d\theta}{dz'} dz'.\end{aligned}\quad (4)$$

Конкретизируем вид ядер интегральных выражений. Так, для пластически несжимаемого изотропного материала, учитывая неравенства (3) и условие упругого деформирования при  $z \rightarrow 0$ , примем следующие соотношения:

$$\rho(z) = 2\mu \cdot \exp(-a \cdot z), \quad \psi(z) = K, \quad \varphi(z) = K\alpha^{(T)}, \quad (5)$$

где  $a = a(T)$  – материальный параметр модели;  $\alpha^{(T)}$  – температурный коэффициент линейного расширения;  $\mu = E/2(1+\nu)$ ,  $K = E/(1-2\nu)$  – модуль сдвига и модуль объемного сжатия соответственно,  $E = E(T)$ ,  $\nu = \text{const}$  – нормальный модуль упругости и коэффициент Пуассона.

Используя соотношения (4) и (5), а также связь между девиаторными и шаровыми частями тензоров напряжений и деформации,  $d\sigma_{ij} = ds_{ij} + \delta_{ij} d\sigma_o$ ,  $d\varepsilon_{ij} = de_{ij} + \delta_{ij} d\varepsilon_o$ , получим определяющее уравнение эндохронной теории термопластичности в дифференциальной форме

$$d\sigma_{ij} = D_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + \left( \frac{\sigma_{ij}}{E} \frac{dE}{d\theta} + (h_{ij} - z s_{ij}) \frac{\partial a}{\partial \theta} - \delta_{ij} K \alpha^{(T)} \right) d\theta - a s_{ij} dz, \quad (6)$$

где  $D_{ijkl}$  – компоненты тензора упругих жесткостей 4-го ранга,  $h_{ij}$  – компоненты тензора 2-го ранга, определяемые как

$$h_{ij} = \int_0^z 2\mu z' \exp[-a(z-z')] \frac{de_{ij}}{dz'} dz'. \quad (7)$$

Обратное соотношение выглядит следующим образом:

$$d\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} d\sigma_{kl} - \left( S_{ijkl} \frac{\sigma_{kl}}{E} \frac{dE}{d\theta} + S_{ijkl} (h_{kl} - z s_{kl}) \frac{\partial a}{\partial \theta} - \delta_{ij} \alpha^{(T)} \right) d\theta + a S_{ijkl} s_{kl} dz, \quad (8)$$

где  $S_{ijkl}$  – компоненты тензора коэффициентов податливости.

Предполагая, что изменение компонент девиатора деформации  $de_{ij}/dz' = \text{const}$  на каждом шаге численного интегрирования, преобразуем соотношение (7) к следующему виду

$$h_{ij}(z_{m+1}) = h_{ij}(z_m) e^{-a\Delta z} + 2 \frac{\mu}{a} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z_{m+1}} \left[ z_{m+1} - \left( z_m - \frac{1}{a} \right) e^{-a\Delta z} - \frac{1}{a} \right]. \quad (9)$$

Для решения системы уравнений (6) используем метод Эйлера с внутренним итерационным процессом, выполняемым методом Зейделя [7]. При интегрировании задаем шаги по напряжению  $\Delta\sigma_{kl}^{(n)}$  и температуре  $\Delta\theta^{(n)}$ , где  $n$  – номер шага нагружения. В исходном состоянии все параметры принимаем равными нулю и решаем задачу в упругой постановке.

Представим соотношение (6) в разностном виде

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{(n,p)} = S_{ijkl} (T^{(n-1)}) \Delta \sigma_{kl}^{(n)} - \Omega^{(n,p-1)} \Delta \theta^{(n)} + \Psi^{(n-1)} \Delta z^{(n,p-1)},$$

$$\Omega^{(n,p-1)} = \left( S_{ijkl} (T^{(n-1)}) \left( \frac{\sigma_{kl}^{(n-1)}}{E(T^{(n-1)})} \frac{dE}{d\theta} \Big|_{T^{(n-1)}} + (h_{kl}^{(n,p-1)} - z^{(n-1)} s_{kl}^{(n-1)}) \frac{\partial a}{\partial \theta} \Big|_{T^{(n-1)}} \right) - \delta_{ij} \alpha^{(T)} \right),$$

$$\Psi^{(n-1)} = a(T^{(n-1)}) S_{ijkl} (T^{(n-1)}) s_{kl}^{(n-1)}.$$

На  $p$ -м шаге внутренней итерационной процедуры величины  $\Delta z^{(n,p)}$  и  $h_{kl}^{(n,p)}$  определяем методом Зейделя. Суть данного метода заключается в последовательном уточнении компонент приращения девиатора деформации  $\Delta e_{ij}^{(n,p)}$ , входящего в выражения для этих величин.

$$\Delta z^{(n,p)} = \frac{1}{f(\xi^{(n-1)})} \sqrt{\frac{2}{3} (\Delta e_{11}^{(n,p)} \Delta e_{11}^{(n,p)} + \dots + \Delta e_{23}^{(n,p-1)} \Delta e_{23}^{(n,p-1)}) + m^2 \Delta \theta^{(n)2}},$$

$$h_{kl}^{(n,p)} = h_{kl}^{(n-1,p)} e^{-a \Delta z^{(n,p)}} + 2 \frac{\mu(T^{(n-1)})}{a(T^{(n-1)})} \frac{de_{ij}}{dz'} \Big|_{z^{(n)}} \cdot \left[ z^{(n)} - \left( z^{(n-1)} - \frac{1}{a(T^{(n-1)})} \right) e^{-a \Delta z^{(n,p)}} - \frac{1}{a(T^{(n-1)})} \right].$$

В исходном приближении для  $p=1$  полагаем  $\Delta \varepsilon_{ij}^{(n,1)} = \Delta \varepsilon_{ij}^{(n-1,p)}$ , в качестве критерия останова внутренней итерационной процедуры принимаем следующее неравенство  $|\Delta \varepsilon_{ij}^{(n,p)} - \Delta \varepsilon_{ij}^{(n,p-1)}| \leq 0,001 \cdot |\Delta \varepsilon_{ij}^{(n,p)}|$ .

Текущие значения основных величин определяем как

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(n)} &= \sigma_{ij}^{(n-1)} + \Delta \sigma_{ij}^{(n)}, & T^{(n)} &= T^{(n-1)} + \Delta \theta^{(n)}, & \varepsilon_{ij}^{(n)} &= \varepsilon_{ij}^{(n-1)} + \Delta \varepsilon_{ij}^{(n,p)}, \\ h_{ij}^{(n)} &= h_{ij}^{(n-1)} + \Delta h_{ij}^{(n,p)}, & z^{(n)} &= z^{(n-1)} + \Delta z^{(n,p)}, & \xi^{(n)} &= \xi^{(n-1)} + \Delta \xi^{(n)}. \end{aligned}$$

В работе предложен вариант эндохронной теории пластичности для изотропных материалов при неизотермических условиях нагружения. Получены определяющие соотношения в интегральном и дифференциальном виде. Приведен алгоритм их численного решения.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования России (код проекта №0705-2023-0012 (FSFN-2023-012))*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бондарь В.С. *Неупругость. Варианты теорий*. М.: Физматлит, 2004. 144 с.
2. Chaboche J.L. *A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. International Journal of Plasticity*. 2008. P. 1642-1693.
3. Valanis K.C. *A theory of viscoplasticity without a yield surface. Archives of Mechanics*. 1971. Vol. 23. № 4. P. 517-551.
4. Кувыркин Г.Н. *Термомеханика деформируемого твердого тела при высокоинтенсивном нагружении*. М.: Изд-во МГТУ, 1993. 142 с.

5. Сарбаев Б.С. *Определяющие соотношения для высокотемпературных композиционных материалов на основе эндохронной теории термопластичности*. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 7. С. 97-104.

6. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели термомеханики*. М.: Физматлит, 2002. 168 с.

7. Галанин М.П. *Методы численного анализа математических моделей*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.

## ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОГИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

А. А. Кутуков<sup>а</sup>, Н. А. Кудряшов<sup>б</sup>

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва;

<sup>а</sup>aakutukov@mephi.ru, <sup>б</sup>nakudryashov@mephi.ru

В настоящее время известно много методов для построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений. Среди них можно выделить метод простейших уравнений [1, 2], метод гиперболического тангенса [3], метод  $G'/G$  разложений [4], метод вспомогательных уравнений [5] и т.д. Необходимо заметить, что большинство из этих методов позволяет находить одни и те же решения, но записанные в разной форме. Использование систем компьютерной алгебры при построении точных решений зачастую приводит к громоздким формулам. По этой причине в современной литературе можно встретить множество публикаций, описывающих нахождение «новых» точных решений для хорошо изученных нелинейных дифференциальных уравнений. На самом деле эти решения сводятся к известным путём переобозначения произвольной постоянной. Примеры таких работ приводятся в [6].

Данная работа посвящена применению системы компьютерной алгебры Maple для построения точных решений эволюционных нелинейных дифференциальных уравнений полиномиального вида

$$E(u(x, t), u_t(x, t), u_x(x, t), u_{xx}(x, t), \dots) = 0. \quad (1)$$

при помощи метода простейших уравнений [1] с использованием метода логистической функции [7]. Выбранный подход для автоматического построения точных решений имеет ряд преимуществ перед известными методами нахождения точных решений. Метод простейших уравнений является универсальным методом, который обобщает многие другие методы построения точных решений, а также хорошо алгоритмируется [7]. В качестве простейшего уравнения выбираются уравнения меньшего порядка, чем изучаемое дифференциальное уравнение. Рассмотрим, например, в качестве простейшего уравнение Риккати

$$Q_z = a(Q - Q^2), \quad (2)$$

имеющее решение в виде логистической функции

$$Q(z) = \frac{1}{1 + e^{-az}}. \quad (3)$$

На рис. 1 представлена блок-схема алгоритма построения точных решений. Представленный алгоритм реализован в виде программы в системе компьютерной алгебры Maple.

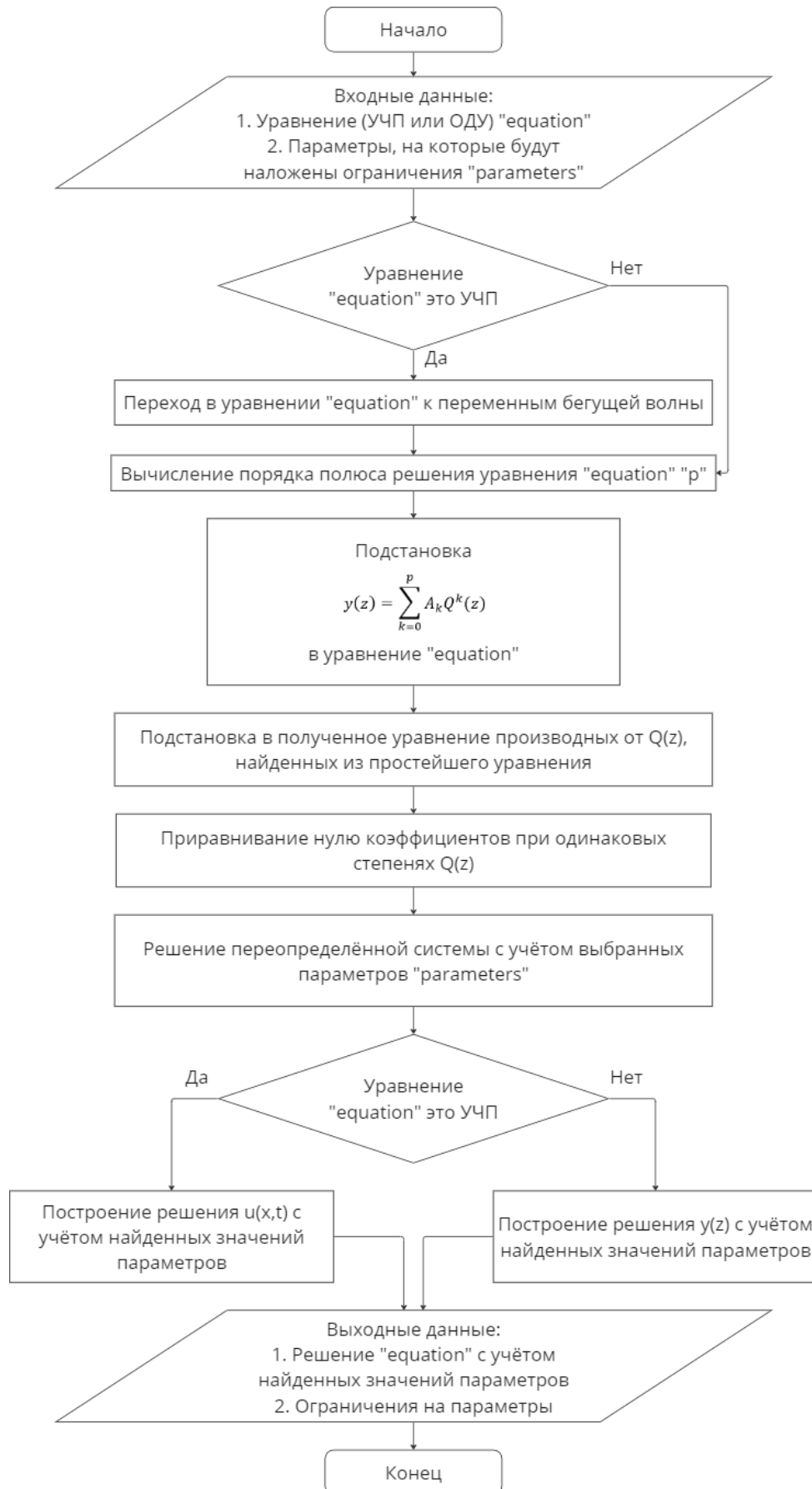


Рис. 1. Блок-схема алгоритма построения точных решений дифференциальных уравнений методом простейших уравнений с использованием логистической функции



Программный код протестирован на многих известных дифференциальных уравнениях в переменных бегущей волны, среди которых обобщённые нелинейные уравнения Шрёдингера, уравнение Курамото-Сивашинского, уравнения из иерархии Кортевега-де Вриза и др. Были получены известные решения в виде уединённых волн. Разработанная программа может быть использована исследователями в целях построения точных решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких степеней и высокого порядка.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-41-00070).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kudryashov N.A. *Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations*. Chaos, Solitons & Fractals. 2005. V. 24. № 5. P. 1217-1231.
2. Kudryashov N.A. *Method for finding highly dispersive optical solitons of nonlinear differential equations* Optik. 2020. V. 206. P. 163550.
3. Parkes E.J., Duffy B.R. *An automated tanh-function method for finding solitary wave solutions to non-linear evolution equations*. Computer physics communications. 1996. V. 98. № 3. P. 288-300.
4. Wang M., Li X., Zhang J. *The  $(G' G)$ -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics*. Physics Letters A. 2008. V. 372. № 4. P. 417-423.
5. Jiong S. et al. *Auxiliary equation method for solving nonlinear partial differential equations*. Physics Letters A. 2003. V. 309. № 5-6. P. 387-396.
6. Kudryashov N.A. *Seven common errors in finding exact solutions of nonlinear differential equations*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2009. V. 14. № 9-10. P. 3507-3529.
7. Kudryashov N.A. *Logistic function as solution of many nonlinear differential equations*. Applied Mathematical Modelling. 2015. V. 39. № 18. P. 5733-5742.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДОБАВЛЕНИЯ ЧАСТИЦ АЛЮМИНИЯ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ГАЗОВОЙ ДЕТОНАЦИИ В КАНАЛЕ С РАСШИРЕНИЕМ

С. А. Лаврук<sup>1, а</sup>, Т. А. Хмель, А. А. Афанасенков

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики

им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск; <sup>а</sup>lavruk@itam.nsc.ru

Интерес к детонационным процессам в смесях газов с реагирующими частицами органической и неорганической пылевзвесей обусловлен, прежде всего, вопросами взрыво- и пожаробезопасности. Также одна из возможных перспектив использования смесей, состоящих из реагирующих газовых смесей с добавлением реагирующих частиц, это энергетические установки с детонационным сгоранием топлива, где существует необходимость поиска способов управления процессами распространения детонационных волн.

В настоящей работе на основе физико-математической модели гибридной детонации с описанием химических реакций в рамках приведенной кинетики исследуются процессы распространения детонации в плоских каналах с участком линейного расширения. Ранее в работах [1, 2] рассматривалось распространение гетерогенной детонации частиц алюминия в каналах с линейным расширением. Были определены критические условия распространения детонации. В [3, 4] численно и экспериментально рассматривалось распространение газовой детонации в трубах и каналах с расширением.

Физико-математическая модель является развитием и обобщением модели гетерогенной детонации газовой взвеси частиц алюминия [5, 6] с учетом модели горения газовой смеси водород-воздух, развитой в работах [7, 8].

В данной работе рассматривалась следующая задача: в плоском канале с непроницаемыми гладкими теплоизолированными стенками располагается участок линейного расширения (рис. 1). Инициирование детонации моделируется с помощью разрыва диафрагмы, отделяющей камеру высокого давления (КВД) 1 от участка 2, заполненного смесью водорода, кислорода и аргона. Ударная волна из КВД способствует воспламенению водорода и распространяется далее на участок 3, занятый гибридной смесью с добавлением частиц алюминия. На участке 3 происходит воспламенение частиц алюминия, формирование и установление гибридной детонации, которая затем переходит в расширяющуюся область 4.

Задача решается численно на равномерной конечно-разностной сетке. В качестве базовой схемы для газовой фазы используется схема класса TVD Хартена-Лакса, для частиц – схема Джентри-Мартина-Дэйли, представленные в [9]. Для ускорения расчетов применялось распараллеливание используемого программного кода с помощью библиотек OpenMP.

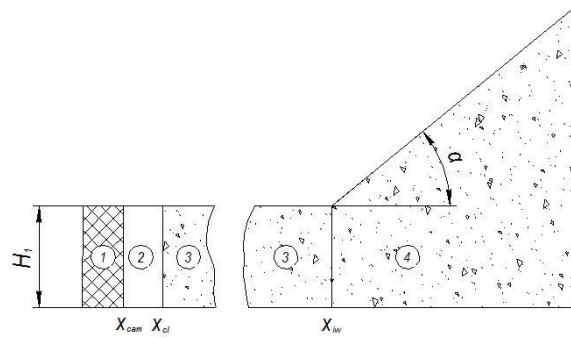


Рис. 1. Схема расчётной области

Расчеты проводились для водород-кислородной смеси с избытком кислорода, разбавленной аргоном ( $0.72\text{H}_2 + \text{O}_2 + 2.58\text{Ar}$ ), начальное давление принималось равным 0.26 атм. Детонация инициировалась за счет разрыва диафрагмы, отделяющей камеру высокого давления (КВД). Параметры камеры: длина 1 см,  $p_{\text{КВД}} = 20$  атм,  $T_{\text{КВД}} = 3000$  К, состав газа в КВД – водяной пар, аргон.

На рис. 2 приведены картины истории максимального давления (рис. 2 а) и численного шпирена (рис. 2 б), на которых видно, что в расширяющейся части произошел срыв детонационного течения и лидирующая ударная волна отделяется от фронта горения.

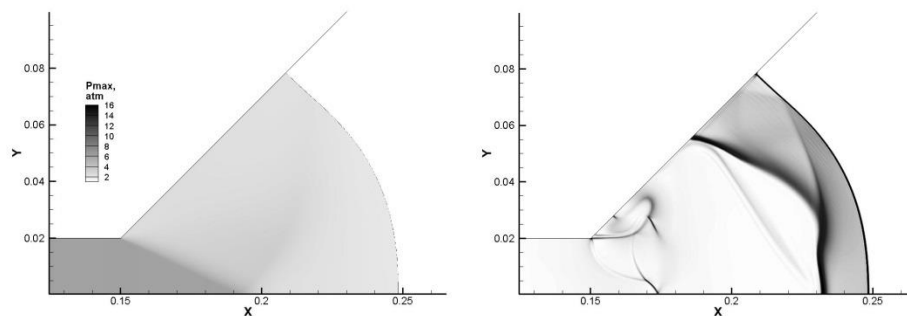


Рис. 2. Картины течения в газовой смеси  $0.36\text{H}_2 + \text{O}_2 + 2.58\text{Ar}$ : поле истории максимального давления (а), численный шпирен на момент  $t = 0.18$  мс (б)

Добавление частиц алюминия диаметром 1 мкм и плотностью  $3 \text{ г/м}^3$  способствует ре-иницированию детонации в сильной поперечной волне, распространяющейся поперек канала (рис. 3).

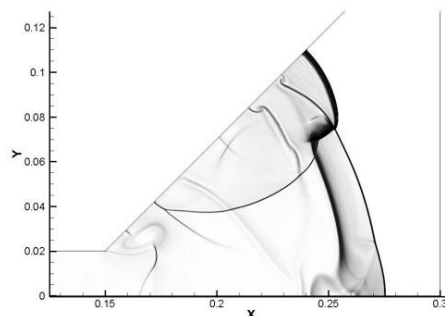


Рис. 3. Картины течения гибридной детонации  $0.72\text{H}_2 + \text{O}_2 + 2.58\text{Ar} + \text{Al}$ ,  $d_2 = 1 \text{ мкм}$  и  $\rho_2 = 3 \text{ г/м}^3$ , численный шпирен при  $t = 0.22$  мс

Таким образом, добавление небольшого количества реагирующих частиц способствуют сохранению детонационного режима течения в канале с линейным расширением в условиях, когда в газовой смеси без частиц происходит срыв детонации.

*Работа выполнена в рамках государственного задания (номер гос. регистрации 121030500163-4).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Fedorov A.V., Lavruk S.A. *Mathematical modeling of melting of alumina nanoparticles*. AIP Conference Proceedings. 2018. (020026). P. 020026.
2. Lavruk S.A., Khmel T.A. *Regimes and critical conditions of detonation propagation in expanding channels in gas suspensions of ultrafine aluminum particles*. Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2021. № 71. P. 104476.
3. Vasilev A.A., Trotsyuk A.V., Fomin P.A., Vasiliev V.A., Rychkov V.N., Desbordes D. *The Basic Results on Reinitiation Processes in Diffracting Multifront Detonations. Part I*. Eurasian ChemTech Journal. 2003. V. 5. P. 279-289.
4. Khasainov B.A., Presles H.N., Desbordes D., Demontis P., Vidal P. *Detonation diffraction from circular tubes to cones*. Shock Waves. 2005. № 3(14). P. 187-192.
5. Fedorov A.V. *Structure of the heterogeneous detonation of aluminum particles dispersed in oxygen*. Combustion, Explosion, and Shock Waves. 1992. № 3(28). P. 277-286.
6. Khmel T.A., Lavruk S.A. *Detonation flows in aluminium particle gas suspensions, inhomogeneous in concentrations*. Journal of Loss Prevention in the Process Industries. 2021. № 72. P. 104522.
7. Bedarev I.A., Rylova K.V., Fedorov A.V. *Application of detailed and reduced kinetic schemes for the description of detonation of diluted hydrogen-air mixtures*. Combustion, Explosion and Shock Waves. 2015. № 5(51). P. 528-539.
8. Tropin D.A., Bedarev I.A. *Problems of Detonation Wave Suppression in Hydrogen-Air Mixtures by Clouds of Inert Particles in One- and Two-dimensional Formulation*. Combustion Science and Technology. 2021. № 2(193). P. 197-210.
9. Хмель Т.А., Федоров А.В. *Численные технологии исследования гетерогенной детонации газозвесей*. Матем. моделирование. 2006. № 8(18). С. 49-63.

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОСТИ ВНУТРИКАНЕВОЙ ЖИДКОСТИ НА МЕХАНИЧЕСКИЙ ОТКЛИК ПРОКСИМАЛЬНОГО ОТДЕЛА БЕДРЕННОЙ КОСТИ ЧЕЛОВЕКА

А. А. Лапина<sup>1, а</sup>, Г. М. Еремина<sup>1, б</sup>, Е. В. Шилько<sup>1, с</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;

<sup>а</sup>annlanna@ispms.ru; <sup>б</sup>anikeeva@ispms.ru; <sup>с</sup>shilko@ispms.ru

В последнее десятилетие эффективным подходом к изучению механического поведения элементов костного скелета человека стало компьютерное моделирование с использованием связанных моделей, учитывающих динамику и взаимное влияние пористого костного каркаса и интерстициальной (поровой) жидкости. Связанные модели применяются, в частности, для оценки динамической жесткости и прочности проксимального отдела бедренной кости при нагрузках различного вида и интенсивности. Начиная с конца 1990-х годов, общепринятой основой связанных компьютерных моделей является теория пороупругости Био, эффективно учитывающая механическое взаимодействие поровой жидкости и пористой костной ткани в линейном приближении [1, 2].

Ввиду высокой текучести жидкой фазы ее механические свойства во многом определяют эффективные механические свойства костной ткани, особенно при динамических нагрузках с характерными скоростями 0.1 – 1 м/с, отвечающих различным видам двигательной активности человека. Важно отметить, что получение надежных экспериментальных данных о реологических свойствах тканевой жидкости осложняется малым размером каналов костных тканей. Поэтому в качестве параметров жидкости, циркулирующей в костных тканях, в ранних работах использовались свойства солёной воды. Эта тенденция сохраняется и в современных работах по численному моделированию. Однако вопрос о точности такого приближения остается открытым.

Данная работа посвящена численному изучению влияния вязкости жидкости на механический отклик модели проксимального отдела тазобедренной кости человека. Выбор данного элемента костного скелета в качестве объекта исследования определяется, в частности, тем, что в процессе двигательной активности человека тазобедренные кости претерпевают разнообразные нагрузки, а нарушения анатомической целостности этой области (трещины и переломы) с трудом поддаются лечению. Использовалась связанная модель пороупругой среды, базирующаяся на теории Био и реализованная в рамках численного метода однородно деформируемых проницаемых дискретных элементов [3].

В работе варьировались значения вязкости жидкости в интервале от вязкости пресной воды до верхнего предела, соответствующего синовиальной жидкости. При этом плотность и модуль всестороннего сжатия жидкости обоснованно полагаются постоянными, приблизительно соответствующими характеристикам воды:  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $K = 2,3 \text{ ГПа}$ .

Закладываемые в модель свойства костных тканей проксимального отдела бедренной кости человека приведены в табл. 1 и 2.

Таблица 1. Макроскопические характеристики костных тканей тазобедренной кости человека

Тип костной ткани	Модуль Юнга $E$ , ГПа	Коэф. Пуассона $\nu$	Плотность $\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	Предел прочности на сжатие $\sigma_c$ , МПа	Предел прочности на растяжение $\sigma_t$ , МПа
Губчатая	3	0,24	600	17	11
Кортикальная	15	0,30	1760	150	90

Таблица 2. Микроскопические характеристики костных тканей тазобедренной кости человека

Тип костной ткани	Модуль Юнга $E_s$ , ГПа	Коэф. Пуассона $\nu_s$	Открытая пористость $\varphi$ , %	Диаметр каналов $d_{ch}$ , м	Вязкость $\eta$ , Па·с	
					Воды	Синовиальной жидкости
Губчатая	15	0,25	73	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-3[6]}$	$3 \cdot 10^{-3} - 40$
Кортикальная	18	0,30	4	$3,16 \cdot 10^{-8}$		

Трехмерная дискретно-элементная модель бедренной кости подвергалась одноосному сжатию в интервале скоростей **0.1 – 1 м/с** до достижения нагрузки в 3,5 кН, характерной для бега трусцой.

На основе анализа полученных данных о пространственном распределении средних напряжений, концентраций объемных и касательных напряжений и порового давления (рис. 1), определены максимумы и минимумы этих параметров напряженного состояния проксимального отдела при разных значениях вязкости жидкости и скорости нагружения.

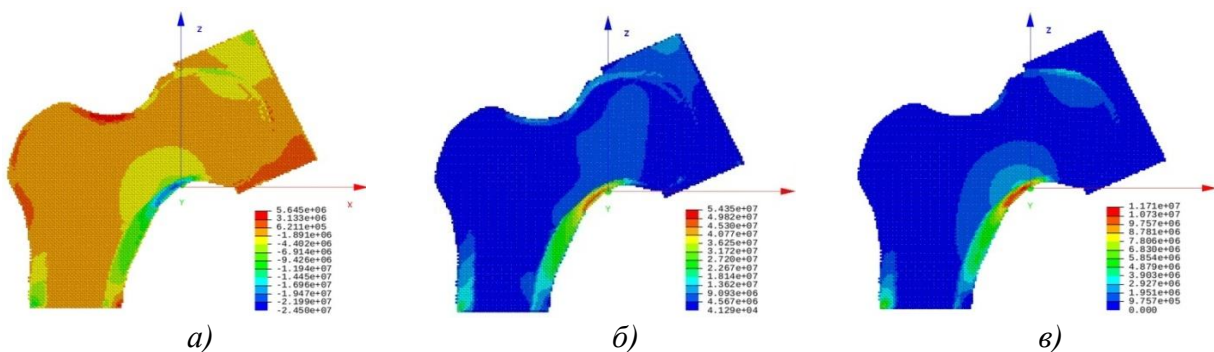


Рис. 1. Пример визуализации полученных пространственных распределений средних напряжений (а), концентраций объемных и касательных напряжений (б) и порового давления (в)

Результаты моделирования показали, что при увеличении вязкости жидкости имеет место сходимость максимумов порового давления (рис. 2 а), а также максимумов средних сжимающих напряжений (рис. 2 б).

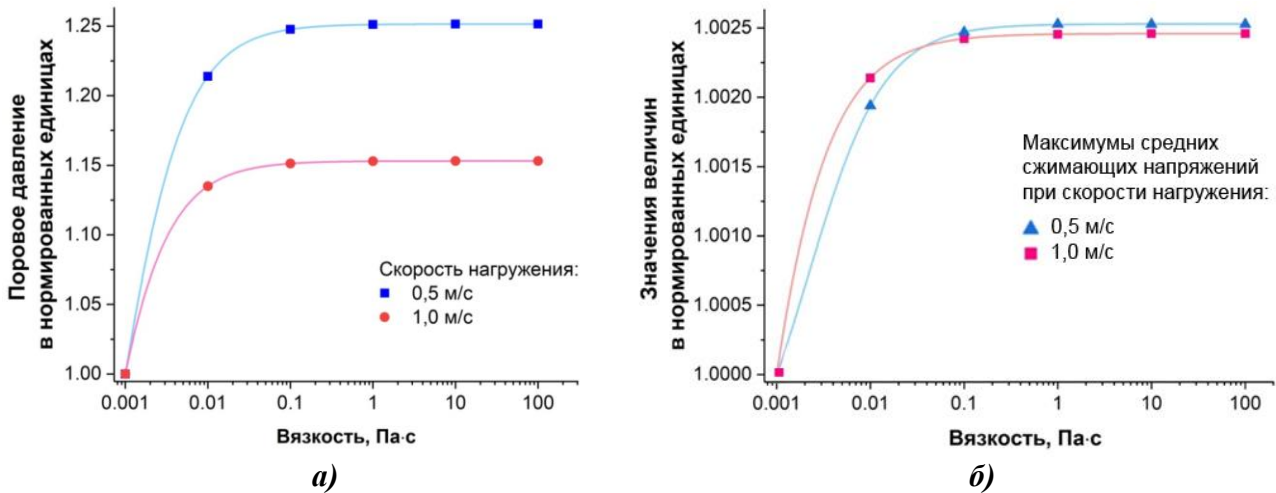


Рис. 2. Зависимость максимального порового давления (а) и максимумов средних сжимающих напряжений (б) в нормированных единицах от вязкости жидкости при скоростях нагружения 0,5 м/с и 1 м/с

Можно видеть, что с ростом вязкости жидкости максимальная величина порового давления возрастает на 15–25 %. Однако изменение порового давления в таких пределах вносит малый вклад в изменение характерных значений средних напряжений, а также максимумов объемных и касательных напряжений. С увеличением вязкости их прирост составляет в пределах 0,1–0,3 %.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что использование вязкости солёной воды не приводит к значимым изменениям результатов численной оценки напряженно-деформированного состояния костных тканей вплоть до скоростей нагружения несколько м/с. Это свидетельствует об обоснованности использования приближения соленой воды при анализе динамических механических свойств проксимального отдела тазобедренной кости при типичных видах двигательной активности человека.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН, тема FWRW-2021-0002.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cowin S.C. *Bone poroelasticity*. J Biomech. 1999. P. 217-238.
2. Cheng A.H.-D. *Poroelasticity*. Berlin: Springer Cham. 2016.
3. Psakhie S.G., Dimaki A.V., Shilko E.V., Astafurov S.V. *A coupled discrete element-finite difference approach for modeling mechanical response of fluid-saturated porous materials*. Int J Numer Methods Eng. 2016. V. 106. P. 623-643.

## НЕОДНОРОДНОСТЬ ДЕФОРМАЦИИ ГЦК МОНОКРИСТАЛЛОВ: ЭКСПЕРИМЕНТ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

*Д. В. Лычагин<sup>1,2,a</sup>, А. Ю. Никонов<sup>1,2,b</sup>, В. А. Романова<sup>2,c</sup>*

<sup>1</sup> *Национальный исследовательский Томский государственный университет;*

<sup>2</sup> *Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;*

<sup>a</sup>*dvl-tomsk@mail.ru,* <sup>b</sup>*anickonoff@ispms.ru,* <sup>c</sup>*varvara@ispms.tsc.ru*

В связи с необходимостью оценки поведения материала под нагрузкой важным является исследование протекающих при этом структурных изменений. Наряду с экспериментальным изучением возрастает роль численного моделирования процесса. В ряде случаев это позволяет получать информацию, недоступную к изучению имеющимися экспериментальными методами. Огромный объем экспериментальных данных и результатов моделирования показал, что фундаментальной закономерностью деформации является пространственно-временная неоднородность процесса, проявляющаяся на разных масштабных уровнях [1-5]. Неоднородность деформации обуславливается спецификой ее протекания в кристаллических твердых телах и может быть определена как организация деформации тела с внутренней дискретной структурой во внешних силовых и температурных полях. Здесь можно обратиться к фундаментальным основам кристаллографии – принципу Неймана и Кюри, который говорит, что при наложении поля на кристалл сохраняются лишь те элементы симметрии, которые являются общими для обоих. При этом отклик кристалла на воздействие проявляет вероятностный характер развития в локальной области кристалла и реализуется дискретным элементом, как частью его дискретного строения на микроуровне. Построение исследовательской работы по изучению неоднородности деформации предполагает проведение экспериментальных исследований разными методами на разных масштабных уровнях с получением статистически значимых результатов, позволяющих выявить степень неоднородности процесса и определить область локализации деформации и возможного разрушения. Проведение численного эксперимента требует привлечения различных методов моделирования. В данной работе обобщены результаты исследования неоднородности деформации сжатием ГЦК монокристаллов металлов и однофазных сплавов и показаны возможности моделирования процессов их деформации методами молекулярной динамики (ММД) и конечных элементов (МКЭ).

Самоподобие процессов деформации в кристаллических твердых телах на разных масштабных уровнях позволяет использовать метод молекулярной динамики для анализа процессов в дислокационной подсистеме и развития сдвига [8, 9]. Моделирование в рамках метода молекулярной динамики проводилось с использованием программного пакета LAMMPS. В настоящей работе использован потенциал, построенный в рамках метода погруженного



атома. Моделируемый кристаллит представлял собой параллелепипед размерами  $30a \times 60a \times 30a$  вдоль направлений X, Y, и Z лабораторной системы координат, где  $a$  – параметр решётки для заданного материала. Рассматривались образцы алюминия, никеля, меди и алюминиевой бронзы со следующими ориентациями кристаллической решётки: ось сжатия  $\langle 001 \rangle$  и боковые грани  $\{110\}$ ; ось сжатия  $\langle 110 \rangle$ , боковые грани  $\{110\}$  и  $\{001\}$ , ось сжатия  $\langle 111 \rangle$ , боковые грани  $\{110\}$  и  $\{112\}$  и ось сжатия  $\langle 112 \rangle$ , боковые грани  $\{110\}$  и  $\{111\}$ . Нагружение задавали путём движения с постоянной скоростью 2,5 м/с двух слоёв атомов толщиной 3 параметра решётки и протяжённостью 60 параметров решётки, расположенных в плоскости X0Z над и под образцом и имитирующих пуансоны испытательной машины. Для боковых граней моделируемого образца задавались свободные граничные условия или моделировалось дополнительное нагружение, имитирующее стеснённые условия. Для идентификации дефектов кристаллической решётки использовался алгоритм DXA программы OVITO.

Моделирование подтвердило основные факторы, влияющие на неоднородность протекания деформации, и показало качественное согласие с экспериментом. Тенденция к образованию деформационных доменов также прослеживается, но получение полной картины ограничено малостью моделируемого объема. Выявлена роль свободной поверхности. Получены важные результаты о закономерностях деформации на уровне дислокационной подсистемы. Установлено, что наряду со скольжением индивидуальных дислокаций и анализом дислокационных взаимодействий, в скольжении принимают участие дислокационные комплексы. Их структура, подвижность и вероятность образования зависят от кристаллографической ориентации [10, 11]. Моделирование показало ограниченность возможности метода для анализа упрочнения. Метод дает хорошие результаты для анализа закономерностей сдвига, механизма образования дефектов, позволяет получить значения предела упругости и упругих модулей. Последнее важно для процедуры калибровки параметров в методе конечных элементов.

Моделирование МКЭ выполняется для модельных монокристаллов той же геометрии и ориентации, что и у экспериментальных образцов. Прямоугольная геометрическая модель  $3 \times 6 \times 3$  мм<sup>3</sup> аппроксимирована регулярной сеткой, состоящей из 432 000 шестигранных элементов. Для изучения эволюции полей напряжений-деформаций в монокристаллах при сжатии краевая задача решена численно в динамической формулировке. Она включает в себя управляющие уравнения сохранения массы и импульса и решается численно с использованием программного пакета ABAQUS/Explicit FE, где определяющая модель реализована с помощью пользовательской подпрограммы VUMAT. Временной шаг выбирается таким образом, чтобы удовлетворять условию Куранта-Фридрихса-Леви [12].

Результаты моделирования МКЭ позволили обсудить механические аспекты фрагментации кристаллов. Если в ММД мы наблюдаем одиночные сдвиги от концентраторов напряжений, то в МКЭ наблюдаем фронты

пластической деформации. Скорость деформации внутри фронтов на порядок выше средней скорости деформации. Моделирование показывает закономерности развития неоднородности деформации и область ее предпочтительного протекания. Напряжения сжатия, превалирующие на первой стадии деформации, уступают растягивающим компонентам.

Таким образом, ограниченные возможности ММД, вследствие малости объема моделирования, преодолеваются путем моделирования МКЭ. В то же время ММД дает важную информацию о деталях процесса, позволяет получить расчетные параметры, которые наряду с экспериментальными важны для МКЭ. Использование двухуровневого моделирования ММД и МКЭ описывает закономерности неоднородности деформации и хорошо согласуется с экспериментальными данными деформации ГЦК монокристаллов металлов и однофазных сплавов.

*Экспериментальные исследования выполнены на оборудовании ТР ЦКП НИ ТГУ. Центр поддержан Грантом Министерства науки и высшего образования РФ №. 075-15-2021-693 (№ 13. ЦКП.21.0012). Моделирование выполнено в рамках темы государственного задания ИФПМ СО РАН (код темы FWRW-2021-0002).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Панин В.Е., Лихачев В.А., Гриняев Ю.В. *Структурные уровни деформации твердых тел*. Новосибирск: Наука, 1985.
2. Кенжалиев Б.К. и др. *Локализация пластической деформации и неравно-весные структурно-деформационные превращения*. Избранные труды-Алмааты, 2004.
3. Зуев Л.Б., Данилов В.И., Баранникова С.А. *Физика макролокализации пластического течения*. Новосибирск: Наука, 2008.
4. Третьякова Т.В., Вильдеман В.Э. *Пространственно-временная неоднородность процессов неупругого деформирования металлов*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016.
5. Зуев Л.Б. *Автоволновая пластичность. Локализация и коллективные моды*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2018.
6. Singh G., Waas A.M., Sundararaghavan V. *Understanding Defect Structures in Nanoscale Metal Additive Manufacturing via Molecular Dynamics*. Comput. Mater. Sci. 2021. V. 200. P. 110807.
7. Dan-Dan Cui, Liang-Chi Zhang. *Nano-machining of materials: understanding the process through molecular dynamics simulation*. Adv. Manuf. 2017. V. 5. P. 20-34.
8. Lychagin D.V. et al. *Crystallographic and Geometric Factors in the Shear Development in  $\langle 001 \rangle$  FCC Single Crystals: Molecular Dynamics Simulation and Experimental Study*. Crystals. 2020. V. 10(8). P. 666.
9. Nikonov A.Yu. et al. *Numerical Study and Experimental Validation of Deformation of  $\langle 111 \rangle$  FCC CuAl Single Crystal Obtained by Additive Manufacturing*. Metals. 2021. V. 11. P. 582.

10. Romanova V. et al. *Mechanical Aspects of Nonhomogeneous Deformation of Aluminum Single Crystals under Compression along [100] and [110] Directions*. Metals. 2022. V. 12. P. 397.

## МНОГОУРОВНЕВАЯ МОДЕЛЬ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

*И. В. Магнитский<sup>1</sup>, А. Э. Дворецкий<sup>1</sup>, С. В. Тащилев<sup>1</sup>, Е. С. Сергеева<sup>1</sup>*  
*<sup>1</sup>АО «Композит», Московская обл., Королев; info@kompozit-mv.ru*

В настоящее время в различных областях техники широкое распространение в качестве конструкционных и функциональных материалов получили композиционные материалы (композиты). В энергетической и химической отраслях промышленности для несущих элементов конструкций используют пространственно-армированные композиты на основе стержневых каркасов, например углерод-углеродные композиционные материалы (УУКМ) со схемой армирования 4ДЛ (в таком случае армирующий каркас представляет собой стержневую систему, состоящую из четырех семейств элементов, три из которых располагаются в параллельных плоскостях под углами  $120^\circ$  друг к другу, а четвертое – перпендикулярно им [1]). Также стоит отметить, что в УУКМ со схемой армирования 4ДЛ стержни являются не сплошным материалом, а множеством филаментов, связанных матрицей.

При проектировании несущих элементов конструкций из материалов такого класса особенно важно располагать достоверными оценками механических характеристик используемых материалов.

Так как пространственно-армированные композиционные материалы на основе стержневых каркасов относятся к структурно-чувствительным материалам, что подразумевает зависимость свойств материала в целом от свойств его компонентов – матрицы и армирующего каркаса, который в свою очередь также состоит из нескольких фаз, а именно, филаментов, связанных матрицей, то актуальной задачей является развитие методов многоуровневого моделирования свойств таких материалов.

В данной работе построена многоуровневая модель, описывающая механическое поведение пространственно-армированного композиционного материала, на примере УУКМ со схемой армирования 4ДЛ. Для построения данной модели на микроуровне использованы аналитические подходы (модель однонаправленного композита и гипотезы совместности в реализации, описанной в [2]), на мезоуровне использованы как аналитический метод (гипотеза совместности [2]), так и метод конечных элементов (МКЭ), микроуровень модели реализован с использованием МКЭ. Также в данной работе исследована область применения аналитической модели для описания свойств пространственно-армированного композита с учетом совместности свойств филаментов и матрицы, в которой использование такого подхода возможно с достаточной точностью, что позволит значительно сократить вычислительные ресурсы.

Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего построения моделей нелинейного поведения пространственно-армированных композиционных материалов, а также критериев прочности таких материалов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Магнитский И.В. *Структурный критерий прочности пространственно-армированных углерод-углеродных композиционных материалов*. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 3. С. 48-59.

2. Сарбаев Б.С. *Деформирование упругих многослойных композиционных материалов при трехосном напряженном состоянии*. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Машиностроение». 2005. С. 63-81.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЛОЕНИЯ АОРТЫ С АНЕВРИЗМОЙ

А. Е. Медведев<sup>1,2, а</sup>, А. Д. Ерохин<sup>1, в</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики  
им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск;

<sup>2</sup>Национальный медицинский исследовательский центр им. акад.

Е. Н. Мешалкина Минздрава России, Новосибирск;

<sup>а</sup>medvedev@itam.nsc.ru; <sup>в</sup>a.erokhin1@g.nsu.ru

Расслоение аорты представляет собой крайне тяжелую патологию сердечно-сосудистой системы. Схематично расслоение аорты человека показано на рис. 1. Расслоение аорты достаточно редкое, но потенциально опасное заболевание, встречается у 1 из 10000 госпитализированных больных. Однако значительная часть больных погибает на догоспитальном этапе – 3-4 % всех внезапных смертей от сердечно-сосудистых заболеваний [1]. Раннее клиническое распознавание расслоения аорты и оперативное вмешательство увеличивают шансы успешного лечения.

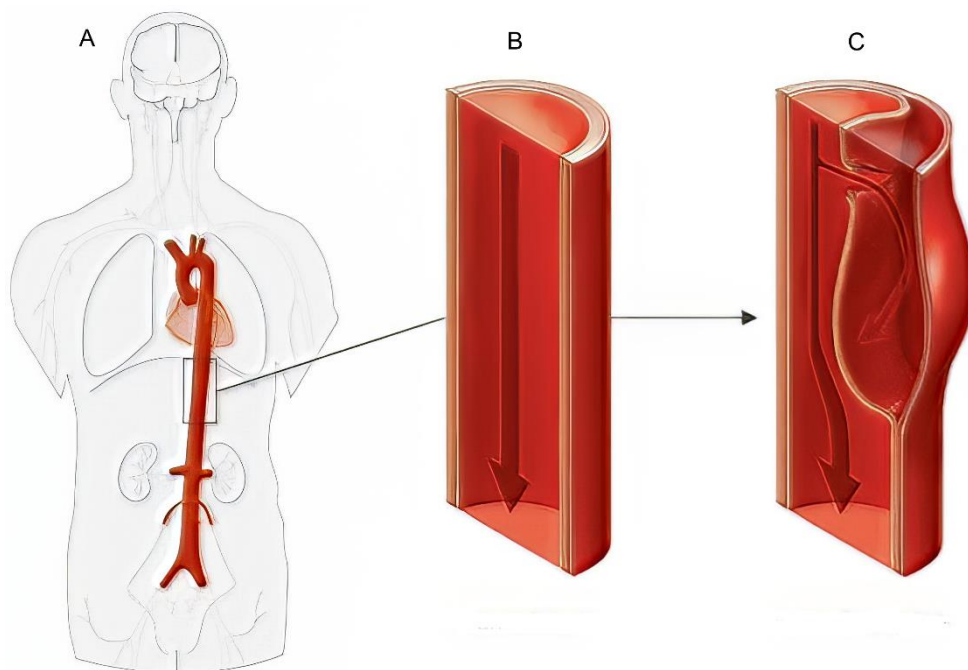


Рис. 1. А – положение аорты в организме человека;

В – течение крови в здоровой аорте; С – течение крови в аорте с расслоением

Одним из перспективных методов ранней диагностики является применение методов вычислительной математики для предсказания поведения стенок аорты при наличии патологий.

Аорта представляет собой кровеносный сосуд сложной формы [2], выходящий из левого желудочка сердца. Через аорту каждую минуту перекачивается от 5 до 10 литров крови. Аорта подвержена периодическим пульсовым нагрузкам на протяжении всей жизни человека. Многогранность

заболевания расслоения аорты обусловлена сложной структурой стенки аорты (рис. 2 А), состоящей из множества слоев оболочек и гладкомышечных клеток. С точки зрения механики структура стенки аорты представляет собой многослойную оболочку [3, 4], состоящую из нескольких слоев. Здесь можно выделить три основных слоя – интима, медиа (Media) и адвентиция (Adventitia). Интима почти не определяет механические свойства стенки аорты [5]. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать двухслойную модель аорты, состоящую из внутреннего (медиа) и внешнего (адвентиция) слоев (рис. 2 В).

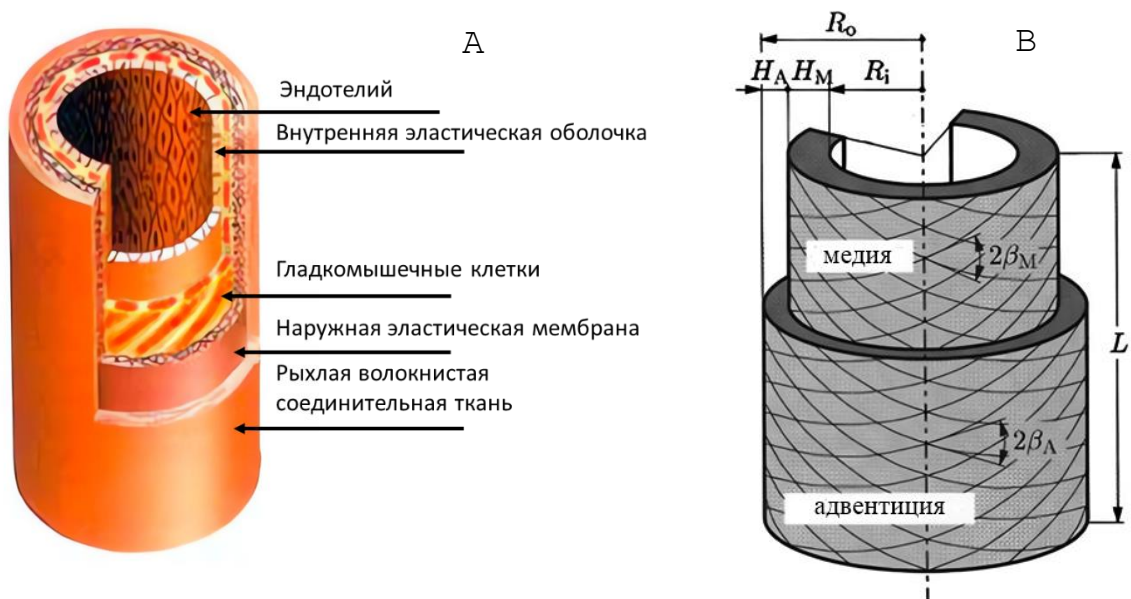


Рис. 2. А – подробная схема строения аорты;  
В – упрощенная схема строения аорты, используемая для расчетов

Для моделирования анизотропных свойств структур аорты применялась модель несжимаемого анизотропного материала Хольцапфеля – Гассера – Огдена (HGO модель) [6]. В этой модели считалось, что медиа и адвентиция представляют собой гиперупругие материалы, армированные двумя семействами волокон.

Гиперупругий материал определяется плотностью энергии упругой деформации, которая является функцией состояния упругой деформации. Ее часто называют плотностью энергии. Гиперупругая формулировка дает нелинейную зависимость между напряжением и деформацией, в отличие от закона Гука в линейной упругости. Каждый из слоев аорты в модели HGO является гиперупругим материалом, армированным двумя семействами коллагеновых волокон. Углы между коллагеновыми волокнами составляют угол  $2\beta_A$  и  $2\beta_M$  для адвентиции и медиа соответственно (рис. 2 В).

Проведены расчеты расслоения аорты при пульсовом течении крови по участку аорты. Методика расчета двухэтапная. Первый этап – расчет пульсового движения крови с неподвижной стенкой аорты. На втором этапе – по рассчитанному ранее давлению крови на внутреннюю стенку аорты рассчитывались деформации и напряжения в стенках аорты. Расчет стенок

аорты проводился в рамках модели НГО с армировкой каждого слоя коллагеновыми волокнами. Для внутреннего слоя учитывались вязкоупругость материала меди.

Часто расслоение аорты сопровождается аневризмой (локальное расширение аорты). Аневризмы сами по себе являются патологией сосудов и усугубляют состояние аорты.

На рис. 3 приведены картины деформации стенки сосуда с аневризмой при разрыве меди. Входная часть меди отслоилась от сосуда. Здесь отслоение произошло на 0.9 ширины меди (расслоение чаще всего происходит по меди). На рис. 3 А показана картина деформации стенки аорты в начальном состоянии (контур) и при максимуме пульсового давления. На рис. 3 В представлена картина напряжения в стенках аорты. Видно, что напряжения достигают максимума при входе в сосуд (при входе в сосуд давление крови максимальное и постепенно падает к концу фрагмента сосуда по закону Пуазейля). В аневризме давление также достигает максимальных значений, что доказывает опасность аневризмы даже при отсутствии расслоения аорты.

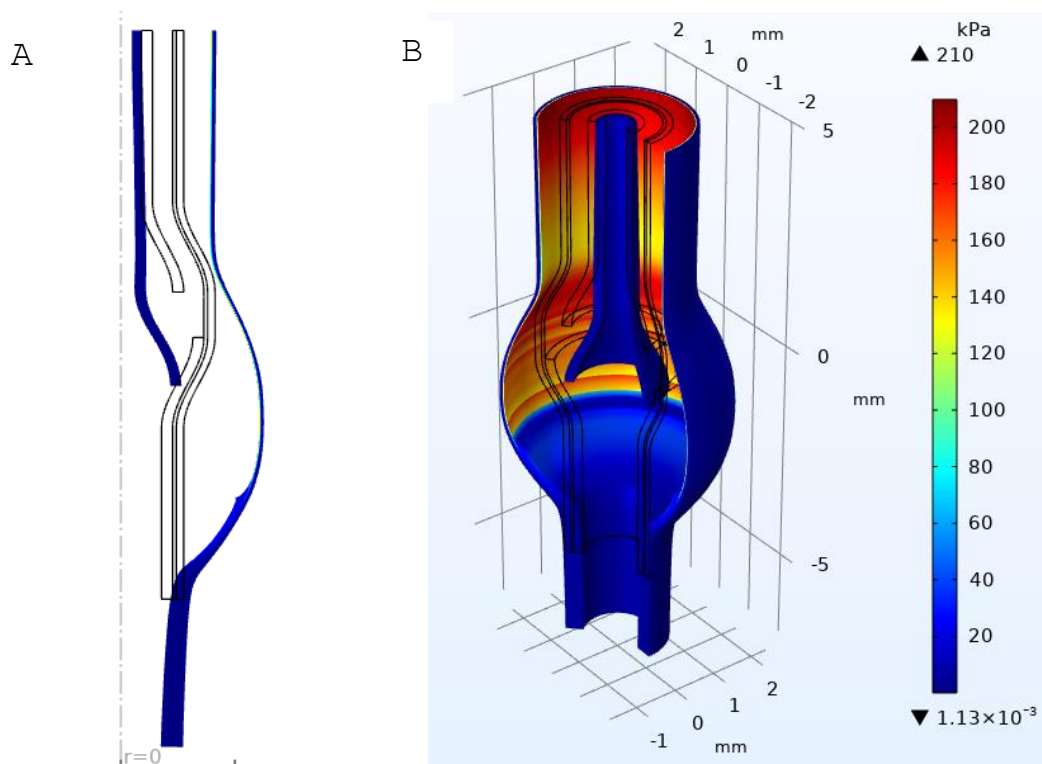


Рис. 3. Картина деформации стенок артерии при максимуме пульсового давления (разрыв 0.9 части меди с расслоением). Контуром обозначены недеформируемые стенки аорты, цветом – степень деформации аорты. А – деформация стенок аорты (продольное сечение); В – трехмерная картина напряжения стенок аорты

На рис. 4 показаны деформация сосуда (А) с аневризмой и разрывом меди. С увеличением ширины разрыва меди от 0 (нет разрыва) до 0.8 мм немонотонно увеличивается максимальное напряжение по Мизесу на внешней стенке сосуда. Увеличение напряжения по Мизесу увеличивает вероятность разрыва аорты.



Проведенные исследования показали опасность расслоения аорты для целостности сосуда. Даже небольшое расслоение внутреннего слоя аорты в 2 мм (рис. 4 В) приводит к трехкратному росту напряжения на внешней стенке аорты.

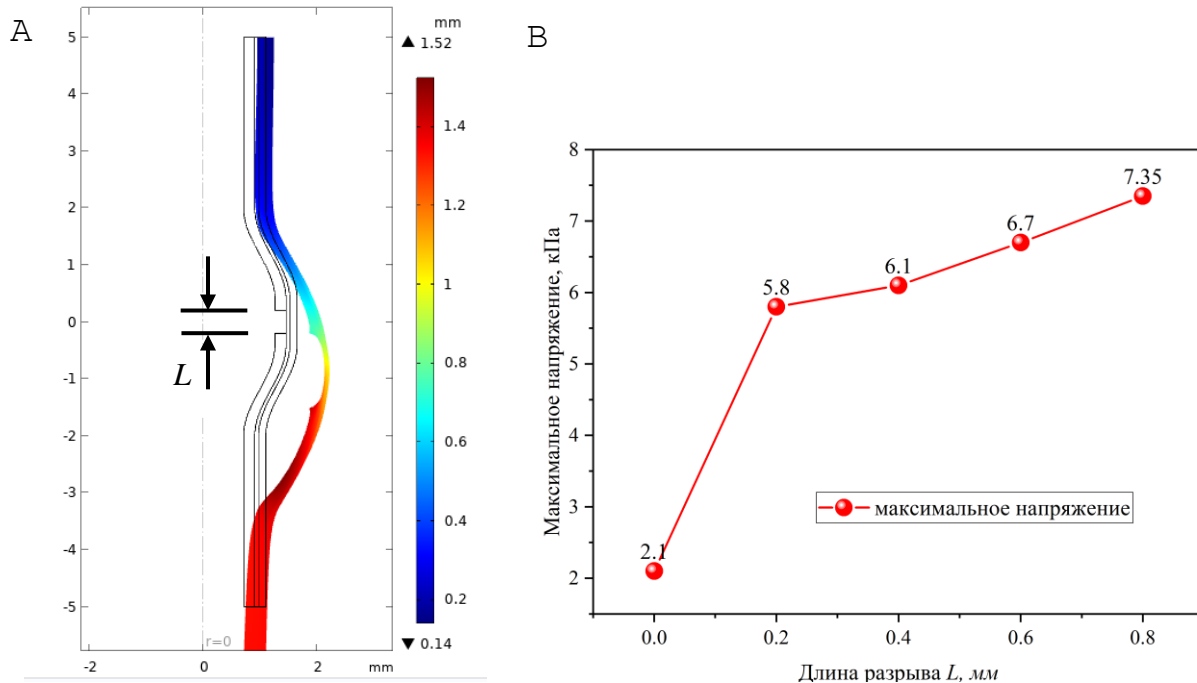


Рис. 4. Зависимость максимального напряжения по Мизесу на внешней стенке аорты в зависимости от длины разрыва меди. А – деформация аорты с аневризмой и разрывом меди при максимуме пульсового давления; В – график зависимости максимального напряжения по Мизесу от длины разрыва

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-15-20005).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Разумова Е.Т., Люсов В.А., Кокорин В.А. Расслоение аорты. Российский кардиологический журнал. 2001. Т. 31. № 5. С. 88-94.
2. Medvedev A.E. Construction of complex three-dimensional structures of the aorta of a particular patient using finite analytical formulas. Mathematical Biology and Bioinformatics. 2022. Vol. 17. No. S. P. t30-t41.
3. Багаев С.Н., Захаров В.Н., Маркель А.Л., Медведев А.Е., Орлов В.А., Самсонов В.И., Фомин В.М. Об оптимальном строении стенки кровеносных сосудов. Доклады Академии наук. 2004. Т. 398. № 3. С. 331-334.
4. Медведев А.Е., Самсонов В.И., Фомин В.М. О рациональной структуре кровеносных сосудов. ПМТФ. 2006. Т. 47. № 3. С. 24-30.
5. Melissano G. Aortic dissection: Patients true stories and the innovations that saved their lives. Milan, Italy: Edi. Ermes, 2016.
6. Holzapfel G.A., Gasser T C., Ogden R.W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models. Journal of Elasticity and the Physical Science of Solids. 2000. V. 61. № 1. P. 1-48.

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА С ТРЕМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

В. А. Медведев<sup>а</sup>, Н. А. Кудряшов<sup>б</sup>

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва;  
<sup>а</sup>viktormedvedev12115551@gmail.com <sup>б</sup>nakudr@gmail.com

## Аннотация

Рассмотрена задача о распространении импульса, описываемого нелинейным уравнением Шрёдингера с нелинейностью третьей, пятой и седьмой степеней. Найдены оптические солитоны рассматриваемого уравнения. Представлена область допустимых параметров модели. Реализованы и сравнены две численные схемы решения задачи о распространении импульса с периодическими граничными условиями. Исследован процесс распространения уединенной волны. Проведено моделирование процесса взаимодействия солитонного импульса с возмущением в начальных данных. Исследовано влияние высших степеней нелинейности на солитонные решения для нелинейного уравнения Шрёдингера. Выявлены два возможных типа поведения импульса под влиянием высших нелинейностей модели. В результате численного анализа доказана устойчивость оптических солитонов обобщённого нелинейного уравнения Шрёдингера.

## Введение

В настоящее время имеется ряд математических моделей, описывающих процессы распространения импульсов в оптической среде [1]. Обычно эти модели основываются на различных обобщениях уравнения Шрёдингера. В связи с этим возникает проблема исследования свойств, которыми обладают предложенные модели и допускаемые ими решения. В докладе представлено исследование обобщённого уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями [2]:

$$iu_t + au_{xx} + b_1|u|^2u + b_2|u|^4u + b_3|u|^6u = 0. \quad (1)$$

Начально-краевая задача рассмотрена с периодическими граничными условиями в виде:

$$u\left(-\frac{L}{2}, t\right) = u\left(\frac{L}{2}, t\right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(-\frac{L}{2}, t\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{L}{2}, t\right) \quad (3)$$

Аналитические решения для данного уравнения в виде бегущей волны найдены в работе [3], однако факт их устойчивости и свойства требуют дополнительного исследования. Рассмотрению этого вопроса посвящена данная работа.

### Аналитическое решение уравнения (1)

Переходя к переменным бегущей волны, с использованием метода простейших уравнений и метода неявных функций найдено решение исходного уравнения в виде однододового светлого оптического солитона [4]. Полученное решение  $u(x, t)$  определяется следующими формулами:

$$u(x, t) = y(\xi(z))e^{i(kx - \omega t - \theta_0)}, \quad z = x - c_0 \cdot t, \quad (4)$$

$$y(\xi) = \left[ M_0 + \frac{M_1}{1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)}} - \frac{M_1}{(1 + e^{\mu(\xi - \xi_0)})^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

$$z = z_0 + \frac{\xi}{M_0} + \frac{2M_1}{\mu M_0 \sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \operatorname{arctanh} \left( \frac{2e^{\mu(\xi - \xi_0)} M_0 + 2M_0 + M_1}{\sqrt{4M_0 M_1 + M_1^2}} \right). \quad (6)$$

### Сравнение численных методов для решения начально-краевой задачи для уравнения (1)

Для численного решения задачи разработан программный код с использованием конечно-разностного метода и псевдо-спектрального метода Фурье [5], позволяющих решить начально-краевую задачу для уравнения (1), с начальными и периодическими граничными условиями. Проведено сравнение реализованных численных схем. В результате сравнения установлено, что метод Фурье решает поставленную задачу с более высокой точностью, чем конечно-разностный метод, затрачивая больше времени.

### Численное моделирование процесса распространения уединённой волны

На рис. 1 представлено численное решение, соответствующее процессу распространения аналитически полученной уединённой волны. Проведённое моделирование показало, что волна является устойчивой.

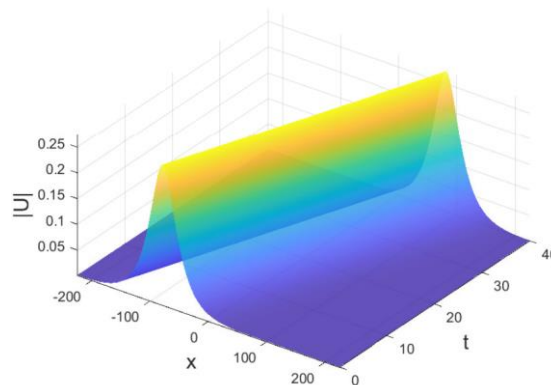


Рис. 1. Моделирование распространения оптического солитона

### Моделирование взаимодействия уединённой волны с возмущением в начальных данных

Проведено моделирование взаимодействия оптического солитона с возмущением в начальных данных. Решение на начальном временном слое задавалось в виде:

$$u(x, 0) = y(\xi(z)) \cdot e^{i(kx - \theta_0)} + Ae^{-v(x-x_0)^2}. \quad (7)$$

В результате моделирования обнаружено, что исследуемый солитон не распадается после взаимодействия, сохраняет свою форму и устойчив при дальнейшем распространении. Результаты численного решения приведены на рис. 2.

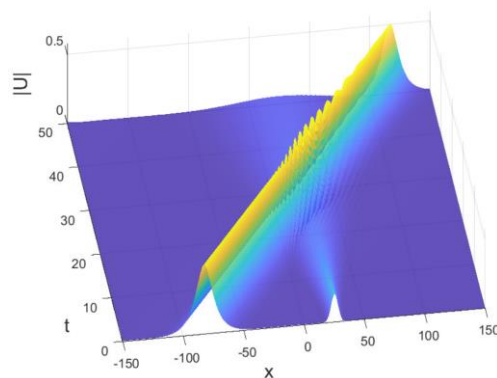


Рис. 2. Взаимодействие оптического солитона с возмущением

### Анализ влияния высших степеней нелинейности в уравнении (1)

Проведён анализ влияния высших степеней нелинейностей в нелинейном уравнении Шрёдингера (НУШ). Рассмотрено возмущенное НУШ в виде  $iu_t + u_{xx} + q|u|^2u + \varepsilon_1|u|^4u + \varepsilon_2|u|^6u = 0$ . Установлено, что влияние старших степеней нелинейности выражается в периодической самофокусировке при распространении, что иллюстрируется на рис. 3. Обнаружено, что существуют критические значения коэффициентов  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ , при превышении которых импульс после самофокусировки распадается. Обнаружено также, что менее интенсивные оптические солитоны НУШ к данным эффектам чувствительны в меньшей степени.

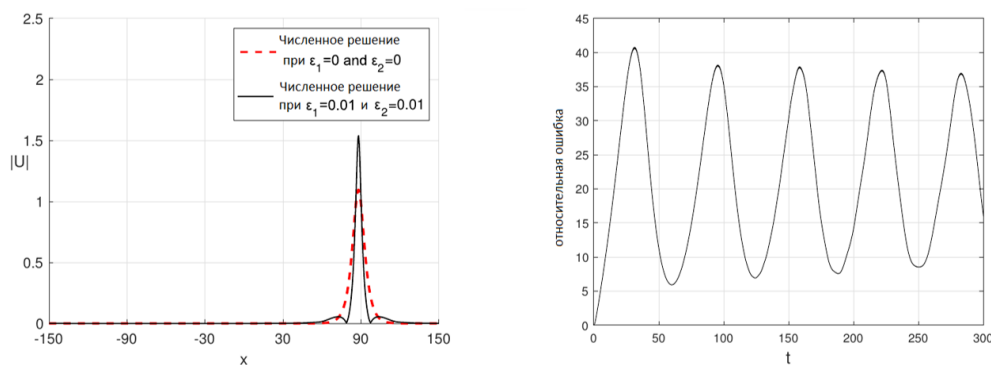


Рис. 3. Осциллирующий режим распространения импульса

### Заключение

В результате численного анализа уравнения Шрёдингера с тремя нелинейностями установлена устойчивость аналитических солитонных решений. Начальные условия заданы в виде неявной функции, что создало трудности при их задании. Проведено моделирование взаимодействия солитона с возмущением в начальных данных, подтверждена устойчивость импульса при взаимодействии. Проанализировано влияние высших степеней нелинейности в уравнении для оптических солитонов НУШ. Установлено, что данное влияние выражается в возможном переходе к осциллирующему режиму распространения импульса или его распаду при критических значениях параметров модели. Установлено, что импульсы меньшей интенсивности менее чувствительны к влиянию высших степеней нелинейности исходного уравнения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 23-41-00070).*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Kudryashov N.A. *General solution of the traveling wave reduction for the perturbed Chen-Lee-Liu equation*. *Optik*. 2019.
2. Kudryashov N.A. *Method for finding optical solitons of generalized nonlinear Schrodinger equations*. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*. 2022. Vol. 261. 169163.
3. Kudryashov N.A. *Highly dispersive solitary wave solutions of perturbed nonlinear Schrodinger equations*. *Applied Mathematics and Computation*. 2020. Vol. 371. 1249721.
4. Kudryashov N.A. *Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations*. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2004. V. 24. P. 1217-1231.
5. Weideman J.A.C., Herbst B.M. *Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrodinger equation*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1986. V. 23. №. 3. P. 485-507.

## НОВЫЕ КОМПОЗИТЫ С МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ ДЛЯ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ КОНСТРУКЦИЙ

*С. Т. Милейко*

*Институт физики твердого тела им. Осипьяна РАН, Черноголовка;  
mileiko@issp.ac.ru*

Конструкционные композиты появились на технической сцене во второй половине 60-х годов прошлого века. Их появление определялось необходимостью существенного повышения ТТХ летательных аппаратов, которого невозможно было достичь, оставаясь с металлическими сплавами, механические характеристики которых были близки к предельно возможным. Именно поэтому современные углеволокна были изобретены в RAЕ, британском аналоге ЦАГИ. Поэтому же благодаря известному Постановлению ЦК и Совмина начала 70-х годов о развитии композитов в СССР применение углепластиков в советской технике с соответствующим повышением ТТХ нисколько не отставало от зарубежных.

Сегодняшняя ситуация в области конструкционных материалов во многом аналогична ситуации примерно полувекковой давности. Лишь сегодня в роли металлических сплавов выступают углепластики, приближающиеся к пределу своих возможностей. Следующий качественный скачок в ТТХ машин и, прежде всего, – летательных аппаратов, может быть обеспечен новыми конструкционными материалами. Такими могут быть композиты с металлической матрицей (КММ), которые заменят стали, алюминиевые, титановые, никелевые сплавы в тех конструкциях, в которых углепластики или композиты с керамической матрицей неприменимы из-за недостаточно высоких рабочих температур, низких удельных величин прочности и упругих модулей, малой трещиностойкости.

Разрабатываемые в настоящее время угле-титановые композиты [1] для нормальных и повышенных температур и оксид-молибденовые композиты [2] для высоких и ультравысоких температур являются примерами новых неканонических структур композитов, сохраняющих принципиально важную особенность композитов с хрупким волокном и пластичной матрицей: их прочность и трещиностойкость растут «синхронно» [3] в отличие от металлических сплавов, для которых характерен конфликт между этими двумя механическими характеристиками [3, 4].

Армирование титановой матрицы непрерывным углеволокном оказалось возможным только с использованием промежуточной матрицы с пониженной, относительно титана, температурой плавления. Это исключает деградацию волокна в результате образования карбида титана, но приводит к сложной иерархической структуре композита (рис. 1), состоящей из основной матрицы титанового сплава и армирующего слоя, представляющего собой композит с промежуточной матрицей титаносодержащей эвтектики (это, в свою очередь, тоже композит) и углеволокон, покрытых тонким слоем карбида титана.



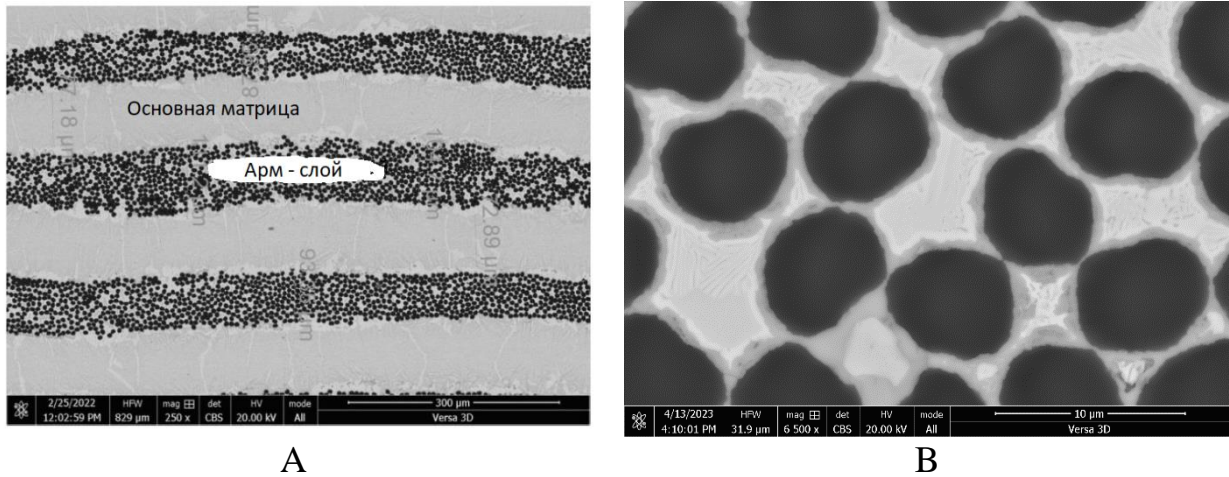


Рис. 1. А – макроструктура C-Ti композита;  
В – микроструктура армирующего слоя (Арм-слой на А)

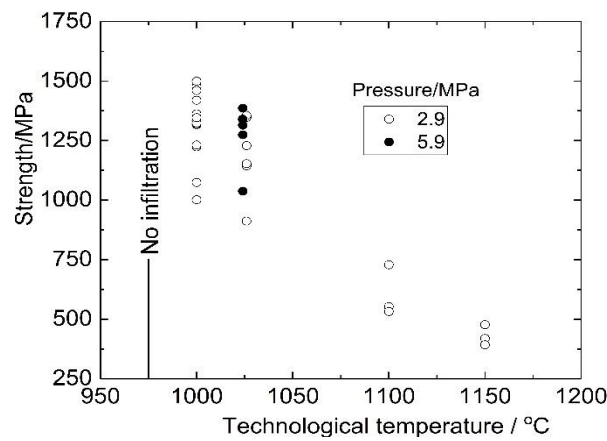


Рис. 2. Зависимость прочности угле-титанового композита с основной матрицей ВТ16 и волокнами UMT-40-3k от технологических параметров (температура и давление).  
Плотность композита  $\sim 3,7 \text{ г/см}^3$

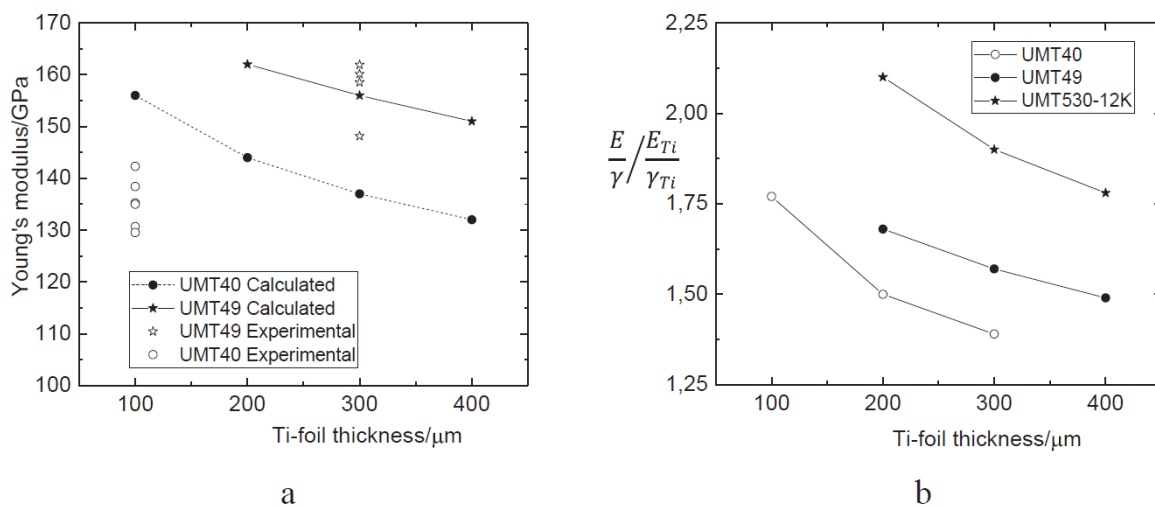


Рис. 3. А – расчетные величины модуля Юнга композитов с двумя типами углеволокна (растяжение) и экспериментальные данные, полученные в испытаниях на изгиб с перерезывающей силой в зависимости от толщины слоя основной матрицы; В – удельные величины модуля Юнга композитов, испытанных, и перспективных с высокомодульным волокном UMT-530

Механические свойства такого типа композитов зависят по крайней мере от восьми структурных параметров (в композите канонического типа таких параметров три), которые, в свою очередь, определяются технологическим режимом. В отсутствие надёжных моделей разрушения композитов иерархической структуры её оптимизация требует времени. Тем не менее уже на сегодняшнем этапе развития перспектива угле-титановых композитов достаточно очевидна. Примеры механических характеристик композитов, приведенные на рис. 2 и 3, – свидетельство тому.

Второй тип композитов – оксид-молибденовые структуры [2], получаемые разработанным десятилетия назад и обретшим новую жизнь методом внутренней кристаллизации [5], состоящие из матрицы активно разрабатываемых в течение последних трёх десятилетий в зарубежных лабораториях сплавов  $\text{Mo-Mo}_3\text{Si-Mo}_5\text{SiB}_2$ , отличающихся достаточно высоким сопротивлением окислению, но страдающих указанным выше конфликтом прочность-трещиностойкость [6] и различными оксидными волокнами. Показано, что эти композиты с плотностью существенно ниже плотности молибдена, характеризуются критическим коэффициентом интенсивности напряжений  $35\text{--}45 \text{ МПа}\cdot\text{м}^{1/2}$  и высокой крипостойкостью при температурах до  $1300 \text{ }^\circ\text{C}$  [2, 7].

*Представляемые в докладе новые результаты по угле-титановому композиту получены в рамках проекта Российского научного фонда № 23-19-00419.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mileiko S.T., Kolchin A.A., Krivtsov D.I., Galyshev S.N., Prokopenko N.A., Shakhlevich O.F., Petrova O.V. *Carbon-fibre/titanium-matrix composites of a hierarchical microstructure*, Composites Part A. 2022. 155. P. 106817.
2. Mileiko S.T., Kolchin A.A., Galyshev S.N., Shakhlevich O.F., Prokopenko V.M. *Oxide-fibre/molybdenum-alloy-matrix composites: A new way of making and some mechanical properties*, Composites Part A. 2020. V. 132. P. 105830.
3. Mileiko S.T. *Metal and Ceramic Based Composites*, Amsterdam, Elsevier. 1997.
4. Ritchie R.O. *The conflicts between strength and toughness*, Nature Materials. 2011. V. 10. P. 817-822.
5. Милейко С.Т., Казьмин В.И. *Получение композитов методом внутренней кристаллизации*. Механика композитных материалов. 1991. № 5. С. 898-908.
6. Krüger M., Jain P., Kumar K.S., Heilmaier M. *Correlation between microstructure and properties of fine grained Mo-Mo<sub>3</sub>Si-Mo<sub>5</sub>SiB<sub>2</sub> alloys*, Intermetallics. 2014. V. 48, P. 10-18.
7. Милейко С.Т. *Антони Келли и Композиты сегодня – Часть 2: Композиты с металлической матрицей*, Композиты и Наноструктуры, 2021, Т. 13, № 3-4, С. 59-107.



## ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УДАРНИКОВ С ГРАНУЛИРОВАННЫМИ СЛОЯМИ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ШАРИКОВ

И. А. Модин<sup>1, а</sup>, А. В. Кочетков<sup>1</sup>, М. Х. Абузьяров<sup>1</sup>, Вл. Вл. Баландин<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
Нижний Новгород;  
<sup>а</sup>mianet@mail.ru

Проведены эксперименты ударного взаимодействия полусферического и конусного оголовков с гранулированными слоями из стальных шариков. Используется экспериментальная методика обращенного эксперимента. Методика измерения силы сопротивления с помощью мерного стержня предназначена для определения интегральных нагрузок на начальном участке внедрения. Контейнер, заполненный стальными шариками, разгоняется в газодинамической пушке до скоростей порядка 100-200 м/с и наносит удар по неподвижному оголовку полусферической или конической формы, закрепленному на мерном стержне. Свойства материала стержня таковы, чтобы в нем не возникало пластических деформаций. В стержне формируется упругий импульс сжатия, который и регистрируется наклеенными тензорезисторами. Для предотвращения разлета металлических шариков и частей контейнера соударение происходит в вакуумной камере. Представленные результаты усреднены по количеству проведенных экспериментов для каждого вида оголовка. Существенное влияние на поведение сил сопротивления оказывает форма ударника. На рис. 1 изображены усредненные кривые сил сопротивления, регистрируемые на мерном стержне в зависимости от времени для двух видов оголовков. Кривые 1 и 2 – полусферический оголовок со стальным и свинцовым гранулированным слоем соответственно, кривые 3 и 4 – конусный оголовок с полным углом раствора  $60^\circ$  для стального и свинцового слоя соответственно. Скорость подлета контейнера с гранулированным слоем составляла  $\approx 160$  м/с, масса слоя была выбрана равной 400 грамм, что соответствовало толщине слоя 26 мм для свинцовых шариков и 38 мм для стальных.

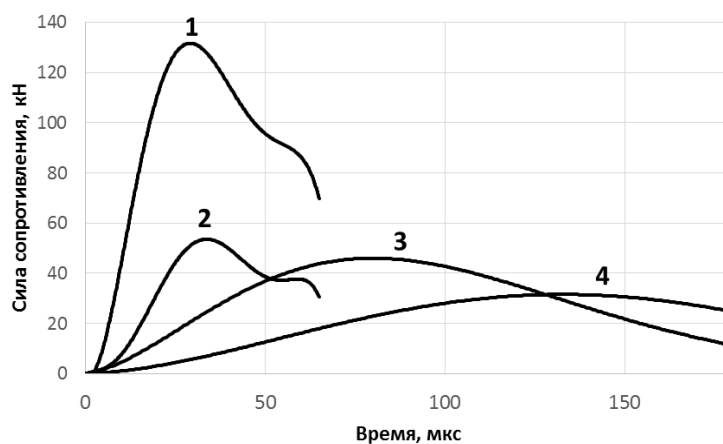


Рис. 1. Зависимости сил сопротивления от времени

Снижение импульсных и вибрационных нагрузок в ряде конструкций достигается за счет применения пористых элементов в виде гранулированных слоев, проволочных решеток, экранов, сеток, перфорированных перегородок и т.д. [1-15].

Приводятся экспериментально полученные диаграммы деформирования гранулированных слоев в статическом и динамическом режимах нагружения. Кривые при всех режимах нагружения шариков носят нелинейный и необратимый характер, при высоких нагрузках происходит не только переукладка частиц, но и пластическое течение материала. На рис. 2 приведены синхронизированные импульсы в мерных стержнях и обойме в эксперименте, выполненном со стальными шариками (I – падающий импульс, R – отраженный импульс, T – прошедший импульс, T-R – разность прошедшего и отраженного импульсов, O – импульс окружного напряжения). Видно, что условие динамического равновесия в образце выполняется достаточно хорошо, разность деформации прошедшего и отраженного импульсов практически равны деформации в падающем импульсе. В обойме также возникают деформации и напряжения, синхронно с началом прошедшего импульса. В начале нагружения образца прошедшего импульса нет. Он появляется только через 40 мкс после начала нагружения и синхронно с ним появляется импульс в обойме. До этого момента в образце происходит выборка зазоров и переукладка шариков (без заметной деформации) с уменьшением порового пространства между ними. Затем происходит уплотнение дроби со значительной деформацией, что вызывает её поперечную раздачу и появление деформаций и напряжений в обойме.

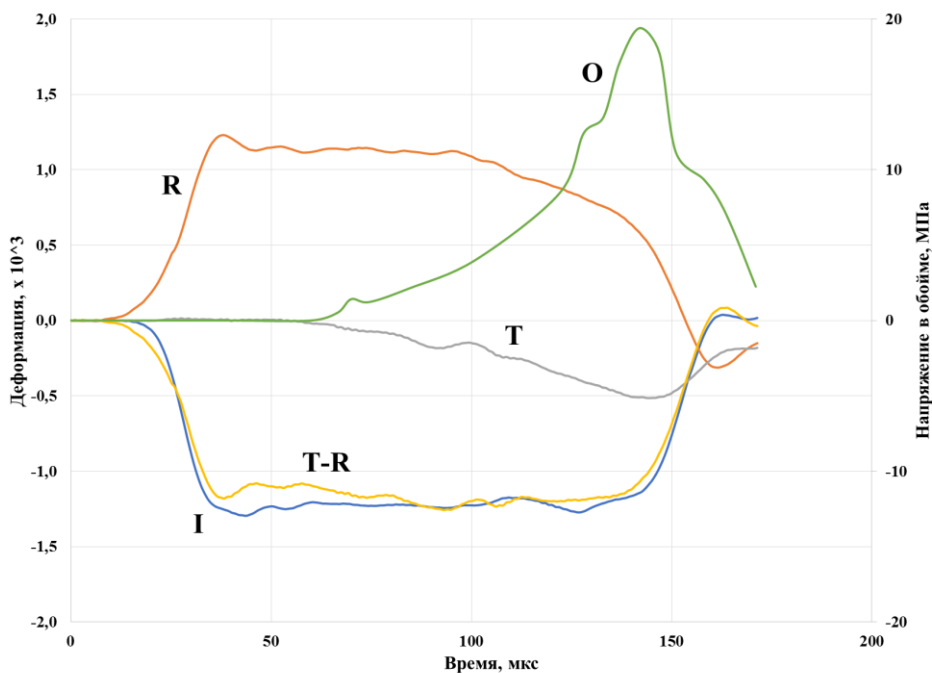


Рис. 2. Синхронизированные импульсы в мерных стержнях и обойме для стальных шариков

Получены экспериментальные диаграммы деформирования (рис. 3) для свинцовых шариков в статическом режиме нагружения со скоростью деформации  $10^{-3}$  1/с — кривая 1, динамическом режиме со скоростью деформации

$10^3$  1/с – кривая 2, стальных шариков со скоростью деформации  $10^{-3}$  1/с – кривая 3, динамическом режиме со скоростью деформации  $10^3$  1/с – кривая 4. Штриховыми линиями отмечены разгрузочные кривые. Значения модуля разгрузки в предположении его постоянства находятся в интервале от 2,5 до 6 ГПа для свинцовых шариков и от 9 до 11 ГПа для стальных. Кривые при всех режимах нагружения свинцовых шариков носят нелинейный и необратимый характер. Полученные диаграммы могут быть использованы для численного моделирования проникания ударников различной формы в гранулированные слои из металлических шариков.

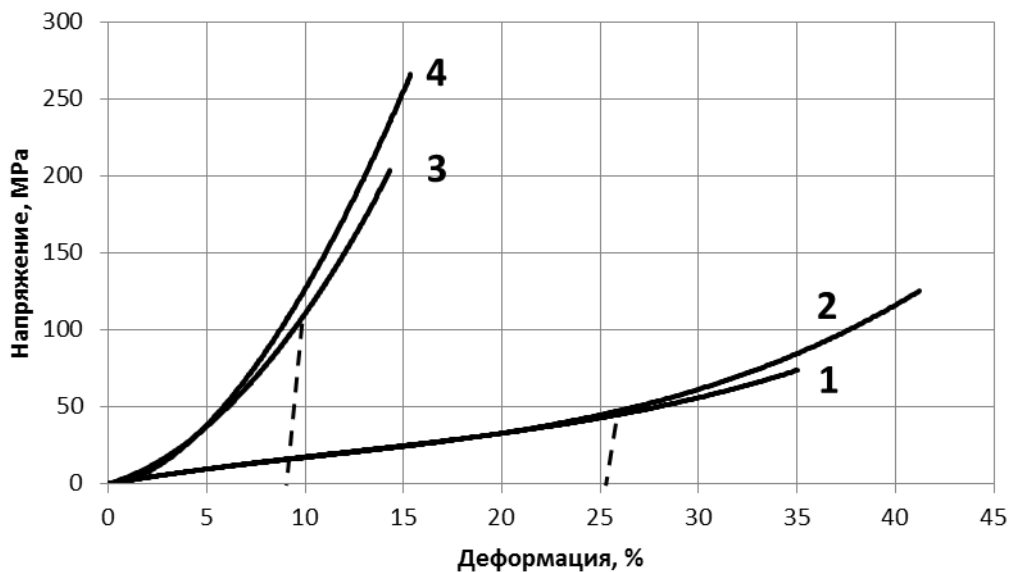


Рис. 3. Экспериментальные диаграммы деформирования стальных и свинцовых слоев в статическом и динамическом режимах нагружения

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-79-10076).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Kochetkov A. V., Modin I. A., Leontev N. V., Turigina I. A., Poverennov E. Yu. *Numerical modeling of nonlinear dynamic and static compression of the metal mesh*. PNRPU Mechanics bulletin. 2019. №. 4. P. 106-113.
2. Balandin V. V., Kochetkov A. V., Krylov S. V., Modin I. A. *Numerical and experimental study of the penetration of a package of woven metal grid by a steel ball*. Journal of Physics Conference Series. 2019. 1214(012004).
3. Кругликов Б. С., Кутушев А. Г. *Ослабление ударных волн экранирующими решетками*. ФГВ. 1998. Т. 24. № 1. С. 115-118.
4. Абакумов А. И. [и др.] *Численная модель деформирования противоосколочной сетки при взрывном нагружении*. Тр. ВНИИЭФ. Математическое моделирование физических процессов. 2006. № 10. С. 16-30.

5. Кочетков А. В., Леонтьев Н. В., Модин И. А., Савихин А. О. *Исследование деформационных и прочностных свойств металлических плетеных сеток*. Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2018. № 52. С. 53-62.

6. Брагов А. М., Жегалов Д. В., Константинов А. Ю., Кочетков А. В., Модин И. А., Савихин А. О. *Экспериментальное исследование деформационных свойств пакетов плетеных металлических сеток при динамическом и квазистатическом нагружении*. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 3. С. 252-262.

7. Telegin S. V., Kirillova N. I., Modin I. A., Suleimanov E. V. *Effect of particle size distribution on functional properties of Ce<sub>0.9</sub>Y<sub>0.1</sub>O<sub>2-d</sub> ceramics*. Ceramics international. 2021. V. 47. No 12. P. 17316-17321.

8. Splichal J., Pistek A., Hlinka J. *Dynamic tests of composite panels of an aircraft wing*. Progress in Aerospace Sciences. 06/2015.

9. Modin I. A., Kochetkov A. V., Poverennov E. Yu. *Numerical and experimental study nonlinear compression packages of metal meshes*. Problems of Strength and Plasticity. 2022. V. 84(2). P. 236-246.

10. Xiao Lijun, Song Weidong *Additively-manufactured functionally graded Ti-6Al-4V lattice structures with high strength under static and dynamic loading*. International Journal of Impact Engineering. 2018. № 111. P. 255-272.

11. Kochetkov A. V., Modin I. A. *Numerical Simulation of the Interaction of a Shock Wave with a Permeable Granulated Layer*. Advanced Structured Materials. 2023. V. 176. P. 129-143.

12. Глазова Е. Г., Турыгина И. А., Модин И. А. *Моделирование взаимодействия ударной волны с деформируемым проницаемым гранулированным слоем*. Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 3. С. 353-363.

13. Kochetkov A. V., Leontyev N. V., Modin I. A. *Numerical Simulation of Quasistatic and Dynamic Compression of a Granular Layer*. AIP Conference Proceedings. 2019. 2116(270003).

14. Modin I. A., Kochetkov A. V., Glazova E. G. *Numerical simulation of the interaction of a shock wave with a permeable deformable granulated layer*. Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. 2022. V. 26(1). P. 79-92.

15. Bragov A. M., Konstantinov A. Yu., Kochetkov A. V., Modin I. A., Savikhin A. O. *Experimental study of deformation properties of a bulk layer from plumbum balls under dynamic and quasistatic loading*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2017. No. 4. P. 16-27.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ НАГРУЖЕНИЯХ

Е. В. Нагорных<sup>1, b</sup>, В. Г. Баженов<sup>1, a</sup>, Д. А. Самсонова<sup>1, c</sup>

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт механики Национального исследовательского Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; <sup>a</sup>bazhenov@mech.unn.ru; <sup>b</sup>pavlyonkova@mech.unn.ru; <sup>c</sup>ozornikova.dasha@yandex.ru

Развиваются динамическая постановка и метод численного решения задач деформирования и потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим наполнителем при комбинированных статических и динамических нагрузениях в двумерной (плоской или обобщенной осесимметричной) постановке [1-3].

Определяющие соотношения записываются в декартовой или цилиндрической системе эйлеровых координат. Вариационные уравнения движения элементов конструкции (как оболочек, так и наполнителя) редуцируются из трехмерного уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред:

$$\sum_{k=1}^K \left( \iiint_{V_k} \sigma_{ij} \delta \dot{e}_{ij} dV + \iiint_{V_k} \rho \ddot{u}_i \delta \dot{u}_i dV - \iint_{S_{pk}} p_i \delta \dot{u}_i ds - \iint_{S_{qk}} q_i \delta \dot{u}_i ds \right) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $V_k$  – объем, занимаемый элементом конструкции (исследуемая область);  $K$  – количество элементов конструкций;  $S_{pk}$  – зона действия внешнего давления;  $S_{qk}$  – поверхность контакта;  $\dot{u}_i$ ,  $\ddot{u}_i$  – компоненты векторов скорости перемещения и ускорения в общей системе координат;  $\sigma_{ij}$  и  $\dot{e}_{ij}$  – компоненты тензоров напряжений Коши и скорости деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений);  $\rho$  – плотность;  $q_i$  – контактное давление;  $p_i$  – распределенная нагрузка;  $\delta \dot{e}_{ij}$ ,  $\delta \dot{u}_i$  – вариации  $\dot{e}_{ij}$ ,  $\dot{u}_i$  (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями  $\delta \dot{u}_i = 0$ );  $i, j = r, \beta, z$ , точка над символом означает частную производную по времени  $t$ ; по повторяющимся индексам ведется суммирование.

Моделирование процессов упругопластического деформирования и выпучивания оболочек вращения в условиях плоской или осесимметричной деформации осуществляется исходя из гипотез теории оболочек типа Тимошенко. Для каждого элемента оболочки вводится местная лагранжева система координат. Кинематические соотношения записываются в метрике текущего состояния. Распределение компонент скоростей перемещений по

толщине оболочки и тензоров скоростей деформаций в местном базисе записывается в виде суммы безмоментных и моментных составляющих [1]. Учет упругопластических свойств материала оболочки осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным упрочнением. Вариационные уравнения движения оболочки выводятся из общего уравнения динамики (1) с учетом принятых гипотез теории оболочек:

$$\int_0^L \left\{ (N_{s\xi}\psi_r + N_{ss}\psi_z)\delta\dot{u}_{r,s} + (N_{s\xi}\psi_z - N_{ss}\psi_r)\delta\dot{u}_{z,s} + vrN_{s\beta}\delta\dot{u}_{\beta,s} + M_{ss}\delta\dot{u}_{\varphi,s} \right. \\ \left. + [vr^{-1}N_{\beta\beta} + N_\rho(\ddot{u}_r - vr\dot{u}_\beta^2) - p_r - q_r]\delta\dot{u}_r + (N_\rho\ddot{u}_z - p_z - q_z)\delta\dot{u}_z \right. \\ \left. + v(r^2N_\rho\ddot{u}_\beta - p_\beta - q_\beta)\delta\dot{u}_\beta + (N_{s\xi} + vr^{-1}M_{\beta\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\varphi)\delta\dot{u}_\varphi \right. \\ \left. + v(N_{\beta\xi} - M_{s\beta}\psi_z + M_\rho\ddot{u}_\beta)\delta\dot{u}_\beta \right\} r ds - \\ - [r(P_r\delta\dot{u}_r + P_z\delta\dot{u}_z + vP_\beta\delta\dot{u}_\beta + T_s\delta\dot{u}_\varphi)]_{s=0,L} = 0$$

Здесь  $v$  – параметр симметрии ( $v = 0$  – плоская деформация,  $v = 1$  – обобщенная осесимметричная деформация с кручением);  $\dot{u}_s(s, t)$ ,  $\dot{u}_\xi(s, t)$  – скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали;  $\dot{u}_\varphi(s, t)$  – угловая скорость поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения;  $\dot{u}_\beta(s, t)$  – угловая скорость поворота относительно оси вращения;  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$  – внутренние усилия и моменты;  $M_\rho$ ,  $J_\rho$  – масса и момент инерции;  $P_i$  и  $T_s$  – внешние усилия и изгибающий момент.

Деформирование заполнителя подчиняется уравнениям динамики сплошной среды [4]. Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие формоизменения. Физические свойства материала заполнителя могут описываться обобщенным законом Гука или вариантом математической модели теории течения с комбинированным изотропным и кинематическим упрочнением. Вариационные уравнения движения сплошной среды (заполнителя) выводятся из общего уравнения динамики (1) с учетом соотношений Коши в условиях плоского деформированного состояния или обобщенной осесимметричной деформации с кручением:

$$\begin{aligned}
& \iint_{\Omega} \left( \sigma_{rr} \frac{\partial \delta \dot{v}_r}{\partial r} + \sigma_{rz} \left( \frac{\partial \delta \dot{v}_r}{\partial z} + \frac{\partial \delta \dot{v}_z}{\partial r} \right) - \nu \left( \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\beta\beta}}{r} \delta \dot{v}_r + \frac{\sigma_{rz}}{r} \delta \dot{v}_z \right) + \sigma_{zz} \frac{\partial \delta \dot{v}_z}{\partial z} \right. \\
& \quad \left. + \nu \left( \sigma_{r\beta} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial r} + \sigma_{\beta z} \frac{\partial \delta \dot{\theta}}{\partial z} \right) + \rho (w_r \delta \dot{v}_r + \nu w_{\beta} r^2 \delta \dot{\theta} + w_z \delta \dot{v}_z) \right) d\Omega \\
& \quad - \int_{S_p} (p_r \delta \dot{v}_r + \nu p_z r^2 \delta \dot{\theta} + p_z \delta \dot{v}_z) dS \\
& \quad - \int_{S_q} (q_r \delta \dot{v}_r + \nu q_z r^2 \delta \dot{\theta} + q_z \delta \dot{v}_z) dS = 0.
\end{aligned}$$

Здесь  $\nu$  – параметр симметрии ( $\nu = 0$  – плоская деформация,  $\nu = 1$  – обобщенная осесимметричная деформация с кручением), функции  $\dot{v}_{\alpha} = r^{\nu} \dot{u}_{\alpha}$  ( $\alpha = r, z$ ), и  $\dot{\theta} = \nu r^{-1} \dot{u}_{\beta}$  введены в задаче с осевой симметрией для устранения особенности численного решения на оси вращения. Для решения определяющей системы уравнений применяется конечно-разностный метод и явная схема интегрирования по времени типа «крест».

Скорости перемещений и перемещения узлов разностной сетки заполнителя и срединной поверхности оболочки определяются по рекуррентным соотношениям:

$$u_{\alpha}^{k+1} = u_{\alpha}^k + \dot{u}_{\alpha}^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \quad \dot{u}_{\alpha}^{k+1/2} = \dot{u}_{\alpha}^{k-1/2} + (\Phi_{\alpha}^k + q_{\alpha}^k + p_{\alpha}^k) \frac{\Delta t^{k+1/2}}{\Phi_{\alpha}^k}, \quad (2)$$

где для оболочки  $\alpha = r, z, \varphi, \beta$ , для массивного тела  $\alpha = r, z, \beta$ ,  $\Phi_{\alpha}$ ,  $\Phi_{\zeta}$  – обобщенные узловые силы и масса или момент инерции.

Взаимодействие элементов конструкции (оболочки и заполнителя) обеспечивается дополнительными кинематическими и статическими условиями на контактных поверхностях. Полагается, что у массивных тел контактными границами являются части контура, а у оболочек – части срединной поверхности. Компоненты контактного давления  $q_{\alpha}$  ( $\alpha = r, z, \beta$ ), положение и конфигурация контактных поверхностей в общем случае заранее неизвестны и определяются в ходе решения задачи.

Моделирование контактного взаимодействия оболочки и заполнителя основано на условии жесткой склейки или условия непроникания по нормали и проскальзывания по касательной [5]. На участке контакта вводится местный базис  $(s, \xi, \beta)$ . Здесь  $s$  – направление касательной,  $\xi$  – нормали к поверхности,  $\beta$  – окружная координата (совпадает с окружной координатой общего базиса в цилиндрической системе координат). Усилие по нормали определяется из условия непроникания, а касательные усилия полагаются равными нулю:

$$\begin{cases} \dot{u}'_{\xi} = \dot{u}''_{\xi} \\ q'_{\xi} = -q''_{\xi} \end{cases} \quad q_{\xi} = q'_{\xi} = \begin{cases} 0, q_{\xi} \geq 0 \\ q_{\xi}, q_{\xi} < 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\dot{u}'_{\alpha} \neq \dot{u}''_{\alpha}, \quad q'_{\alpha} = q''_{\alpha} = 0, \quad \alpha = s, \beta.$$



Функции со штрихом относятся к контактирующей поверхности оболочки, а с двумя штрихами – заполнителя. Условия непроникания (2) выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия. При нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности.

Для вычисления контактных давлений вариационное уравнение движения контактных границ записывается в местном базисе  $(s, \xi, \beta)$ . Сначала по известному на момент времени  $t = t^k$  распределению параметров напряженно-деформированного состояния для узлов разностной сетки обеих контактных границ находятся скорости перемещений  $\dot{u}_\xi^{k+1/2}$  и перемещения  $u_\xi^{k+1}$  и по нормали по рекуррентным соотношениям (2) ( $\alpha = \xi$ ) без учета контактного взаимодействия ( $q_\xi = 0$ ). По перехлесту сеток определяется зона контакта. Если перехлест сеток для узлов отсутствует, то полученное решение является для них истинным. В противном случае определяется контактное давление исходя из условий (2) и (3):

$$q_\xi^{k+1} = \frac{\frac{(\dot{u}_\xi'')^{k+1/2} - (\dot{u}_\xi')^{k+1/2}}{\Delta t^{k+1/2}} + \frac{(\Phi_\xi'')^k}{(\Phi_M'')^k} - \frac{(\Phi_\xi')^k}{(\Phi_M')^k}}{\left[ \frac{1}{\Phi_M'} + \frac{1}{\Phi_M''} \right]^k}. \quad (4)$$

Нормальные контактные давления, вычисленные в местном базисе по формуле (4), перепроецируются из местного базиса в общий. Затем осуществляется расчет скоростей перемещений  $\dot{u}_\alpha^{k+1/2}$  и перемещений  $u_\alpha^{k+1}$  оболочки ( $\alpha = r, z, \varphi, \beta$ ) и заполнителя ( $\alpha = r, z, \beta$ ) по стандартной вычислительной схеме (2) с учетом контактных давлений.

Разработанный подход позволяет моделировать нелинейное докритическое деформирование оболочек вращения с упругим заполнителем, определять предельные (критические) нагрузки в широком диапазоне скоростей нагружения с учетом геометрических несовершенств формы, исследовать процессы потери устойчивости по осесимметричным и неосесимметричным формам при динамических и квазистатических сложных нагружениях в условиях плоской и осесимметричной деформации.

Данный подход применен для исследования задачи деформирования и потери устойчивости стальных цилиндрических оболочек с упругим заполнителем при равномерном внешнем давлении. Полагалось, что оболочка и заполнитель находятся в условиях плоского деформированного состояния. Расчетная область задачи представляла собой поперечное сечение оболочки с заполнителем. Результаты моделирования согласуются с расчетами, выполненными в рамках модели сплошной среды [3], где оболочка аппроксимируется по толщине рядом слоев конечных элементов.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В.Г., Ломунов В.К. *Исследование упругопластического выпучивания оболочек вращения при ударном нагружении*. Прикл. пробл. прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. Горьк. ун-т. 1975. Вып. 2. С. 44-50.
2. Баженов В.Г., Казаков Д.А., Кибец А.И., Нагорных Е.В., Самсонова Д.А. *Постановка и численное решение задачи потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим наполнителем при комбинированных осесимметричных нагружениях с кручением*. Вестник ПНИПУ. Механика. 2022. № 3. С. 95-106.
3. Баженов В.Г., Нагорных Е.В., Самсонова Д.А. *Исследование применимости модели основания Винклера для описания контактного взаимодействия упругопластических оболочек с наполнителем при внешнем давлении*. Вестник ПНИПУ. Механика. 2020. № 4. С. 36-48.
4. Баженов В.Г., Жегалов Д.В., Павлёнкова Е.В. *Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях*. Известия РАН. МТТ. 2011. № 2. С. 57-66.
5. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Цветкова И.Н. *Численное моделирование задач нестационарного контактного взаимодействия деформируемых конструкций*. Межвуз. сб. Прикл. пробл. прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов. М.: Товарищество научных изданий КМК. 1995. Вып. 52. С. 154-160.

## ПРЕДЕЛЬНО-УПРУГИЙ ИЗГИБ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ БЕТОННЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Ю. В. Немировский<sup>1,2,а</sup>, С. В. Тихонов<sup>3,б</sup>

<sup>1</sup>Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, СО РАН, Новосибирск; <sup>а</sup>nemiryury@mail.ru

<sup>2</sup>Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

<sup>3</sup>Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, Чебоксары;  
<sup>б</sup>strangcheb@mail.ru

Рассматривается задача изгиба бетонного стержня постоянного поперечного сечения поперечными квазистатическими нагрузками. Предполагается, что каждый слой может быть реализован из различных марок бетона.

Будем рассматривать стержни, имеющие симметричную относительно осей координат форму поперечного сечения (рис. 1). Ось  $Ox$  направим вдоль оси стержня, ось  $Oy$  – вертикально вверх, через  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  обозначим толщины, а через  $b_1$ ,  $b_2$  – ширины соответствующих слоев.

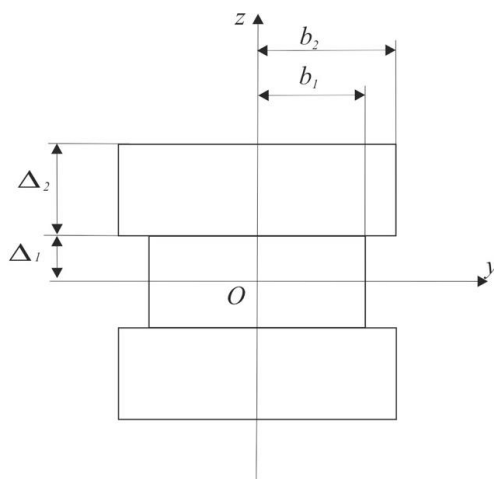


Рис. 1. Поперечное сечение стержня

Связь между напряжениями и деформациями будем определять из соотношений при  $-\varepsilon_{0i}^- \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{0i}^+$

$$\sigma_i^e = E_i \varepsilon, \quad (1)$$

а при  $\varepsilon_{0i}^+ \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{*i}^+$ , равной [1, 2, 3],

$$\sigma_i^n = A_{1i} \varepsilon + A_{2i} \varepsilon^2, \quad (2)$$

где индекс «e» соответствует упругому деформированию бетона, индекс «n» – нелинейному, через  $\varepsilon_{0i}^+$ ,  $-\varepsilon_{0i}^+$  обозначим предельные упругие деформации бетона при растяжении и сжатии для  $i$ -го слоя стержня, а через  $\varepsilon_{*i}^+$ ,  $-\varepsilon_{*i}^+$  – соответствующие деформации предразрушения,  $E_i$  – модули упругости бетонов соответствующих слоев,  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$  – физические коэффициенты, определяемые из реальных диаграмм растяжения-сжатия бетонов.

Будем рассматривать шарнирно-опертый стержень под действием распределенной квазистатической нагрузки  $q$  и действием массовых сил  $q_s$  (рис. 2).

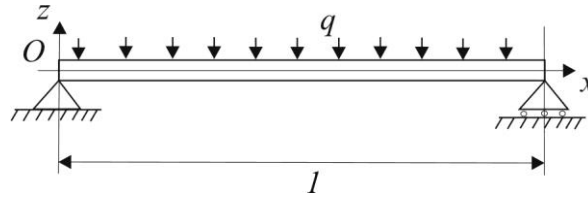


Рис. 2. Шарнирно-опертый стержень

Указанная задача является статически определимой, тогда из уравнений равновесия

$$\frac{d^2 M_y}{dx^2} = q + q_s, \quad Q = \frac{dM_y}{dx} \quad (3)$$

и условий на концах стержня

$$w(0) = 0, w(1) = 0, M_y(0) = 0, M_y(1) = 0 \quad (4)$$

получим выражение изгибающего момента вдоль всей длины стержня

$$M_y = (q + q_s) \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right). \quad (5)$$

Примем справедливыми гипотезы Кирхгофа-Лява

$$\varepsilon(x, z) = -z\kappa_z(x), \quad \kappa_z(x) = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}, \quad (6)$$

где  $\kappa_z(x)$  – кривизна осевой линии стержня,  $w(x)$  – величина прогиба стержня.

Для данного стержня будем считать, что имеет место одноосное напряженное состояние, тогда для изгибающего момента будет справедливо

$$M_y(x) = -\sum_i \iint_S \sigma_i z dz. \quad (7)$$

В зависимости от параметров стержня, вида марок бетонов слоев и действующих нагрузок возможны случаи сочетания областей упругого и нелинейного деформирования бетона на разных участках стержня (рис. 3), где заштрихованной линией обозначена область нелинейного-неупругого деформирования стержня. Здесь мы учли тот факт, что при  $z = 0$  деформация равна нулю и, следовательно, область нелинейного-неупругого деформирования там не может быть достигнута при любых нагрузках.

В данной работе будем ограничиваться случаем, когда область нелинейного деформирования возникает только в области растяжения стержня.

В качестве материалов стержня будем рассматривать наиболее распространенные в строительстве бетоны марок В10, В30, В50 с параметрами, приведенными в табл. 1.

Соотношения (1)-(7) определяют уравнения для определения прогибов, и из указанных уравнений из условия равенства деформации предельным значениям определяются уравнения границ раздела областей упругого и нелинейного-неупругого деформирования для каждого из характерных случаев.

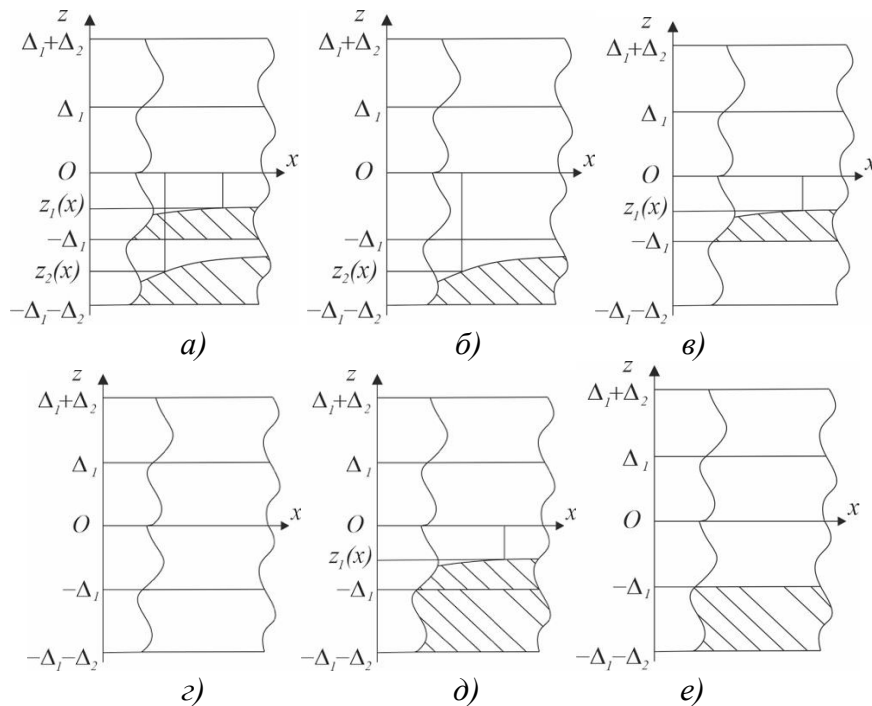


Рис. 3. Возможные случаи взаимного расположения областей упругого и нелинейного деформирования в слоях стержня

Определены предельные нагрузки, соответствующие возможным положениям границ раздела областей упругого и нелинейного-неупругого деформирования в слоях стержня.

Таблица 1. Физические параметры бетонов

Марка бетона	$E_i$	$\varepsilon_{0i}^+, 10^{-2}$	$\varepsilon_{*i}^+, 10^{-2}$	$A_{1i}$	$A_{2i}, 10^6$
В10	1232,92	0,005	0,015	1479,50	-4,932
В30	2629,23	0,005	0,015	3155,08	-10,517
В50	3312,54	0,00375	0,015	3975,04	-13,250

## ЛИТЕРАТУРА

1. Немировский Ю.В., Тихонов С.В. *Несущая способность многослойных бетонных стержней*. Чебоксары: Изд-во Чуваш-го ун-та, 2022.

2. Мищенко А.В. *Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности*: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28-31 августа 2005 г. Параллель, 2005. С. 184-188.

3. Немировский Ю.В., Тихонов С.В. *Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе*. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 60-73.

## ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРНЫХ ПЕРЕСТРОЕК ВБЛИЗИ ОБЛАСТИ СОПРЯЖЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ МЕТАЛЛОВ В УСЛОВИЯХ ДЕФОРМАЦИИ

А. Ю. Никонов<sup>1, а</sup>, А. И. Дмитриев<sup>1, б</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;

<sup>а</sup>anickonoff@ispms.ru, <sup>б</sup>dmitr@ispms.ru

Одной из ключевых проблем методов моделирования поведения материала на мезо- и макромасштабах является выбор параметров, описывающих взаимодействие между отдельными элементами среды. Использование расчётов на наномасштабе может стать эффективным способом решения этой проблемы. Подобные расчёты позволяют рассчитать не только параметры пластической деформации в монокристаллах, но и исследовать особенности структурных перестроек вблизи границ раздела, возникающих в композиционных материалах. Данная работа посвящена исследованию методом молекулярной динамики закономерностей развития пластической деформации вблизи границ раздела между разнородными материалами, отличающимися кристаллической решёткой, в условиях одноосной деформации с целью получения параметров взаимодействия частиц мезомасштабного уровня.

Модельные образцы представляли собой два сопряжённых монокристалла в форме параллелепипеда с различными кристаллическими решётками. Моделировались образцы в различных условиях одноосного нагружения: сдвига вдоль границы раздела, сжатия и растяжения перпендикулярно границе раздела. Схематическое изображение образцов со схемами нагружения «сжатие» и «сжатие + сдвиг» показано на рис. 1. Исследовались комбинации материалов с ОЦК, ГЦК и ГПУ решёткой, в частности рассматривались медь,  $\alpha$ -железо и титан. Ориентация кристаллических решёток зёрен образца задавалась таким образом, чтобы направление нагружения в различных задачах соответствовало кристаллографическим направлениям [001], [011] и [111].

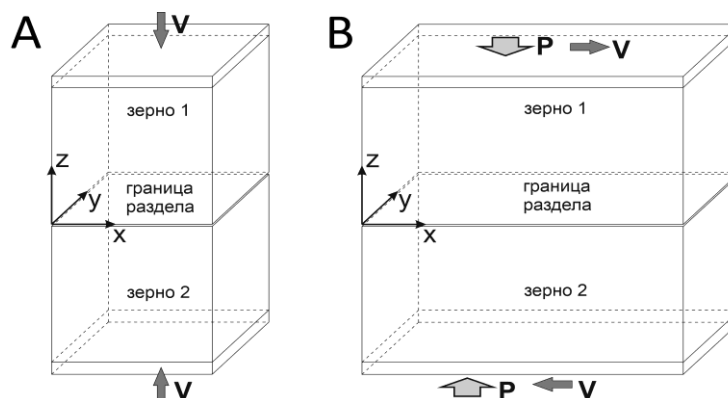


Рис. 1. Схематическое изображение образца и схема нагружения:  
А – сжатие; В – сжатие + сдвиг

Расчёты в рамках метода молекулярной динамики проводились с использованием программного пакета LAMMPS [1]. Взаимодействие между атомами меди и железа описывалось в рамках метода погруженного атома [2]. Для пар медь-титан и железо-титан взаимодействие описывалось с использованием модифицированного метода погруженного атома [3, 4]. Визуализация и анализ атомной структуры моделируемых образцов проводились в программе OVITO [5]. Анализировалась перестройка атомной структуры в процессе пластической деформации, а также рассчитывались диаграммы нагружения.

На основе результатов моделирования были показаны основные закономерности развития пластической деформации вблизи границы раздела между ОЦК/ГЦК/ГПУ металлами в условиях одноосного нагружения. Показано, что отклик материала существенно зависит от типа кристаллической решётки и от её ориентации относительно направления внешнего воздействия. Процессы пластической деформации при сжатии или растяжении могут происходить как в одном кристаллите, так и в двух сразу. Очевидно, одним из основных факторов, определяющих область развития пластической деформации, является предел упругости материала. Согласно полученным результатам, существенную роль играет не только материал и его прочностные свойства, но и анизотропия этих свойств. Сдвиговая деформация происходит либо вблизи границы раздела в объёме одного из материалов, либо непосредственно по границе раздела. Формирование интерфейсного слоя, который состоял бы из атомов обоих материалов, т.е. перемешивание, является частным случаем и зависит от параметров взаимодействия контактирующих материалов.

Полученные кривые деформации, а также условия разрушения материала по границам раздела, могут быть использованы в качестве входных параметров для метода подвижных клеточных автоматов.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИФПМ СО РАН (тема номер FWRW-2021-0006).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Plimpton S. *Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics*. J. Comput. Phys. 1995. V. 117. № 1. P. 1-19.
2. Bonny G. et al. *Ternary Fe–Cu–Ni many-body potential to model reactor pressure vessel steels: First validation by simulated thermal annealing*. Philos. Mag. 2009. V. 89. № 34-36. P. 3531-3546.
3. Miraz A.S.M. *Development and application of interatomic potentials to study the stability and shear strength of Ti/TiN and Cu/TiN interfaces*. Mater. Des. 2020. V. 196.
4. Sa I., Lee B. *Modified Embedded-Atom Method Interatomic Potentials for the Fe–Nb and Fe–Ti Binary Systems*. Scr. Mater. 2008. V. 59. P. 595.
5. Stukowski A. *Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO – the Open Visualization Tool*. Model. Simul. Mater. Sci. Eng. 2010. V. 18. P. 015012.

## ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ И НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ВИДЕ ПОЛИНОМА

Д. Р. Нифонтов<sup>a</sup>, Н. А. Кудряшов<sup>b</sup>

Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва;

<sup>a</sup>danil.nifontov.01@mail.ru, <sup>b</sup>nakudr@gmail.com

### Введение

Законы сохранения являются одной из важнейших характеристик нелинейных эволюционных уравнений. Они позволяют оценить сохраняющиеся значения некоторых характеристик математических моделей. Известно, что законы сохранения также отражают свойство интегрируемости нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В 1918 году Эмми Нётер доказала, что законы сохранения связаны с симметрией математических моделей. Например, симметрия математической модели относительно группы преобразования сдвига во времени соответствует сохранению энергии для решений уравнений Эйлера-Лагранжа, а инвариантность сдвига координат приводит к сохранению импульса [1]. Поэтому неинтегрируемые нелинейные уравнения в частных производных также могут иметь сохраняющиеся величины, соответствующие физическим законам сохранения.

В последние десятилетия в связи с необходимостью решения задач нелинейной оптики, в том числе задач передачи информации на большие расстояния, появился большой интерес к исследованию математических моделей распространения импульсов в нелинейных средах [2–4]. Используемые при описании нелинейные уравнения в частных производных обычно не интегрируются методом обратной задачи рассеяния, и, как правило, имеют три закона сохранения.

В данной работе рассматриваются законы сохранения, соответствующие семейству обобщенного нелинейного уравнения Шредингера:

$$iq_t + i \sum_{j=1}^{2n} a_{2j-1} q_{2j-1,x} + \sum_{j=1}^{2n} a_{2j} q_{2j,x} = \sum_{j=1}^m b_j |q|^{2j} q, \\ q_{l,x} = \frac{\partial^l q}{\partial x^l}, n, m, l \in \mathbb{N}, m \leq n, b_m \neq 0. \quad (1)$$

В работе [5] было показано, что существуют два вида оптических солитонов для всех уравнений данного семейства:

$$q_1(x, t) = \frac{(4\mu)^{\frac{2n}{m}} e^{i(kx - \omega_1 t - \theta_0)}}{(4\mu v e^{-\sqrt{\mu}(x - c_0 t - z_1)} + e^{\sqrt{\mu}(x - c_0 t - z_1)})^{\frac{2n}{m}}}, \quad (2)$$



и

$$q_2(x, t) = \frac{\sqrt{\mu}(4\mu)^{\frac{2n-m}{m}} (4\mu e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0t-z_1)} - e^{\sqrt{\mu}(x-c_0t-z_1)}) e^{i(kx-\omega_2t-\theta_0)}}{(4\mu v e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0t-z_1)} + e^{\sqrt{\mu}(x-c_0t-z_1)})^{\frac{2n}{m}}}. \quad (3)$$

Как правило, законы сохранения, соответствующие нелинейным эволюционным уравнениям, находятся с помощью оператора Эйлера и минимизации Лагранжиана [1]. В данной работе для вычисления законов сохранения используются прямые вычисления. Метод, использованный в данной работе, имеет ряд преимуществ для определенного класса нелинейных эволюционных уравнений, к которым принадлежит рассматриваемое семейство.

Для того чтобы найти сохраняющиеся величины, уравнение приводилось к виду:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad (4)$$

$$T = T(q, q^*, q_x, q_x^*, q_{xx}, q_{xx}^*, \dots), \quad (5)$$

$$X = X(q, q^*, q_x, q_x^*, q_{xx}, q_{xx}^*, \dots). \quad (6)$$

Тогда сохраняющиеся величины находятся интегрированием плотности  $T$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} T dx \quad (7)$$

В работе найдены сохраняющиеся величины для уравнений произвольного порядка.

### Законы сохранения для уравнения произвольного порядка

Для уравнения (1) найдены плотности:

$$T_1 = |q|^2, \quad (8)$$

$$T_2 = \frac{1}{i} (q^* q_x - q q_x^*), \quad (9)$$

$$T_3 = \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{j+1} |q|^{2(j+1)} + \sum_{j=1}^{2n} (-1)^{j+1} a_{2j} |q_{j,x}|^2 + \frac{i}{2} \sum_{j=2}^{2n} a_{2j-1} (q q_{2j-1,x}^* - q^* q_{2j-1,x}). \quad (10)$$

Используя (8) и (9), найдены сохраняющиеся величины для решения (2):

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |q|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(4\mu)^{\frac{4n}{m}}}{(4\mu v e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0t-z_1)} + e^{\sqrt{\mu}(x-c_0t-z_1)})^{\frac{4n}{m}}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left(\frac{4\mu}{v}\right)^{\frac{2n}{m}} B\left(\frac{2n}{m}, \frac{2n}{m}\right), \quad (11)$$

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i} (q^* q_x - q q_x^*) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2k(4\mu)^{\frac{4n}{m}}}{(4\mu v e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)} + e^{\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)})^{\frac{4n}{m}}} dx = \frac{k}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{4\mu}{v}\right)^{\frac{2n}{m}} B\left(\frac{2n}{m}, \frac{2n}{m}\right), \quad (12)$$

Кроме того, вычислены сохраняющиеся величины для решения (3):

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} |q|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(4\mu)^{\frac{4n-2m}{m}} (4\mu e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)} - e^{\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)})^2}{(4\mu v e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)} + e^{\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)})^{\frac{4n}{m}}} dx$$

$$= \frac{1}{8v\sqrt{\mu}} \left(\frac{4\mu}{v}\right)^{\frac{2n}{m}} \left( (v^2 + 1) B\left(\frac{2n}{m} - 1, \frac{2n}{m} + 1\right) - 2v B\left(\frac{2n}{m}, \frac{2n}{m}\right) \right), \quad (13)$$

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2k(4\mu)^{\frac{4n-2m}{m}} \mu (4\mu e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)} - e^{\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)})^2}{(4\mu v e^{-\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)} + e^{\sqrt{\mu}(x-c_0 t-z_1)})^{\frac{4n}{m}}} dx =$$

$$= \frac{k}{4v\sqrt{\mu}} \left(\frac{4\mu}{v}\right)^{\frac{2n}{m}} \left( (v^2 + 1) B\left(\frac{2n}{m} - 1, \frac{2n}{m} + 1\right) - 2v B\left(\frac{2n}{m}, \frac{2n}{m}\right) \right). \quad (14)$$

Для обоих решений 3 закон сохранения имеет более громоздкий вид.

### Заключение

В работе рассмотрены законы сохранения для уравнений с неограниченной дисперсией и нелинейностью в виде полинома. Показано, что все уравнения семейства имеют три закона сохранения. Законы сохранения вычисляются прямыми расчетами без дифференциального оператора. Уравнение записано в форме (4) для нахождения плотностей. Вычислены сохраняющиеся величины для соответствующих решений.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 22-11-00141).*

### ЛИТЕРАТУРА

1. Olver P.J. *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer-Verlag, New York inc, 1986.
2. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons. From Fibers to Photonic Crystals*. Academic Press, 2003.
3. Kivshar Yu.S., Malomed B.A. *Crystals Dynamics of solitons in nearly integrable systems*. Rev. Mod. Phys. 1989. V. 63. P. 763-915.
4. Kivshar Yu.S., Pelinovsky D.E. *Optical Solitons. Self - focusing and transverse instabilities of solitary waves*. Phys. Reports. 2000. V. 331. No 4. P. 117-195.
5. Kudryashov N.A. *Mathematical model with unrestricted dispersion and polynomial nonlinearity*. Appl. Math. Lett., 138 (2023) 108519.

# РАСЧЕТНОЕ СРАВНЕНИЕ ТРЕБОВАНИЙ К ПРОЦЕДУРЕ ИСПЫТАНИЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ И НОРМИРУЕМЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ПЛАСТИЧНОСТИ ИМПОРТОЗАМЕЩАЕМЫХ КОНСТРУКЦИОННЫХ СТАЛЕЙ

*М. М. Пегливанова<sup>1, а</sup>, И. А. Гальчун<sup>1, а</sup>, В. Ю. Филлин<sup>1, а</sup>*  
*<sup>1</sup>НИЦ «Курчатовский институт» - ЦНИИ КМ «Прометей»,  
Санкт-Петербург; <sup>а</sup>npk3@crism.ru*

## **Аннотация**

Выполнен анализ российских и иностранных стандартов по испытаниям на растяжение. Исследовано возможное влияние обнаруженных отличий на результат. Стандартный пересчет относительно удлинения, получаемого на образцах различной кратности, выполняют по формуле Оливера. Вызываемая этим погрешность исследована методом конечно-элементного моделирования.

## **Введение**

Тема импортозамещения наиболее актуальна сейчас в связи с введенными санкциями. Практически во всех отраслях промышленности есть задачи, связанные с тем, как без ущерба для производства восполнить отсутствие иностранных товаров и технологий. В связи с заменой импортных сталей на отечественные при строительстве и ремонте конструкций морской техники актуально проведение сравнительной оценки результатов и методик испытаний на растяжение в России и за рубежом.

## **Сравнение отечественных и иностранных методических стандартов**

Поскольку расчеты конструкций на прочность основываются на значениях предела текучести металла, а его деформационная способность описывается характеристиками пластичности – равномерным относительным удлинением, относительным удлинением после разрыва, относительным сужением, контроль качества металла по результатам испытания на растяжение обязателен. В данной работе проанализированы стандарты испытаний на растяжение основного металла, растяжение в направлении толщины, растяжение металла сварного соединения, растяжение металла шва (вдоль шва).

Испытания на растяжение основного металла регламентируются российским ГОСТ 1497-84 [1] и такими иностранными стандартами, как ASTM E8/E8M [2] и ASTM A370 [3], а также ISO 6892-1 [4]. В процессе испытания может быть определено достаточно много механических характеристик, сдаточными из которых являются как минимум предел текучести, временное сопротивление и удлинение после разрыва.

Характеристика пластичности – относительное удлинение – при испытании по зарубежным стандартам может оказаться выше, чем у отечественных сталей, так как кратность образца, описываемая отношением расчётной части к

поперечному сечению, в американской практике обычно принимается равной 4 в отличие от 5, применяемой при использовании метрической системы мер. Чем меньше кратность образца, тем большую часть длины расчетного сечения занимает «шейка». Пересчет удлинения выполняют по формуле Оливера, на основании которой составлен, например, стандарт ISO 2566-1 [5]. Формула Оливера включает только геометрические параметры и не имеет физического обоснования, в том числе не учитывает деформационное упрочнение материала.

Испытания на растяжение в направлении толщины по ГОСТ 28870-90 [6] и зарубежным стандартам по методу проведения соответствуют указанным выше стандартам. В направлении толщины определяют только временное сопротивление и сужение. Значимых отличий между отечественными и зарубежными нормативными документами не выявлено.

Испытания на растяжение проводят также и для металла сварного соединения. Для таких испытаний используют плоские образцы, вырезаемые поперёк шва. Целью является определение «равнопрочности», т.е. получение доказательства того, что шов имеет прочность, как минимум равную прочности основного металла. Область применимости зарубежного стандарта ISO 4136 [7] закрывается двумя ГОСТами: на испытания сварных соединений ГОСТ 6996 [9] и на испытания труб – ГОСТ 10006 [8].

Растяжение металла шва на образцах, вырезаемых вдоль шва, обычно проводят при аттестации сварочных материалов и процедур. Евронормы EN 876 [11] полностью ссылаются на EN 10002-1 [10], в EN 876 [11] указаны только места вырезки образцов, которые, в отличие от ГОСТ 6996 [9], не включают корневую зону сварных соединений. Поэтому результаты испытаний по ГОСТ 6996 [9] являются консервативными по отношению к зарубежным.

### **Моделирование испытаний на растяжение**

Так как наиболее значимые различия были найдены в стандартах, описывающих процедуры испытаний на растяжение основного металла, то конечно-элементное моделирование проводили именно для данного вида испытаний.

Моделирование проводили в пакете для расчетов методом конечных элементов Ansys Mechanical APDL. Для задания «истинной» диаграммы деформирования материала использовали экспериментальные данные, полученные на образцах разной кратности из трубопроводной стали марки X100 (K80) и ранее разработанную процедуру их экстраполяции [12, 13] с последующей проверкой соответствия результатов расчетов и экспериментов.

В качестве условия разрушения использовали критерий Кокрофта-Лэтэма-Оха

$$\int_0^{\varepsilon_p} \frac{\sigma_1}{\sigma_i} d\varepsilon > \varepsilon_{кр},$$

где  $\sigma_1$  – это первые главные напряжения,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\varepsilon$  – интенсивность накопленной пластической деформации,  $\varepsilon_{кр.}$  – значение критерия. Этот критерий был выбран исходя из того, что в нем учитывается жесткость напряженного состояния. Для рассматриваемого материала рассчитанное значение критерия составляет 1.79.

### Результаты моделирования

В ходе работы проведен расчет серии образцов с различной кратностью. Нагружение проводили до тех пор, пока значение критерия не достигало 1.79. Разрушение образца не моделировалось. На каждом этапе нагружения регистрировали значения относительного удлинения. Все полученные результаты отражены на рис.1.

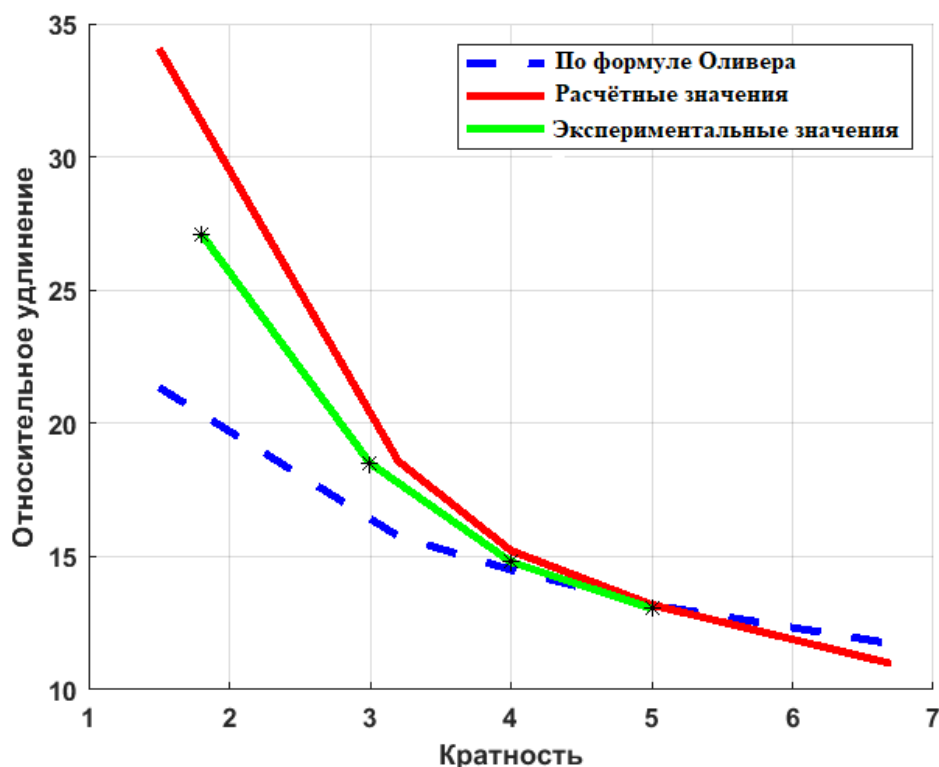


Рис. 1. Значения относительного удлинения для образцов различных кратностей

При пересчете значений относительного удлинения по формуле Оливера для малых кратностей получается ошибка, не превышающая 13 %. Ранее в работе [13] было показано, что при кратностях, больших 5, формула Оливера дает ошибку не более 5 %.

### Заключение

Таким образом, при сравнении отечественных и иностранных стандартов испытаний на растяжение найдены наиболее значимые отличия. Также проведены расчеты методом конечных элементов, показывающие корректность применения формулы Оливера на образцах кратностей менее 5.

## ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ 1497-84. Металлы. Методы испытаний на растяжение.
2. ASTM E8/E8M. Standard Test Method for Tension Testing of Metallic Materials.
3. ASTM A370. Standart Test Methods and definitions for Mechanical Testing of Steel Priducts.
4. ISO 6892-1. Metallic materials. Tensile testing. Part 1: Method of test at room temperature.
5. ISO 2566-1. Steel. Conversion of elongation value. Part 1: Carbon and low-alloy steels.
6. ГОСТ 28870-90. Сталь. Методы испытания на растяжение толстолистого проката в направлении толщины.
7. ISO 4136. Destructive tests on welds in metallic materials. Transverse tensile test.
8. ГОСТ 6996. Сварные соединения. Методы определения механических свойств.
9. ГОСТ 10006-80. Трубы металлические. Метод испытания на растяжение.
10. BS EN 10002-1:2001. Metallic materials. Tensile testing. Part1:Method of test at ambient.
11. BS EN 876, 1995 Edition, 1995 - Destructive Tests on Welds in Metallic Materials - Longitudinal Tensile Test on Weld Metal in Fusion Welded Joints.
12. Назарова Е.Д., Пегливанова М.М., Филин В.Ю., Ларионов А.В. *Получение истинной диаграммы нагружения на основе испытаний на растяжение с использованием численных методов.* Тезисы докладов в сборнике трудов конференции «Неделя науки ФизМех 2023», в печати.
13. Пегливанова М.М., Назарова Е.Д., Филин В.Ю. *Сравнение оценок удлинения образцов на растяжение разной кратности.* XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 13-17 февраля 2023 г., тезисы докладов – Пермь: ПФИЦ УрО РАН, 2023 г.

## ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ УГЛЕПЛАСТИКА В РАЗЛИЧНЫХ ТЕМПЕРАТУРНО-СИЛОВЫХ УСЛОВИЯХ

*М. Г. Петров*

*ФАУ «Сибирский научно-исследовательский институт авиации  
им. С. А. Чаплыгина», Новосибирск; mark-st@ngs.ru*

Процесс разрушения композиционного материала (КМ) рассматривается с точки зрения науки о материалах, что требует в общем случае междисциплинарного подхода [1]. Разрушение и деформирование материалов являются термодинамическими процессами, будь то общее течение материала (ползучесть) или распределённые по объёму локальные пластические деформации, также протекающие во времени, (усталость) [2, 3]. Проведя термоактивационный анализ экспериментальных данных при общем течении материала, мы тем самым выявляем законы разрушения, с позиций которых следует далее рассматривать остальные случаи более сложных нагружений.

КМ отличается особенностями ввиду различий в реологических и прочностных свойствах составляющих его материалов, включая свойства адгезионного контакта между волокном и связующим. Поэтому при растяжении и сжатии, а также в случае вариаций его «конструктивного исполнения», прочностные характеристики композита будут различны, хотя общие закономерности процесса разрушения сохраняются [4].

Проведён термоактивационный анализ долговечности углепластика с различными схемами армирования при растягивающих и сжимающих нагрузках. Испытания на «прочность» (в инженерном понимании этого термина) являются с рассматриваемых позиций испытаниями на долговечность при нарастающих нагрузках. «Прочность» в этом случае характеризуется энергией активации, соответствующей времени пребывания, например, при максимуме напряжений, вычисляемому через интеграл от скорости разрушения по времени, и температуре. В результате была определена начальная энергия активации разрушения (ЭАР)  $155,3 \pm 8$  кДж/моль, одинаковая в пределах погрешностей её определения как при растягивающих, так и при сжимающих нагрузках в диапазоне температуры 20–150 и 20–120 °С соответственно.

Таким же образом был проведён термоактивационный анализ разрушения углепластика при межслойном сдвиге. Испытания проводились при комнатной температуре, поэтому варьировалось время нагружения в интервале трёх порядков. Значение начальной ЭАР получилось примерно таким же.

Введено понятие параметра прочности как величины, обратной значению активационного объёма [5]. Он имеет единственное значение, если структура материала не претерпевает существенных изменений, и характеризует «прочность», независимо от температуры испытаний и траектории нагружения во времени. В случае коррозионно-климатических воздействий параметр прочно-

сти отражает изменения состояния связующего в зависимости от температуры состава окружающей среды и радиационных воздействий.

Параметр прочности  $P_{sr}$  (для растяжения-сжатия, или  $P_{sh}$  для сдвига) определяется выражением

$$P_{st} = |\sigma_{\max}| / (U_0 - U_i) \text{ или } P_{st} = \tau_{\max} / (U_0 - U_i) = 1/\gamma,$$

где  $U_0$  – начальная ЭАР,  $U_i$  – ЭАР конкретного образца, вычисленная при среднем значении активационного объёма  $\gamma$  для выборки и соответствующего вида НДС. Скорость разрушения как величина, обратная долговечности, определяется выражением, где напряжения  $\sigma$  могут быть любой произвольной функцией времени:

$$\dot{\omega} = v_0 \exp\left(-\frac{U_0 - \gamma\sigma(t)}{RT}\right).$$

Здесь  $v_0 = 10^{13} \text{ с}^{-1}$  – характерная дебаевская частота [3]. Из условий одинаковой повреждённости, полученной к моменту времени  $t = t_*$ ,

$$\int_0^{t_*} \dot{\omega}(t, \sigma) dt = \tau_{eq} v_0 \exp\left(-\frac{U_0 - \gamma|\sigma_{\max}|}{RT}\right)$$

определяется эквивалентное время разрушения  $\tau_{eq}$  для  $\sigma = |\sigma_{\max}|$ . Абсолютное значение напряжений используется при разрушении КМ от сжатия, происходящем по тем же законам, что при растяжении металлических сплавов. Логарифм произведения  $\tau_{eq} v_0$ , умноженный на универсальную газовую постоянную  $R$  и абсолютную температуру  $T$ , даёт значение  $U_i$ . Пример силовой зависимости ЭАР углепластика при межслойном сдвиге приведён на рис. 1.

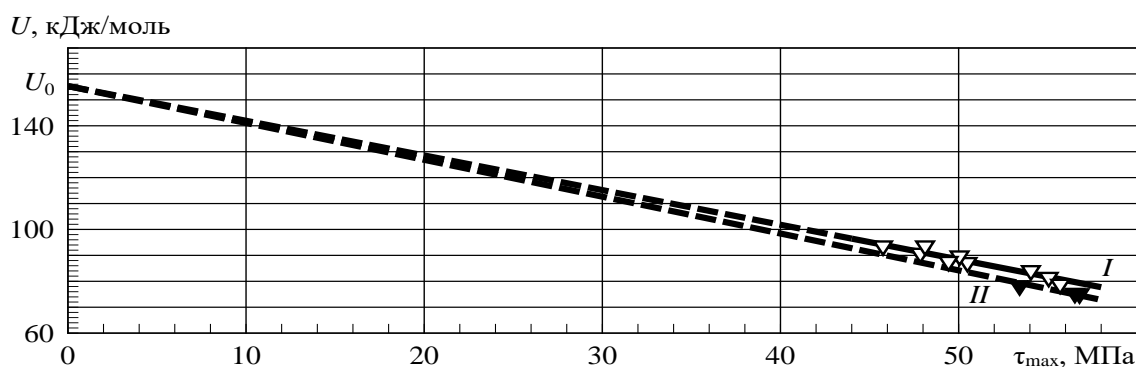


Рис. 1. Силовые зависимости ЭАР углепластика при межслойном сдвиге с различными скоростями перемещений: I – минимальное значение активационного объёма; II – увеличенное значение коэффициента  $\gamma$ , полученное для образцов другой группы прочности

Нагружение при переменных напряжениях требует построения математической модели, воспроизводящей при расчётах структуру материала в виде поля внутренних напряжений и процессы локальных пластических деформаций, связанных с накоплением в нём повреждений [3]. Испытания, проведённые при различных программах нагружения, включая составленные по записям нагруженности крыла самолёта в эксплуатации, и сравнение полученных данных



с расчётными оценками долговечности говорят о приемлемости рассматриваемой концепции. Модель и термоактивационный анализ полученных данных показывают, является ли разрушение результатом ползучести или усталости. На примере разрушения углепластика при межслойном сдвиге проиллюстрирован переход процесса разрушения в результате циклической ползучести к усталостному разрушению. Усталостное разрушение является таким же временным процессом, как и ползучесть, но более локализованным и демонстрирующим тем самым иные закономерности в зависимости от параметров цикла нагружения. Они становятся понятными, если рассматривать получаемые экспериментальные данные в одних единицах измерения – единицах времени. То есть так, как в действительности происходит процесс разрушения.

Если разрушение конструкции во время сжатия происходит с потерей устойчивости её тонкостенных элементов, то параметры математической модели материала могут быть подобраны по силовому воздействию на КМ, а проверены расчётом по перемещению (деформации). Но в этом случае в полцикле сжатия (продольном изгибе) действуют и растягивающие напряжения, которые тоже создают повреждения, и закономерности разрушения по асимметрии нагружения становятся иными.

Таким образом, рассмотрение внутренних процессов, происходящих в структуре материала, как термодинамических позволяет решать задачи прогнозирования долговечности материалов при произвольных температурно-силовых условиях. Расчёт ведётся по временным шагам, на каждом из которых материал имеет определённую температуру, напряжения и скорость их изменения. КМ отличает различие в параметрах его структурной модели в зависимости от вида НДС, и под разрушением следует понимать процесс его расслоения, что при сжимающих нагрузках приводит к потере устойчивости слоёв.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Petrov M.G. *An Interdisciplinary Approach to Fracture of Solids from the Standpoint of Condensed Matter Physics*. Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal. 2022. V. 7. Issue 2. P. 133-142.
2. Петров М.Г. *Разрушение и деформирование материалов как термодинамические процессы*. Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». 2022. № 2. С. 93-103.
3. Петров М.Г. *Исследование долговечности материалов с использованием кинетической концепции разрушения*. ПМТФ. 2021. Т. 62. № 1. С. 165-178.
4. Petrov M.G. *Mathematical modeling of failure and deformation processes in metal alloys and composites*. American Journal of Physics and Applications. 2020. V. 8. No. 4. P. 46-55.
5. Петров М.Г., член-корреспондент РАН Лебедев М.П., Старцев О.В., Копырин М.М. *Влияние низких температур и влаги на прочностные свойства углепластика*. Доклады РАН. Химия, науки о материалах. 2021. Т. 500. С. 62-68.

## КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ИЗГИБА КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНЫ С УЧЕТОМ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ МАТЕРИАЛА

*И. Е. Петраков*

*Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск;  
petrigr@icm.ru*

В работе рассматривается контактная задача изгиба многослойной композитной пластины, рассматриваемой в рамках гипотезы Кирхгофа. Каждый слой композита представляет собой материал, армированный тонкими волокнами, расположенными параллельно друг другу. Математическая модель построена на основе обобщенного реологического метода [1], позволяющего получить определяющие уравнения, учитывающие разные модули упругости материала при растяжении и сжатии. С помощью вариационного принципа Лагранжа получен следующий интеграл упругой энергии:

где  $\Omega$  – двумерная область с границей  $\Gamma$ , совпадающая с серединой

$$\frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left( \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon : (a + b) : \varepsilon - b : \Pi(\varepsilon) : \varepsilon dx_3 - 2\bar{q}\bar{u} \right) dx_1 dx_2 - \int_{\Gamma} \left( \bar{Q}\bar{u} + M_n \frac{\partial w}{\partial n} \right) ds,$$

поверхностью пластины,  $a$  – тензор модулей упругости при сжатии,  $b$  – тензор дополнительных модулей при растяжении,  $\varepsilon$  – тензор деформаций,  $\bar{u}$  – вектор перемещений,  $\bar{q}(x_1, x_2)$  – распределенная нагрузка. На части границы заданы главные краевые условия:

$$u = u_0(x_1, x_2), \quad v = v_0(x_1, x_2), \quad w = w_0(x_1, x_2), \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \gamma_0(x_1, x_2).$$

На остальной части границы заданы  $\bar{Q}(x_1, x_2)$  – усилие на границе пластины,  $M_n(x_1, x_2)$  – нормальный изгибающий момент на краях.

Контакт со штампом описывается в виде неравенства  $w(x_1, x_2) \geq \varphi(x_1, x_2)$ , заданного в области  $\Omega$ . Для получения изгиба пластины решена задача минимизации функционала методом множителей Лагранжа с ограничением в виде неравенства. Численное решение получено с помощью метода конечных элементов с использованием треугольного элемента Аргириса. Построена модифицированная функция Лагранжа [2] для дискретной постановки:

$$L(U, \Lambda) = \Lambda_0 \sum_{l=1}^m \iint_{\Omega_l} (W^l)^T D_l^T K_l D_l W^l - q^T W^l + \frac{1}{2r} \left( (\Lambda_l + r(\Phi_l - W_l))^+ \right)^2 dx_1 dx_2,$$

где  $\Omega_l$  – область  $l$ -го конечного элемента,  $W^l$  – локальный вектор обобщенных координат,  $K_l$  – матрица изгибных жесткостей, полученная интегрированием по толщине пластины с учетом оператора проектора,  $D_l$  – матрица дифференцирования,  $q$  – вектор обобщенных сил,  $\Phi_l$  – вектор ограничений  $l$ -го элемента.

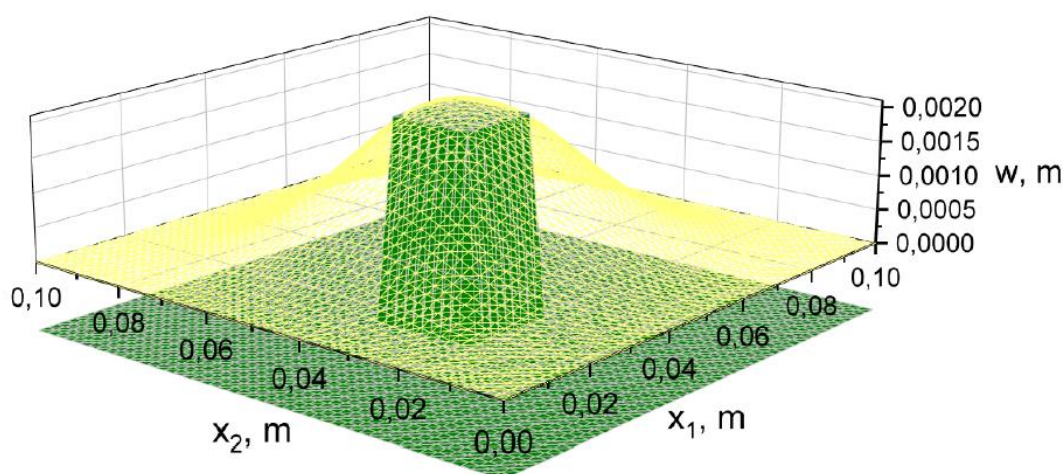


Рис. 1. Прогиб консольно-закрепленной пластины под действием жесткого штампа

Проведены серии вычислительных экспериментов для сравнения изгиба при расчетах, учитывающих и не учитывающих разномодульность, и изгиб пластины штампами различной формы. На рис. 1 показан изгиб однослойной пластины, армированной под углом 45 градусов штампом  $\varphi = 0.002$  при  $0.004 < x_1 < 0.006$ ,  $0.004 < x_2 < 0.006$  и  $= -0.001$  в остальных точках.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Садовская О.В., Садовский В.М. *Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. Жильцов А.В., Намм Р.В. *Метод множителей Лагранжа в задаче конечномерного выпуклого программирования*. Дальневост. матем. журн. 2015. Т. 15. № 1. С. 53-60.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ, ВЫЗВАННЫХ ЛАЗЕРНОЙ УДАРНОЙ ПРОКОВКОЙ, В ТИТАНОВОМ СПЛАВЕ ВТ-6

О. А. Плехов<sup>1, а</sup>, А. А. Костина<sup>2, б</sup>, М. С. Желнин<sup>2, с</sup>, Е. А. Гачегова<sup>2, д</sup>,  
А. Н. Вишивков<sup>2, е</sup>

<sup>1</sup>Пермский федеральный исследовательский центр Уро РАН, Пермь;  
<sup>а</sup>proa@icmm.ru

<sup>2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН;

<sup>б</sup>kostina@icmm.ru; <sup>с</sup>zhelnin.m@icmm.ru; <sup>д</sup>gachegova.e@icmm.ru;  
<sup>е</sup>vshivkov.a@icmm.ru

Лазерная ударная проковка (ЛУП) – эффективный бесконтактный метод для обработки поверхности металлических конструкций. Данный метод предполагает создание в металлической конструкции сжимающих остаточных напряжений (ОН) путем возбуждения ударных волн посредством короткого высокоэнергетического лазерного импульса. Основными преимуществами данного подхода по сравнению с другими методами являются большая глубина проникновения (более 1 мм) и возможность обработки деталей сложной геометрии. Для поиска оптимального режима лазерного упрочнения проводится численное моделирование этого процесса.

Данная работа направлена на разработку трехмерной конечно-элементной модели ЛУП с использованием конечно-элементного пакета Simulia Abaqus. Для расчета напряженно-деформированного состояния с учетом эффекта зависимости предела текучести от скорости деформирования используется модель Джонсона-Кука, которая в предположении отсутствия температурного разупрочнения вследствие наклепа [1-3] имеет вид:

$$\sigma_Y = [A + B \varepsilon_p^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p}{\dot{\varepsilon}_{p,0}} \right) \right], \quad (1)$$

где  $\sigma_Y$  – предел текучести,  $A$  – предел текучести при квазистатическом нагружении,  $B$ ,  $n$  – параметры, определяющие упрочнения материала при квазистатическом нагружении,  $\varepsilon_p$  – эквивалентная пластическая деформация,  $C$  – материальный параметр, определяющий скоростную чувствительность,  $\dot{\varepsilon}_p$  – интенсивность скоростей деформаций,  $\dot{\varepsilon}_{p,0}$  – скорость деформации, при которой были определены параметры  $A$ ,  $B$  и  $n$ .

Значения параметров модели Джонсона-Кука для титанового сплава ВТ6 приведены в табл. 1.

Таблица 1. Константы закона упрочнения Джонсона-Кука для титанового сплава ВТ6

$A$ , МПа	$B$ , МПа	$C$	$n$	$\dot{\varepsilon}_{p,0}$
978	826	0.034	0.639	0.005

Процесс обработки моделировался в виде последовательности единичных ударов, которые задавались в виде граничного условия по механическому давлению, прикладываемому поочередно к каждому сегменту. Моделирование каждого удара происходило в два этапа. Первый шаг заключался в решении динамической задачи с использованием явного интегрирования по времени. Второй шаг заключался в решении статической задачи с использованием неявного решателя. На этом этапе остаточное напряжение, связанное с пластической деформацией, полученной на предыдущем шаге, рассчитывалось путем решения уравнения статического равновесия. Начальные распределения полей напряжений, деформаций и перемещений на данном этапе задавались путем переноса итоговых значений полей из предыдущего (динамического) шага.

На рис. 1 показаны результаты моделирования ОН в квадратной пластине, изготовленной из титанового сплава ВТ-6, совместно с экспериментальными профилями для плотностей энергии  $3.3 \text{ ГВт/см}^2$  и  $20 \text{ ГВт/см}^2$ . ЛУП подвергалась квадратная область  $12 \times 12 \text{ мм}$  с применением квадратных пятен без перекрытия. Расчетные остаточные напряжения находятся в хорошем соответствии с экспериментальными данными.

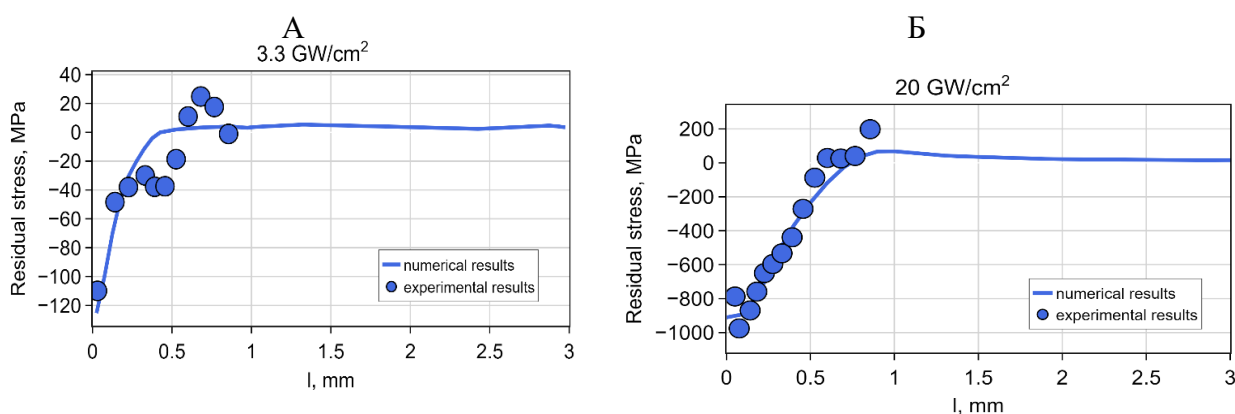


Рис. 1. Профили остаточных напряжений, полученные методом лазерной ударной проковки для титанового сплава ВТ6 с пиковой интенсивностью энергии, равной:  
(а)  $3.3 \text{ ГВт/см}^2$ ; (б)  $20 \text{ ГВт/см}^2$

На рис. 2 А показаны результаты исследования влияния различных плотностей энергии на профили ОН по глубине, полученные при помощи разработанной модели. Видно, что увеличение плотности энергии лазерного излучения приводит к падению минимального остаточного сжимающего напряжения на обработанной поверхности образца. Увеличение с  $5,5 \text{ ГВт/см}^2$  до  $7,8 \text{ ГВт/см}^2$  приводит к падению остаточного напряжения на 70 % (с  $-400 \text{ МПа}$  до  $-680 \text{ МПа}$ ). При увеличении с  $7,8 \text{ ГВт/см}^2$  до  $10 \text{ ГВт/см}^2$  происходит уменьшение остаточного напряжения на 18 % (до  $-800 \text{ МПа}$ ). Помимо этого, можно также отметить, что с ростом энергии импульса увеличивается глубина проникновения сжимающих остаточных напряжений.

Профили остаточных напряжений, представленные на рис. 2 Б, показывают, что 50 % перекрытие лазерных пятен приводит к снижению мини-

мального значения остаточного напряжения на 7,5 % с -800 МПа до -860 МПа. Глубина проникновения остаточных сжимающих напряжений увеличивается с 0,8 мм до 1,1 мм.

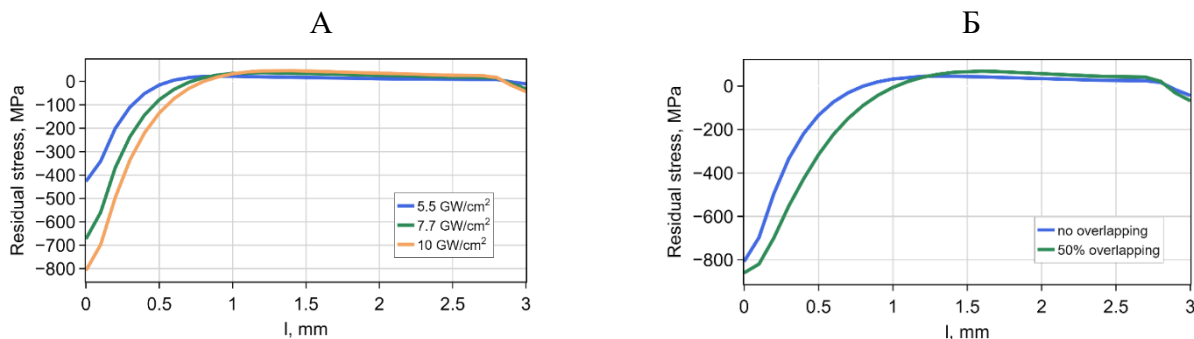


Рис. 2. А – профили остаточных напряжений, полученные ЛУП при различных плотностях энергии; Б – профили остаточных напряжений по глубине, полученные ЛУП с плотностью энергии 10 ГВт/см<sup>2</sup> с 50 % перекрытием лазерных пятен и без него

Из рис. 3 А видно, что добавление второго слоя проковки увеличивает глубину проникновения сжимающих остаточных напряжений и уменьшает значение сжимающих ОН на поверхности. Однако добавление последующих слоев проковки не приводит к значительному улучшению результатов. Рис. 3 Б показывает, что изменение формы лазерных пятен не оказывает существенного влияния на полученные результаты.

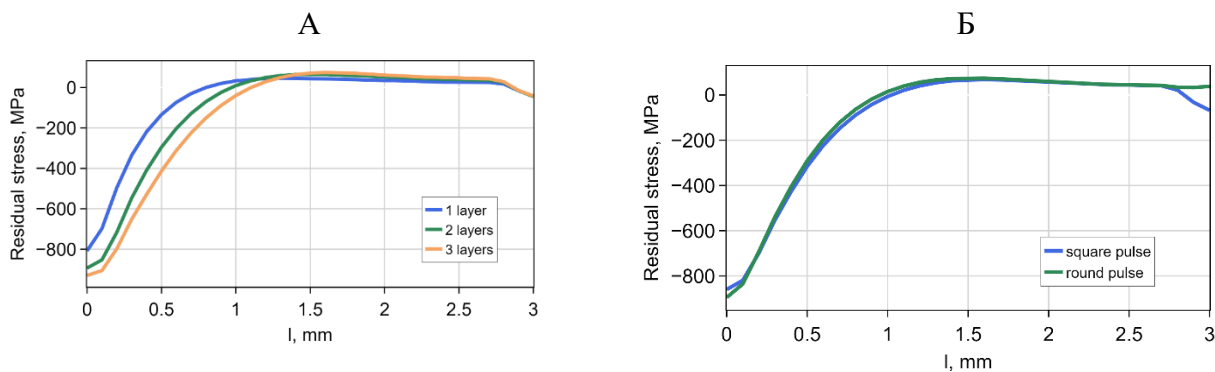


Рис. 3. А – профили остаточных напряжений, полученные ЛУП с плотностью энергии 10 ГВт/см<sup>2</sup> при различном числе проходов лазерного луча; Б – профили остаточных напряжений по глубине, полученные ЛУП с плотностью энергии 10 ГВт/см<sup>2</sup> с 50 % перекрытием лазерных пятен для квадратных и круглых пятен

Таким образом, проведенный анализ влияния параметров проковки показывает, что наиболее существенное влияние на профили ОН по глубине оказывает плотность энергии лазерного воздействия. Наименее значимым параметром является форма лазерного пятна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 20-48-596005), Правительства Пермского края (код проекта С-26/829).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Langer K., Spradlin T.J., Fitzpatrick M.E. *Finite element analysis of laser peening of thin aluminum structures*. Metals. 2020. Vol. 10. 93.
2. Hfaiedh N., Peyre P., Song H., Popa I., Ji V. *Finite element analysis of laser shock peening of 2050-T8 aluminum alloy*. Int. J. Fatigue. 2015. Vol. 70. P. 480-489.
3. Hu Y., Yao Z. *Numerical simulation and experimentation of overlapping laser shock processing with symmetry cell*. Int. J. Mach. Tools Manuf. 2008. Vol. 48. P. 152-162.



## ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УДАРНИКА НА ПРОНИКАНИЕ В ПРЕГРАДУ ПРИ УДАРЕ

А. В. Радченко<sup>1, а</sup>, П. А. Радченко<sup>1</sup>, С. П. Батуев<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;

<sup>а</sup>andrey@ispms.ru

Представленные ранее результаты [1] показали, что вращение ударника оказывает влияние на процесс его взаимодействия с преградой. Вместе с тем систематические исследования влияния вращения ударника на динамику процесса взаимодействия и разрушения материалов отсутствуют. Это связано отчасти с предположением, что при взаимодействии вращающегося ударника основное влияние будет оказывать трение. Но проведенные эксперименты Джозефом Краффттом [2] по исследованию проникающей способности вращающихся и невращающихся ударников показали, что вклад трения несущественен: для низкоскоростного взаимодействия, он не превышает 3–4 %, а при высокоскоростном ударе менее 1 %. В дальнейшем, основываясь на выводах работы [2], влиянием вращения на процесс проникания ударников в преграды пренебрегали [3] и влияние вращения не исследовалось. Также эти результаты явились обоснованием использования условия идеального скольжения на контактной поверхности между ударником и преградой при математическом и численном моделировании процессов ударного взаимодействия твердых тел.

Исследовано высокоскоростное взаимодействие высокопрочных стальных ударников с преградой конечной толщины. Рассмотрены различные типы головных частей ударников: оживальная, полусферическая и плоская. Частота вращения  $\nu$  варьировалась от 0 до 10000 об/с. Рассмотрен диапазон углов взаимодействия  $\alpha$  от  $0^\circ$  до  $75^\circ$ . Постановка задачи приведена на рис. 1.

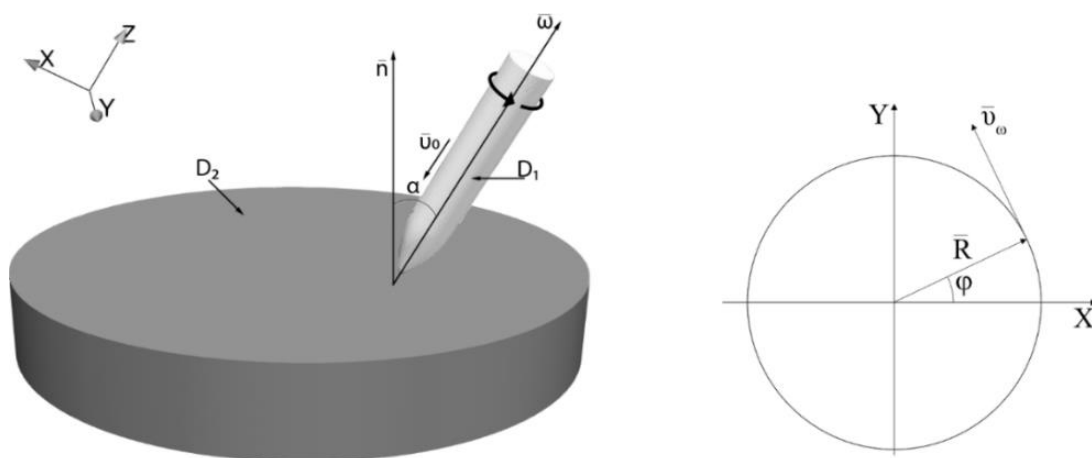


Рис. 1. Постановка задачи



Установлено, что отличия в проникании вращающегося и невращающегося ударника обусловлены наличием во вращающемся ударнике напряженно-деформированного состояния, вызванного вращательным движением. Определены условия возникновения рикошета ударников для различных углов взаимодействия, скоростей вращения и форм головной части. На рис. 2 представлены кривые, показывающие как меняется во времени угол между вектором скорости центра масс оживального ударника и нормалью к преграде.

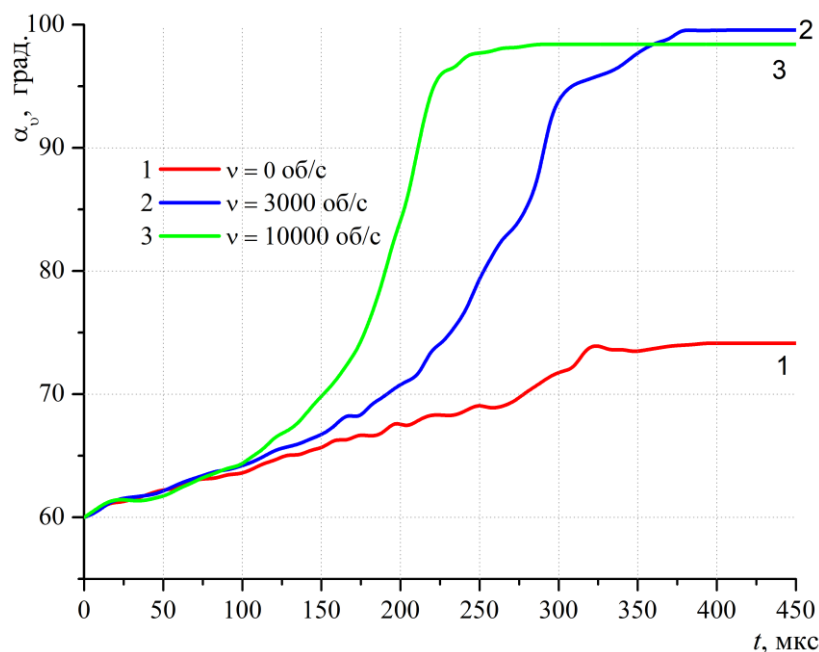


Рис. 2. Изменение во времени угла между вектором скорости центра масс ударника и нормалью к преграде

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00407, <https://rscf.ru/project/22-21-00407>.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. *Effect of Projectile Rotation on High-Velocity Impact Fracture*. Physical Mesomechanics. 2022. V. 25. P. 119-228.
2. Krafft J.M. *Surface Friction in Ballistic Penetration*. Journal of Applied Physics. 1955. V. 26, No. 10. P. 1248-1253.
3. Goldsmith W. *Non-ideal projectile impact on targets*. Int. J Impact Eng. 1999. V. 22. P. 95-395.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИПЕРСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КОСМИЧЕСКОГО МУСОРА С ЗАЩИТНЫМИ ЭКРАНАМИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

*П. А. Радченко<sup>1, a</sup>, А. В. Радченко<sup>1</sup>, С. П. Батуев<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск;*

*<sup>a</sup>pavel@ispms.ru*

Количество космического мусора в космосе постоянно растет. Частицы космического мусора имеют различную форму, размеры и могут взаимодействовать с космическими аппаратами с различной скоростью, в зависимости от траектории движения. Причем на догоняющих курсах скорость взаимодействия может находиться в диапазоне 2000–4000 м/с, а на встречных курсах может достигать 15000 м/с. Для защиты космических аппаратов широко применяются разнесенные конструкции, состоящие из одного или двух тонких экранов (щит Уиппла). При взаимодействии с тонким экраном космическая частица разрушается, и ее поражающая способность существенно снижается, что позволяет сохранить защищаемую конструкцию.

Проведение экспериментов по соударению в гиперскоростном диапазоне весьма дорогостоящее мероприятие и практически нереализуемое для достаточно массивных частиц. Поэтому основным методом исследования гиперскоростного удара (HyperVelocity Impact, HVI) является численный эксперимент. Основные методы, используемые для моделирования HVI, можно разделить на три группы: методы, основанные на Лагранжевом подходе (например метод конечных элементов, МКЭ), методы основанные на Эйлеровом подходе и бессеточные методы. Лагранжев метод конечных элементов четко описывает контактные границы, границы разделов материалов и сложные формы конструкций. Однако при решении задач HVI методом конечных элементов существуют два недостатка – несохранение энергии системы и существенное искажение расчетной сетки. Методы, основанные на Эйлеровом подходе, позволяют сохранить энергию и массу системы, но не позволяют точно описывать границы материалов и формы конструкций, что особенно важно для корректного описания ударно-волновых процессов. Также такой подход требует больше вычислительных ресурсов. Смирнов и соавторы [1] предложили адаптивный метод уточнения сетки для задач HVI, который может уменьшить вычислительные ресурсы, требуемые методом Эйлера. Широкое распространение для задач HVI получили бессеточные методы, они сохраняют массу и энергию системы. Особенно это касается метода сглаженных частиц (SPH) [2], который показал хорошие прогнозы в задачах HVI. Тем не менее они имеют такие недостатки, как сложность описания границ и невозможность моделировать анизотропные материалы, поскольку частицы не имеют информации о направлении и границах. Эти недостатки не позволяют бессеточным методам точно моделировать армированные волокнами композиты [3].

В нашей работе моделирование НВИ проводится Лагранжевым методом конечных элементов. В методе реализован алгоритм эрозионного разрушения, обеспечивающий выполнение уравнения неразрывности и неискажение расчетной сетки [4]. Частица космического мусора моделировалась стальным шаром диаметром 15 мм, экран представлял собой стальную пластину толщиной 2 мм. Исследован диапазон скоростей взаимодействия 2000–7000 м/с. Волновую картину и динамику разрушения ударника и пластины при скоростях взаимодействия 2300 и 7000 м/с иллюстрируют рис. 1 и 2.

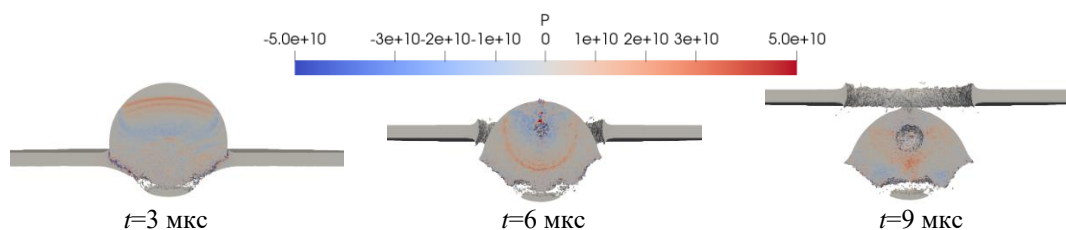


Рис. 1. Конфигурации взаимодействующих тел и распределение давления (ГПа) в различные моменты времени.  $v_0=2300$  м/с

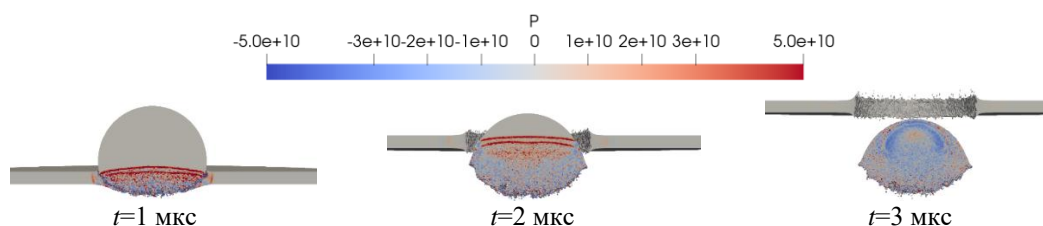


Рис. 2. Конфигурации взаимодействующих тел и распределение давления (ГПа) в различные моменты времени.  $v_0=7000$  м/с

Предложенная модель, численный алгоритм, реализованные в программном комплексе EFES 2.0, показали свою адекватность при моделировании гиперскоростного взаимодействия твердых тел с учетом развития разрушения в материалах и их фрагментации.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22–21–20091, <https://rscf.ru/project/22-21-20091/> и средств Администрации Томской области.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Smirnov N., Kiselev A., Zakharov P., Muratov R., Bukharinskaya D. *The usage of adaptive mesh refinement in simulation of high-velocity collision between impactor and thin-walled containment*. Acta Astronaut. 2022. V. 194. P. 401-410.
2. Silnikov M., Guk I., Nechunaev A., Smirnov N. *Numerical simulation of hypervelocity impact problem for spacecraft shielding elements*. Acta Astronaut. 2018. V. 150. P. 56-62.
3. Qi-Guang He, Xiaowei Chen. *Simulation method of debris cloud from fiber-reinforced composite shield under hypervelocity impact*. Acta Astronautica. 2023. V. 204. P. 402-410.

4. Radchenko P.A., Radchenko A.V., Batuev S.P. *Effect of Projectile Rotation on High-Velocity Impact Fracture*. Physical Mesomechanics. 2022. V. 25. P. 119-228.

## РЕАЛИЗАЦИЯ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ОБЪЕКТНОГО ПОДХОДА

*Е. В. Решетникова<sup>1, а</sup>, В. О. Каледин<sup>1</sup>, А. Д. Ульянов<sup>1</sup>, А. С. Лазненко<sup>2</sup>*  
*<sup>1</sup>Кузбасский гуманитарно-педагогический институт ФГБОУ ВО*  
*«Кемеровский государственный университет», Новокузнецк;*  
*<sup>2</sup>ФАУ «СибНИА им. С. А. Чаплыгина», Новосибирск;*  
*<sup>а</sup>elenares@yandex.ru*

Генетические алгоритмы отличаются от других поисковых процедур тем, что осуществляют поиск улучшением сразу нескольких альтернатив, охватывающих различные области пространства решений одновременно [1]. В данной работе авторы ставят задачи выявить особенности основных этапов генетического алгоритма и оценить его применимость к оптимизации монолитной детали сложной геометрической формы при наличии нескольких расчётных случаев нагружения.

Реализация генетического алгоритма выполнена в среде функционально-объектного программирования «Алгозит» [2]. Выбор обусловлен наличием в среде проверенной базы типов алгомитов (функциональных классов), встроенного интерпретируемого языка «Ядро» [3] и визуальным представлением алгоритма в виде функционально-объектной сети, упрощающим программирование и отладку.

Гены особи представлены факторами вычислительного эксперимента. Размахи факторов учитываются при мутациях. Отклики представлены запасом по напряжениям и массой конструкции. Если во всех расчётных точках напряжения не превышают предела текучести, минимизируемая целевая функция принимается равной массе. Если же имеется хотя бы одна точка, в которой напряжения превышают предел текучести, масса умножается на повышающий коэффициент:

$$S = \max(1, \sigma_{\text{экв max}} - \sigma_T), \quad (1)$$

где  $\sigma_{\text{экв max}}$  – максимальное эквивалентное напряжение,  $\sigma_T$  – предел текучести материала.

Скрещивание осуществляется путем одноточечного кроссовера, пары для скрещивания отбираются на основе метода рулетки. Лучшая особь сохраняется без изменений. Мутация осуществляется в 2 этапа, вероятности составляют 5 % и 10 % соответственно для каждого этапа. На первом этапе мутация приводит к случайному изменению гена в пределах размахов, на втором – изменение не превышает 5 % от размаха. Остановка производится, если лучшая половина популяции имеет отклонение от среднего значения откликов меньше заданного числа.

Среда визуального программирования «Алгозит» позволяет строить алгоритмы в виде ориентированных графов, где узлы графа – выполняемые объекты

с состоянием (алгоматы), а ребра – отношения вида «аргумент – зависимый объект». Абстракция верхнего уровня реализации генетического алгоритма представлена на рис. 1.

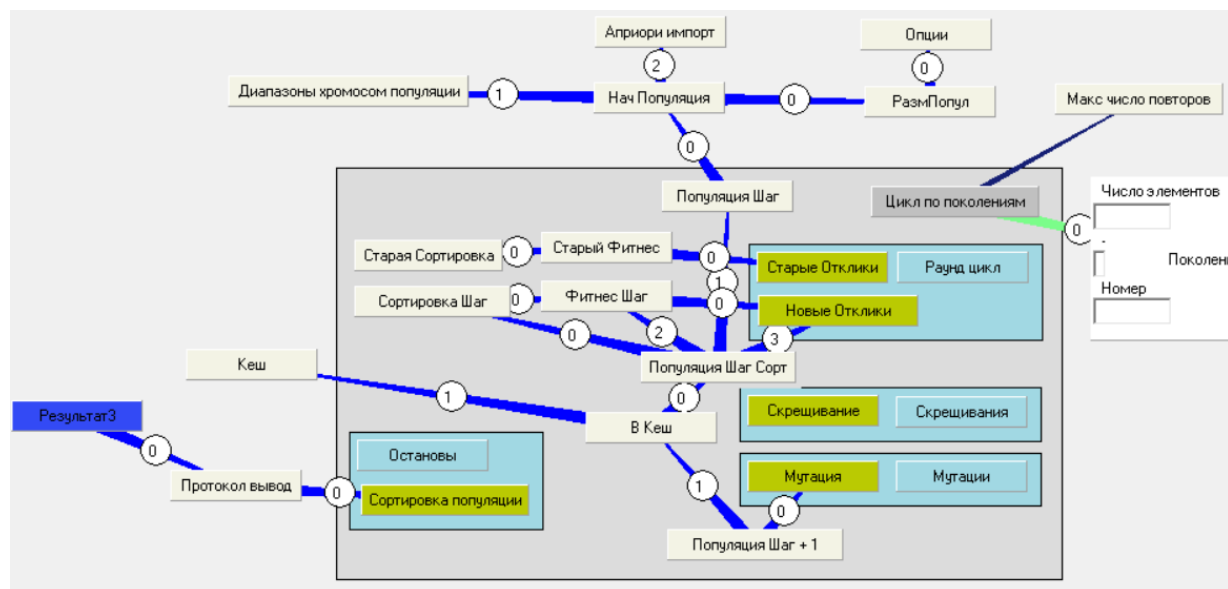


Рис. 1. Функционально-объектная схема страницы верхнего уровня алгоритма

Алгомот «Априори импорт» вводит таблицу с предустановленными генотипами особей популяции, алгомот «Диапазоны хромосом популяции» определяет размахи факторов вычислительного эксперимента, или пределы изменения генотипов, алгомот «Начальная популяция» имеет табличное представление и формирует начальную популяцию. Все алгоматы, вошедшие в серую рамку, являются входящими в итератор «Цикл по поколениям». В агрегате «Раунд цикл» производится вычисление откликов. Алгомот «Популяция Шаг Сорт» сохраняет в табличном виде данные особи в порядке возрастания значений целевой функции: уникальный номер особи, генотип, вычисленное значение целевой функции и значения откликов. Таким образом, в памяти алгомата составляется рейтинг текущей популяции. Отдельно надо отметить алгомот «В кеш», он используется для получения откликов особей, рассчитанных ранее, что позволяет существенно ускорить процесс симуляции.

Ключевой особенностью программы является возможность гибкой перестройки алгоритма по мере надобности без использования сторонних компиляторов. Процесс облегчается за счет наглядности представления алгоритма в виде функционально-объектной схемы.

С использованием программы произведен расчет модельной конструкции – кронштейна с проушинами в виде двух пар соосных отверстий в верхних пластинах, снизу закреплённый болтовым соединением на неподвижном основании. Нагрузка прикладывается к кромкам отверстий проушин под углом к вертикали, в нескольких расчётных случаях. Оптимизация выполняется по массе с ограничением по прочности. Деформирование в плоскости и изгиб соответствуют модели пластины Кирхгофа-Лява, а окантовки и рёбра подчиняются

уравнениям растяжения-сжатия и изгиба балок Сен-Венана. Обобщённая конструктивно-силовая схема приведена на рис. 2.

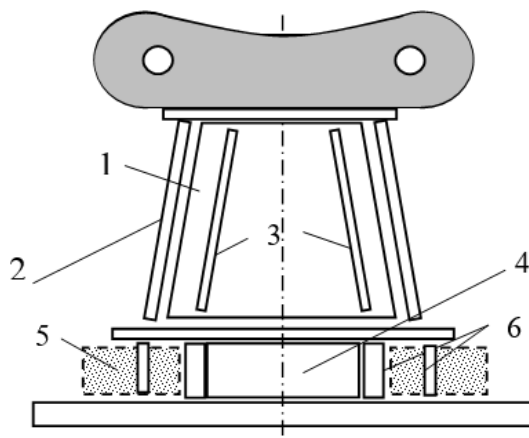


Рис. 2. Обобщённая конструктивно-силовая схема: 1 – основная пластина кронштейна; 2 – окантовка; 3 – рёбра; 4 – центральная нижняя пластина; 5 – продольная стенка полукессона; 6 – поперечные стенки-стойки полукессона

Варьируемыми параметрами являются геометрические параметры конструктивных элементов. При вырождении элементов (нулевых размерах сечений) из обобщённой схемы получаются частные виды: пластина, рама, комбинированная конструкция.

Робастность модели обеспечивается аналогично работе [4], по матрицам полноты и совместности. Начальная популяция формируется таким образом, чтобы в ней содержались все возможные значения каждого из параметров в соответствии с их уровнями значимости.

Вычислительный эксперимент был проведен при объёме популяции 50 особей на 40 поколениях. Суммарное время расчёта составило 16 часов на компьютере с двухъядерным процессором Intel i3, тактовая частота 2x2,4 ГГц.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Курейчик В.В., Курейчик В.М., Родзин С.И. *Теория эволюционных вычислений: монография*. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
2. Каледин В.О., Васильева Е.И., Вячкин Е.С. *Алгоритмизация математических моделей: учеб. пособие*. Новокузнецк: НФИ КемГУ, 2018.
3. Каледин В.О. *Концепции языка программирования «Ядро»: метод. указ.* Новокузнецк, 2010.
4. Гайдачук В.Е., Каледин В.О., Качкар И.В., Кива Д.С. *Применение дифференциального метода проектирования к анализу и выбору рациональных конструктивно-силовых схем лопасти воздушного винта из композиционных материалов*. В сб.: Проектирование самолётных конструкций и их соединений. Харьков: ХАИ, 1986. С. 164-169.

## УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ СТРУКТУРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

А. Н. Рогалев<sup>1, а</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
Красноярск; <sup>а</sup>rogalyov@icm.krasn.ru

В докладе рассматривается устойчивость множества решений (области решений), включающих границы множеств (областей) решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти множества решений появляются тогда, когда в параметрах поставленной задачи присутствует неопределенность (известны лишь неравенства для данного параметра). Возможен также случай, когда правая часть зависит от управляющего воздействия. При этом важно оценивать и анализировать поведение областей точных решений и их границ в задачах практической (технической) устойчивости, что требует установить равномерную ограниченность решений относительно множества начальных значений и совокупности возмущающих воздействий на конечном интервале времени.

Имеет место отличие свойства устойчивости движения множества решений [1] от устойчивости одного из решений системы. Под устойчивостью множества решений понимается малое отклонение каждого из решений, входящих в это множество, от какого-либо невозмущенного решения при малых возмущениях. Исследованию этого вопроса посвящено несколько работ, например, [2-7], но исследование далеко от завершения, особенно сравнительно с методами устойчивости по Ляпунову.

В теории устойчивости в качестве меры отклонения системы от невозмущенного движения выбирается изменение некоторой характеристики движения (например, координаты или скорости) при введении начальных возмущений. Для множества решений этот вопрос имеет особое значение. Во первых возможно требуется эволюция возмущений во времени, т.е. темпоральная устойчивость, во-вторых могут иметь место структурные возмущения, изменяющие вид и свойства исходной системы ОДУ.

Обозначим математическую модель через  $\Sigma$ , определим векторную функцию состояния математической модели  $Y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ . Размерность вектора состояния  $Y(t)$  определяется в зависимости от постановки задачи.

Для исследования устойчивости множества решений математической модели необходимо оценить режим и динамику перехода всех траекторий, с учетом влияния возмущающих или управляющих воздействий

$$\frac{dY}{dt} = f(t, Y, u) \quad (1)$$



где  $Y(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$  – векторная функция состояния технической системы,  $u$  изменяется на некотором заранее заданном множестве  $U$  – допустимых входных воздействий (возмущений или управлений) и  $y_0 \in Y_0$  – область начальных состояний системы. Во многих задачах размерность вектора воздействий меньше размерности вектора состояний, воздействие может играть роль возмущения или управления.

Множество всех возможных траекторий динамики математической модели (1) описано так:

$$\Xi(Y) = \left\{ y(t) : \forall y(t_0) \in Y_0, \forall u \in U, \forall t \geq 0 \left| \frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), u(t)) \right. \right\}. \quad (2)$$

Требуется найти включение (построить границы)  $G \supseteq \Xi(Y)$  множества решений (2) для всех решений задачи (5.1). Эта задача усложняется тем, что множества функций представляют достаточно сложные области функционального пространства, сечения множеств при каждом фиксированном моменте времени также являются сложными областями в пространстве  $R^n$ ,  $n \geq 1$  – размерность значений решений.

**Определение 1.** Включение  $G \supseteq \Xi(Y)$  называется сходящимся к множеству точных решений при начальном включении (2), если  $\forall t \in I \quad \forall y \in Y(t) \quad \exists y_0 \in Y: y = y(t, y_0, u)$ , т.е. решения  $y(t, y_0, u)$  полностью заполняют включение – область внутри границ (многозначную функцию)  $G$  для  $y_0 \in A$ .

1. Чтобы оценить множество решений, нужно построить формулу решения в символьном виде.

2. После этого выполнить оценку области значений этой формулы.

**Утверждение.** Пусть найдена точная или приближенная формула решения  $y(t, y_0, u)$  математической модели управляемой системы ПТС (1).

Тогда оценка граничных значений областей значений этой формулы  $\bigcup_{u \in U} \bigcup_{y(t_0) \in Y_0} y(t, y, u)$  является оценкой области решений и используется для проверки пересечения с областью безопасности. Точность оценивания граничных значений определяется точностью применяемого численного метода и может быть в большинстве случаев вычислена. В тех случаях, когда оценка точности этого метода не может быть получена, применяется регуляризация этой задачи.

Для системы ОДУ (3) решается задача оценки нахождения (удержания) траектории системы в заранее заданном множестве. Для этого строятся символьные формулы решений и оценка множества значений решений. Проводится численный эксперимент подбора области начальных значений. Контролируется условие включения всех траекторий в некоторое множество значений на большом интервале времени.

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= -y_2 - \frac{-y_1 \cdot y_3}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 - \frac{-y_2 \cdot y_3}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \\ \frac{dy_3}{dt} &= \frac{y_1}{(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}\quad (3)$$

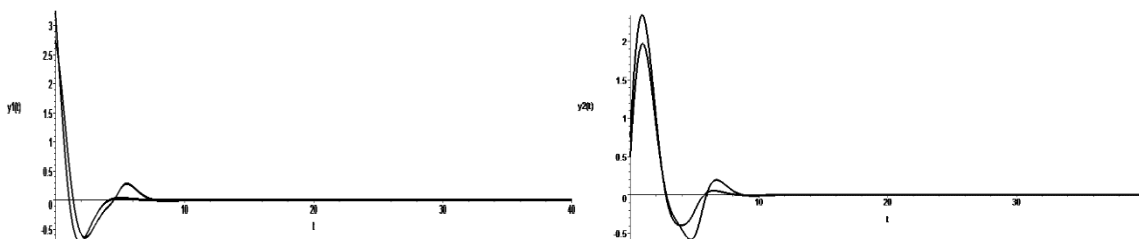


Рис. 1. Слева – область всех значений первой компоненты множества решений, справа – область всех значений второй компоненты множества решений

## ЛИТЕРАТУРА

1. Рогалев А.Н. *Гарантированные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений на основе преобразования символьных формул*. Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 5. С. 102-116.
2. Бронников А.М. *Вложение систем. Условия строгой нечувствительности линейных систем к неэкстенсивным структурным возмущениям*. Автоматика и телемеханика, 2004. № 4. С. 35-47.
3. Мартынюк А.А., Мартынюк-Черненко Ю.А. *Анализ множества траекторий нелинейной динамики: устойчивость относительно интервала начальных данных*. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49. № 10. С. 1252-1260.
4. Rogalev A.N., Rogalev A.A., Feodorova N.A. *Malfunction analysis and safety of mathematical models of technical systems*. J. Phys.: Conf. Ser. 2020. 1515. 022064
5. Rogalev A.N. *Set of Solutions of Ordinary Differential Equations in Stability Problems*. Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy Springer. 2020. P. 307-312.
6. Rogalev A.A., Feodorova N.A. *Mathematical modelling of risk and safe regions of technical systems and surviving trajectories*. J. Phys: Conf Ser. ICMSIT-II 2021. 1889. 02210.
7. Rogalev A.N. *Symbolic methods for estimating the sets of solutions of ordinary differential equations with perturbations on a finite time interval*. Journal of Vibration Testing and System Dynamics. 2023. Vol. 7. Issue. 1. P. 31-37.

## ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ И ГАЗОТРАНСПОРТНЫХ СВОЙСТВ СТЕКЛОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ МЕМБРАННЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ЦЕНОСФЕР ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗОЛ

Е. С. Роговенко<sup>1, а</sup>, Е. В. Фоменко<sup>1, b</sup>, А. Г. Аншиц<sup>1, 2, c</sup>

<sup>1</sup>Институт химии и химической технологии СО РАН – обособленное подразделение ФИЦ КНЦ СО РАН, Красноярск;

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск;

<sup>а</sup>rogovenko\_elena1989@mail.ru; <sup>b</sup>fom@icct.ru; <sup>c</sup>anshits@icct.ru

Развитие современных отраслей промышленности, металлургии, энергетики, электроники связано с совершенствованием технологий извлечения и получения высокочистых инертных газов He и Ne. Перспективным методом выделения этих газов является мембранное газоразделение, ввиду его высокой производительности и низкой энергоемкости по сравнению с традиционным криогенным методом. Эффективность мембранного газоразделения, а также чистота извлекаемых компонентов зависят от свойств материала мембраны [1, 2].

Существующие мембранные материалы: полимеры [3], MOF [4], цеолиты [5, 6] характеризуются высокой гелиевой проницаемостью на уровне  $10^{-11}$ – $10^{-14}$  (моль·м)/(м<sup>2</sup>·с·Па), но не способны обеспечить необходимой чистоты целевых компонентов. Селективность разделения смеси He/CH<sub>4</sub> для них невысока, а в отношении He/Ne – практически отсутствует.

Перспективными материалами для создания высокоселективных мембран являются непористые силикатные стекла. Для них характерны высокие коэффициенты разделения смесей He/N<sub>2</sub>, He/CH<sub>4</sub>, составляющие 10<sup>5</sup>–10<sup>6</sup> при 400 °С, а также He/Ne на уровне 10<sup>2</sup> в интервале температур 450–700 °С [7, 8].

В качестве перспективных мембранных материалов предлагается использовать полые стеклокристаллические алюмосиликатные микросферы – цено-сферы, которые образуются из минеральных компонентов угля при промышленном пылевидном сжигании. Ценосферы представляют собой удобные объекты для исследования газотранспортных свойств стеклокристаллических материалов в широком диапазоне варьирования их химического и фазового состава.

Целью настоящей работы являлось: получение алюмосиликатных стеклокристаллических мембранных материалов в широкой области составов на основе узких фракций ценосфер с оболочкой кольцевого и сетчатого строения, изучение их физико-химических и газотранспортных свойств по отношению к индивидуальным газам He и Ne и бинарной He-Ne смеси.

В качестве исходного сырья для получения морфологически однородных узких фракций ценосфер использовали концентраты ценосфер летучих зол, полученных при пылевидном сжигании каменного угля Кузнецкого и Экибастузского бассейнов.

Выделение узких фракций ценосфер проводили по технологической схеме [9], включающей стадии аэродинамической классификации, магнитной сепарации, гранулометрической классификации, разделение в жидкостях разной плотности, гидростатическое отделение от перфорированных и разрушенных глобул.

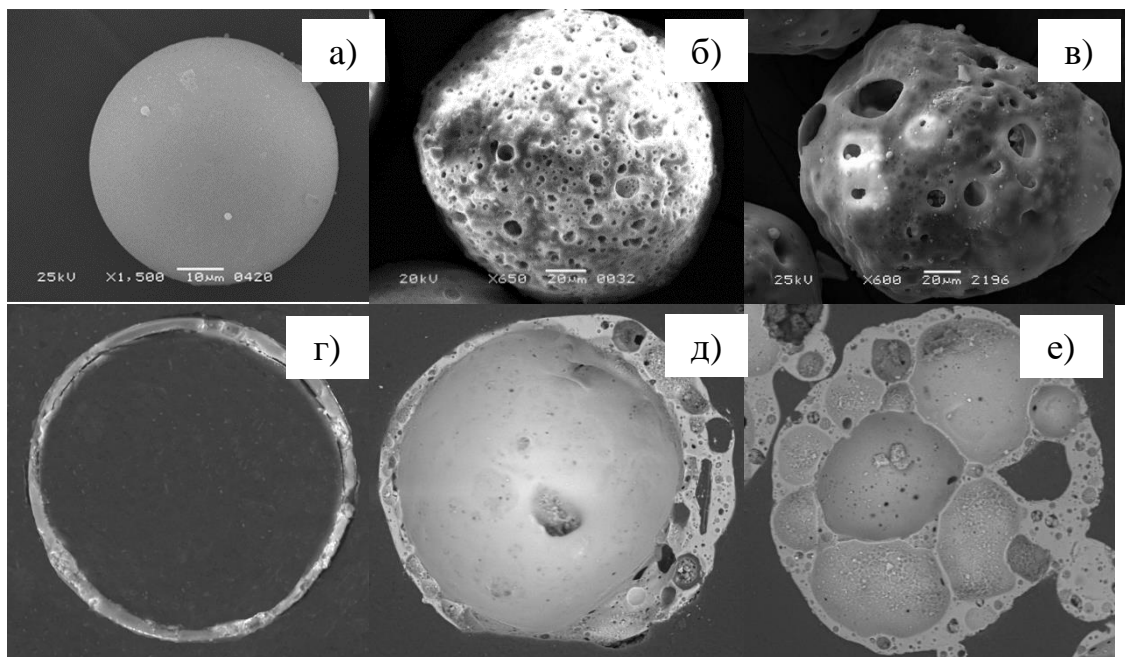


Рис. 1. СЭМ-снимки отдельных ценосфер с оболочкой кольцевого строения с тонкой сплошной оболочкой (а, г), кольцевого строения с пористой оболочкой (б, д), глобулы сетчатого строения (в, е)

По данным химического анализа выделенные узкие фракции ценосфер представляют собой многокомпонентную систему  $SiO_2-Al_2O_3-Fe_2O_3-CaO-MgO-Na_2O-K_2O$ . Содержания основных макрокомпонентов  $SiO_2$  и  $Al_2O_3$  изменяются в широком диапазоне значений – от 56 до 68 и от 21 до 38 мас. %.

Фазовый состав узких фракций ценосфер включает основные кристаллические фазы: муллит (0) и кварц в количестве 1-42 и 1-7 мас. % соответственно. Фаза кальцита присутствует на уровне примесей 0,1-0,7 мас. %. Содержание аморфной стеклофазы составляет 58-93 мас. %.

С целью изменения состава стеклофазы и очистки её от ионов-модификаторов узкие фракции ценосфер подвергали дополнительной высокотемпературной обработке при температуре 1000-1100 °С в окислительной атмосфере. В результате в оболочке были сформированы дополнительные дефектные фазы железосодержащего муллита (I), кварца (I), высокотемпературной модификации  $\beta$ -кristобалита и кальциевого алюмосиликата анортита, образование которых в процессе высокотемпературной обработки способствовало извлечению ионов-модификаторов из стеклофазы, что привело к увеличению содержания  $SiO_2$  до 83-91 мол. %.

Установлено, что в случае ценосфер кольцевого строения игольчатые кристаллиты муллита формируются на внешней и внутренней поверхностях

глобул (рис. 2 а, б), а для ценосфер сетчатого строения наблюдается объемная кристаллизация оболочки (рис. 2 в, г). Игольчатые кристаллиты муллита образуют своеобразный кристаллический каркас, который придает глобуле дополнительные прочностные характеристики, структурную устойчивость и способность выдерживать высокое давление. Прочностные характеристики ценосфер сетчатой структуры в 3-5 раз выше по сравнению с ценосферами кольцевой структуры.

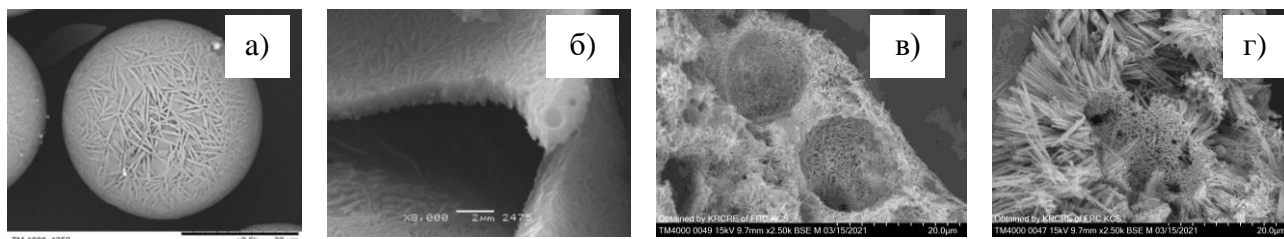


Рис. 2. СЭМ-снимки узких фракций ценосфер кольцевого строения (а, б) и сетчатого строения (в, г)

Газотранспортные свойства узких фракций ценосфер в отношении индивидуальных газов  $He$  и  $Ne$  исследовали на вакуумной статической установке в режиме диффузии газов из объема реактора внутрь глобул при давлении  $3 \cdot 10^4$  Па в интервале температур  $25-350$  °С и  $280-500$  °С для гелия и неона соответственно. Диффузия газов через оболочку осуществляется за счет разности парциальных давлений снаружи и внутри глобулы. Определение проницаемости оболочки ценосфер основывалось на измерении падения давления газа во времени после его перепуска в реактор, заполненного образцом. Значения коэффициентов проницаемости стеклофазы ценосфер,  $K$ , рассчитывали с учетом ее содержания, учитывая, что проницаемость кристаллических фаз на несколько порядков ниже, чем у стекла [10]. Установлено, что экспериментальные значения  $K_{He}$  и  $K_{Ne}$  прямо пропорциональны содержанию в ней оксидов-стеклообразователей. Для узких фракций ценосфер с глобулами кольцевого строения с ростом содержания  $SiO_2$  коэффициенты проницаемости при  $280$  °С увеличиваются на порядок; для ценосфер сетчатого строения  $K_{He}$  – в 3 раза,  $K_{Ne}$  – в 5 раз. Сравнительный анализ газопроницаемости стеклофазы ценосфер с оболочкой различного строения показал, что ценосферы сетчатого строения превышают по проницаемости ценосферы кольцевого строения близкого состава, например, с 10 % ионов модификаторов, в случае гелия – в 2 раза, неона – в 24 раза. Селективность  $\alpha_{He/Ne}$  стеклокристаллических мембранных материалов находится на высоком уровне, составляет 77-342 для ценосфер кольцевого строения и 22-72 – для сетчатого строения. Эти значения соответствуют селективности кварцевого стекла и существенно превышают аналогичные значения для известных мембранных материалов.

Определение газотранспортных свойств ценосфер по отношению к бинарной гелий-неоновой смеси состава 80 об. %  $He$  и 20 об. %  $Ne$  проводили на сорбционном анализаторе *ASAP 2020C-MP (Micromeritics)* с масс-спектрометрическим газоанализатором *Hidden QGA (Hidden Analytical)* для реги-

страции изменения концентрации компонентов газовой смеси во времени в процессе их диффузии из внутренних полостей ценосфер. Состав исследуемой смеси соответствует составу гелиевого концентрата, получаемого по криогенной технологии после низкотемпературной конденсации углеводородов [1]. Количественный анализ и регистрацию концентраций компонентов газовой смеси проводили в программной среде *QGA Professional (Hiden Analytical, Великобритания)*. Измерения проводились при температуре 280 °С. Профили зависимостей изменения концентраций гелия во времени в процессе диффузии *He-Ne* смеси с начальным давлением 800 мм рт. ст. и чистого гелия с начальным давлением 640 мм рт. ст. (80 % от 800 мм рт. ст.) совпадают. Данный факт свидетельствует о том, что процессы диффузии и растворения каждого компонента бинарной *He-Ne* смеси можно рассматривать как индивидуальные газы. Установлено, что при разделении бинарной *He-Ne* смеси в начальный момент селективность  $\alpha_{He/Ne}$  соответствует идеальной селективности, полученной для индивидуальных газов, при этом обогащение смеси по основному целевому компоненту гелию достигает 99 об. %.

Таким образом, полученные стеклокристаллические мембранные материалы на основе ценосфер энергетических зол обладают высоким уровнем проницаемости и селективности, а также высокими прочностными характеристиками. Наряду с этим их преимущества перед известными плоскими, рулонными и полволоконными мембранными модулями заключаются в том, что эффективность процесса газоразделения не зависит от повреждения отдельных глобул. Все это позволяет рассматривать стеклокристаллические материалы на основе ценосфер энергетических зол в качестве эффективных газоразделительных мембран.

*Работа выполнена в рамках государственного задания ИХХТ СО РАН (проект FWES 2021–0013).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Молчанов С.А. *Особенности выделения гелия из природного газа*. М.: Недра, 2011.
2. Recycling Solutions. *Редкие технические газы*. [Электронный ресурс]. URL: <https://re-solutions.com.ua/ru/our-direction/redkie-teh-gazi> (дата обращения 09.06. 2022).
3. Robeson L.M. *The upper bound revisited*. *Membrane Science*. 2008. Vol. 320. P. 390-400.
4. Cui Y. *Preparation and gas separation performance of zeolite T membrane*. *Materials. Chemistry*. 2004. Vol. 14. P. 924-932.
5. Cao F. *Helium Recovery by a Cu-BTC Metal-Organic-Framework Membrane*. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2012. Vol. 51. P. 11274-11278.
6. Takamizawa S. *Single-Crystal Membrane for Anisotropic and Efficient Gas Permeation*. *JACS*. 2010. Vol. 132. P. 2862-2863.

7. Николаев Н. И. *Диффузия в мембранах*. М.: Химия, 1980.
8. Leiby C.C. *Diffusion coefficients, solubilities, and permeabilities for He, Ne, H<sub>2</sub> and N<sub>2</sub> in Vycor glass*. Applied Physics. 1960. Vol. 31. P. 268-274.
9. Anshits N.N. *Chemical composition and structure of the shell of fly ash non-perforated cenospheres produced from the combustion of the Kuznetsk coal (Russia)*. Fuel. 2010. Vol. 89. P. 1849-1862.
10. Shelby J.E. *Introduction to glass science and technology*. Cambridge: The Royal Society of Chemistry, 2005.

## РЕШЕНИЕ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО КОНТАКТА СИСТЕМЫ ТЕЛ

*А. С. Родин<sup>1, b</sup>, М. П. Галанин<sup>1, a</sup>,*

*<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва;*

*<sup>a</sup>galan@keldysh.ru, <sup>b</sup>rals@bk.ru*

Рассмотрена задача моделирования участка тепловыделяющего элемента (ТВЭЛ), включающего в себя топливный столб, находящийся внутри цилиндрической оболочки. Топливный столб включает в себя  $N$  цилиндрических таблеток, поставленных друг на друга и имеющих центральное отверстие, фаски и лунки на торцах. Характерный размер таблетки равен 1 см, в реальной конструкции количество таблеток может достигать нескольких сотен, между таблетками и оболочкой в начальный момент времени обычно присутствует зазор. При моделировании ТВЭЛ важную роль играет учет контактного взаимодействия (теплого и механического) таблеток друг с другом и с оболочкой.

В проведенном исследовании задача решена в следующей постановке: таблетки считались термоупругими телами, оболочка – термоупруго-пластическим телом. Рассмотрены осесимметричный случай и трехмерный случай (для сектора  $90^\circ$ ). В тепловой задаче модель включает в себя квазилинейное уравнение теплопроводности с поставленными граничными условиями. В топливных таблетках задано объемное тепловыделение, которое являлось постоянным по пространству, а по времени линейным образом менялось от нуля до номинального значения. На внешней поверхности оболочки поставлено условие 1 рода (температура оболочки совпадает с температурой теплоносителя), на внешних поверхностях таблеток и на внутренней поверхности оболочки при отсутствии механического контакта задано условие неидеального теплового контакта, в котором коэффициент теплоотдачи зависит от величины зазора между телами. На участках поверхностей, которые находятся в механическом контакте, задано условие идеального теплового контакта.

В механической задаче модель включает в себя уравнения равновесия для каждого тела, граничные условия и определяющие соотношения. В качестве граничных условий выбраны следующие: нижние торцы первой таблетки и оболочки закреплены по вертикали, к внешней поверхности оболочки и к верхнему торцу верхней таблетки приложены постоянные давления. В системе для  $N$  таблеток учитываются  $(N-1)$  контактная пара таблетка/таблетка и  $N$  контактных пар таблетка/оболочка. На контактных поверхностях поставлены условия скольжения без трения. Конфигурация контактных поверхностей может существенно меняться в ходе расчетов. В частности, в результате нагрева в каждой паре таблетка/таблетка в контакте остаются только небольшие участки поверхностей, а топливный столб



существенно сдвигается относительно оболочки. Для описания термоупругопластического тела выбрана модель течения.

Все теплофизические характеристики материалов зависят от температуры, а также от ряда других параметров. Для их описания использованы модели из библиотеки MATPRO [1].

В численной модели применен метод конечных элементов для элементов 1 порядка на четырехугольных или шестигранных сетках. Для учета граничных условий теплового и механического контакта использован модифицированный метод Неймана-Дирихле, который является одним из вариантов метода декомпозиции области.

Проведена серия расчетов, в которых количество таблеток  $N$  в расчетной области менялось от 1 до 100. Результаты расчетов показали, что использованный численный метод позволяет достаточно аккуратно учесть граничные условия на контактных поверхностях для случая значительного изменения исходной конфигурации контактных поверхностей.

Более подробно использованный численный метод, а также результаты расчетов для осесимметричного случая описаны в [2].

*Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00260, <https://rscf.ru/project/22-21-00260/>.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Nagrman D.L. *MATPRO – A Library of Materials Properties for Use in the Analysis of Light Water Reactor Fuel Rod Behavior*. NUREG/CR-6150 TREE-1280. 1993. 445 p.

2. Галанин М.П., Родин А.С. *Исследование и применение метода декомпозиции области для моделирования тепловыделяющего элемента*. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 4. С. 659-676.

## АЛГОРИТМЫ КОРРЕКТИРОВКИ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИКИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

О. В. Садовская<sup>1, а</sup>, В. М. Садовский<sup>1,2, б</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск

<sup>а</sup> o\_sadov@icm.krasn.ru; <sup>б</sup> sadov@icm.krasn.ru

В методах расчета элементов конструкций и моделирования быстропротекающих процессов в твердых деформируемых средах после публикации статьи М. Л. Уилкинса [1] в 1964 г. появилось эффективное средство для учета необратимой пластической деформации, известное как «корректировка напряжений Уилкинса» и заключающееся в приведении напряжений, вычисленных на шаг по времени по упругой схеме, на круг текучести Мизеса. Такая процедура соответствует определяющим уравнениям теории упругопластического течения Прандтля – Рейсса. Основой для построения вычислительных алгоритмов типа корректировки Уилкинса в задачах математической теории пластичности служит специальная формулировка моделей в виде вариационных неравенств, которую они допускают наряду с формулировкой в виде систем нелинейных уравнений с разрывными коэффициентами, меняющими свой вид при переходе через границы раздела зон упругой и пластической деформации.

В предлагаемом докладе на основе формулировки в виде вариационных неравенств для гиперболических дифференциальных операторов [2, 3] разработаны корректирующие алгоритмы для численного решения динамических задач теории течения Прандтля – Рейсса с произвольным условием пластичности. Аналогичные алгоритмы построены для моделирования динамики пористой среды с открытыми порами [4].

В наиболее общем виде вариационное неравенство для сыпучих и пористых сред выглядит так [3]:

$$(\tilde{U} - U)' \left( A \frac{\partial V}{\partial t} - \sum_{i=1}^n B^i \frac{\partial U}{\partial x_i} - g \right) \geq 0.$$

Здесь  $U = \pi_K(V) \in F$  – искомое решение, включающее проекции вектора скорости  $v_i$  и компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ,  $\pi_K$  – проектор по норме  $|V|_A$  на конус  $K$  с вершиной в нуле пространства тензоров напряжений,  $F$  – область допустимых вариаций решения,  $\tilde{U} \in F$  – произвольный элемент этого множества,  $A$  и  $B^i$  – симметричные матрицы,  $g$  – вектор массовых сил, штрих означает транспонирование.

Аппроксимация неравенства приводит к двум этапам метода расщепления по физическим процессам. На первом этапе решается система

нелинейных уравнений упругой среды (в ячейках пространственной сетки вычисляется вектор  $V$ ), на втором – вариационное неравенство относительно решения  $\hat{U}$  на новом временном слое:  $(\tilde{U} - \hat{U})' A (\hat{V} - \bar{V}) \geq 0$ , где  $\hat{U} = \pi_K(\hat{V}) \in F, \forall \tilde{U} \in F$ . Можно показать, что если конус  $K$  и множество  $F$  выпуклы и замкнуты, а матрица  $A$  положительно определена, то решение этого вариационного неравенства существует и единственно при любом заданном векторе  $\bar{V}$ .

Для изотропной среды с условием пластичности, которому в пространстве главных напряжений соответствует простая область  $F$  допустимых вариаций типа цилиндра, кругового или с плоскими гранями, формулы корректировки решения могут быть получены в явном виде. При численном моделировании анизотропных сред или сред с более сложными условиями нужно применять итерационные алгоритмы.

При вычислении проекции на призму текучести Треска – Сен-Венана необходимо перейти к системе координат главных направлений тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ , перенумеровав главные напряжения в порядке убывания:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . После перенумерации достаточно рассмотреть одну грань призмы:  $\sigma_1 - \sigma_3 = 2 \tau_s$ . Если точка  $M$  на девиаторной плоскости с координатами  $s_i = \sigma_i - \sigma_0$  принадлежит призме текучести, то  $\sigma_1 - \sigma_3 \leq 2 \tau_s$  и  $\sigma_i^\pi = \sigma_i$ . Здесь  $\tau_s$  – предел текучести,  $\sigma_0 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$  – гидростатическое напряжение. Если проекция точки  $M$  совпадает с одной из вершин призмы, то ее компоненты вычисляются так:  $\sigma_1^\pi = \sigma_0 + 4 \tau_s/3, \sigma_2^\pi = \sigma_3^\pi = \sigma_0 - 2 \tau_s/3$  или  $\sigma_3^\pi = \sigma_0 - 4 \tau_s/3, \sigma_1^\pi = \sigma_2^\pi = \sigma_0 + 2 \tau_s/3$ . Если же проекция точки  $M$  попадает на ребро призмы, то  $\sigma_1^\pi = 0.5(\sigma_1 + \sigma_3) + \tau_s, \sigma_2^\pi = \sigma_2, \sigma_3^\pi = 0.5(\sigma_1 + \sigma_3) - \tau_s$ . Условию текучести Ишлинского – Ивлева:  $\max_{i=1,2,3} |\sigma_i - \sigma_0| = \tau_s$  в пространстве главных напряжений соответствует шестигранная призма, которая получается поворотом призмы Треска – Сен-Венана вокруг главного октаэдрического направления на угол  $30^\circ$ . Проекция точки на призму Ишлинского – Ивлева вычисляется по точным формулам, которые получаются по аналогии с предыдущим случаем. Затем производится переход к исходному базису согласно тензорному правилу преобразования:  $\sigma_{ij}^\pi = a_{ik} \sigma_k^\pi a_{jk}$ , где  $a_{ij}$  – коэффициенты матрицы перехода от исходного базиса к базису главных направлений.

В общем случае для вычисления проекции тензора напряжений на множество  $F$ , которое задается с помощью произвольной системы выпуклых функций:  $f_k(\sigma_{ij}) \leq 0$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ), используется алгоритм Удзавы поиска седловой точки модифицированной функции Лагранжа следующего вида:

$$L(\sigma, \lambda) = (\sigma_i - \bar{\sigma}_i) a_{ij} (\sigma_j - \bar{\sigma}_j) + \frac{1}{r} \sum_{k=1}^p ([\lambda_k + r f_k(\sigma)]_+^2 - \lambda_k^2).$$

Здесь  $\lambda_k \geq 0$  – множители Лагранжа,  $r$  – параметр метода, который подбирается экспериментально с целью ускорения сходимости итераций, квадратные скобки с нижним индексом “+” обозначают положительную часть выражения:  $[z]_+ = \max \{z, 0\}$ .

С помощью разработанного численного алгоритма проведены расчеты проекций точек в пространстве напряжений на шестигранные призмы текучести Треска – Сен-Венана и Ишлинского – Ивлева (см. рис. 1), а также на эллиптические цилиндры

$$a_1 s_1^2 + a_2 s_2^2 + a_3 s_3^2 - 2 \tau_s^2 \leq 0 \text{ и } b_1 s_1^2 + b_2 s_2^2 + b_3 s_3^2 - 2 \tau_s^2 \leq 0$$

и на пересечение этих цилиндров (рис. 2). Точки на рисунках обозначены красным цветом, а их проекции на множества  $F$  – зеленым цветом.

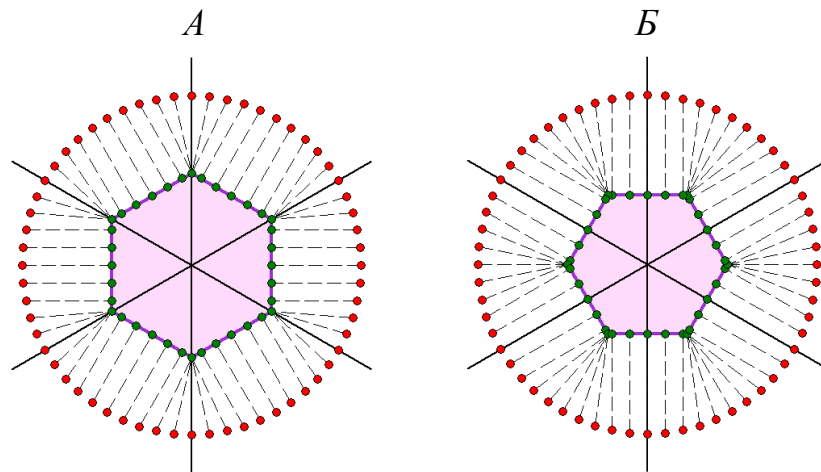


Рис. 1. А – Проектор на призму Треска – Сен-Венана;  
Б – проектор на призму Ишлинского – Ивлева (на девиаторной плоскости)

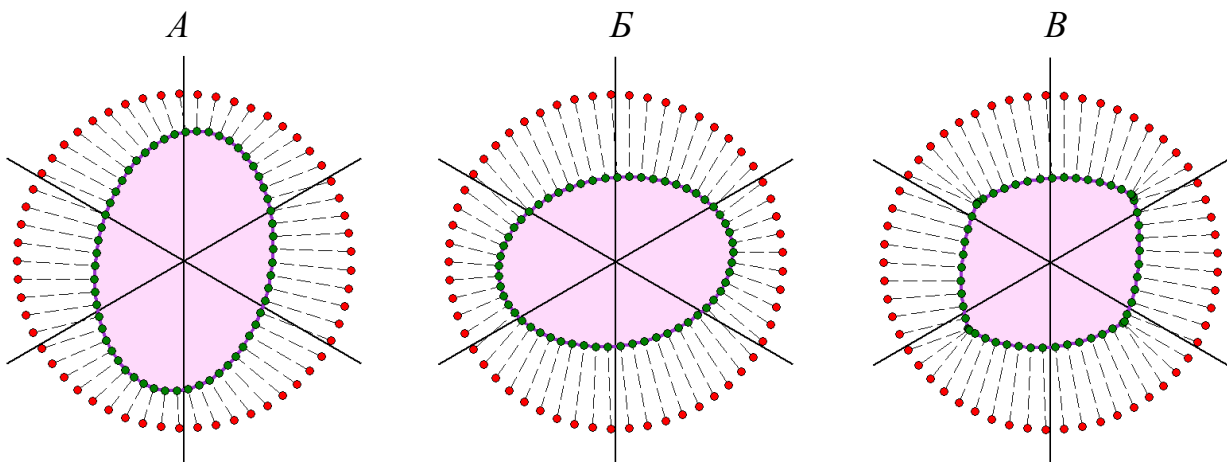


Рис. 2. Алгоритм Узавы: А, Б – проекторы на эллиптические цилиндры  
(при разных коэффициентах  $a_k$  и  $b_k$ , характеризующих анизотропию среды);  
В – проектор на пересечение этих эллиптических цилиндров

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2023-912).*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wilkins M. L. *Calculation of elastic-plastic flow*. In: *Methods in Computational Physics* (Ed. B. Alder), vol. 3. New-York: Academic Press, 1964. P. 211-263.
2. Садовский В. М. *Разрывные решения в задачах динамики упруго-пластических сред*. М.: Наука, 1997.
3. Садовская О. В., Садовский В. М. *Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред*. М.: Физматлит, 2008.
4. Садовский В. М., Садовская О. В. *Анализ деформации пористой среды с учетом схлопывания пор*. ПМТФ. 2016. Т. 57. № 5. С. 53-65.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЙ В ТОНКИХ ПРОСЛОЙКАХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ БЛОЧНОЙ СРЕДЫ

В. М. Садовский<sup>1,2, a</sup>, О. В. Садовская<sup>1, b</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет, Красноярск

<sup>a</sup>sadov@icm.krasn.ru; <sup>b</sup>o\_sadov@icm.krasn.ru

Математические модели блочных сред используются для анализа волновых процессов в геомеханике и геодинамике. Они развиваются, начиная с фундаментальной работы [1], в которой на основе анализа экспериментального материала была установлена естественная кусковатость горных пород. Нами в плоской постановке разработан вариант модели для описания динамики блочной среды из упругопластических блоков прямоугольной формы, взаимодействующих между собой через тонкие податливые прослойки [2]. При моделировании межблочных прослоек используется обобщенный реологический метод, который позволяет строить определяющие соотношения различного уровня сложности, учитывающие упругие, вязкие и пластические свойства в сочетании с разным сопротивлением материала прослоек растяжению и сжатию. Процесс зарождения и продвижения трещин в прослойках описывается с применением интегрального критерия трещинообразования Морозова–Петрова [3], с учетом возможного контакта берегов трещин под действием сжимающих напряжений. Интегральный критерий рассматривается в форме:

$$\frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \frac{1}{d} \int_0^d \sigma(x, \vartheta) d\vartheta \geq \sigma_c, \quad \sigma = \sqrt{\frac{4}{9} \sigma_n^2 + \sigma_t^2}.$$

Здесь  $\sigma_c$  – предельное напряжение,  $\tau$  – характерное время накопления повреждений,  $d$  – размер блока,  $\sigma_n$  и  $\sigma_t$  – нормальное и касательное напряжения.

Определяющие уравнения для пластических и пористых прослоек формулируются в терминах вариационных неравенств с ограничениями на напряжения [4]. Условия контактного взаимодействия берегов трещин в прослойках также формулируются в виде вариационных неравенств с ограничениями на перемещения [5]. При численном счете решение неравенств приводит к специальным процедурам корректировки скоростей и напряжений.

На основе метода расщепления по пространственным переменным и по физическим процессам разработан параллельный вычислительный алгоритм, который реализован в виде программного комплекса для многопроцессорных ЭВМ кластерной архитектуры. Применяется принцип распараллеливания по подобластям, для межпроцессорного обмена используется библиотека MPI.

Выполнены методические расчеты, демонстрирующие влияние пластической деформации и разрушения в прослойках на процесс деформирования блочной среды.

В качестве примера на рис. 1 показан процесс распространения системы трещин в блочном массиве горных пород при локализованном импульсном нагружении в центральной части верхней границы.

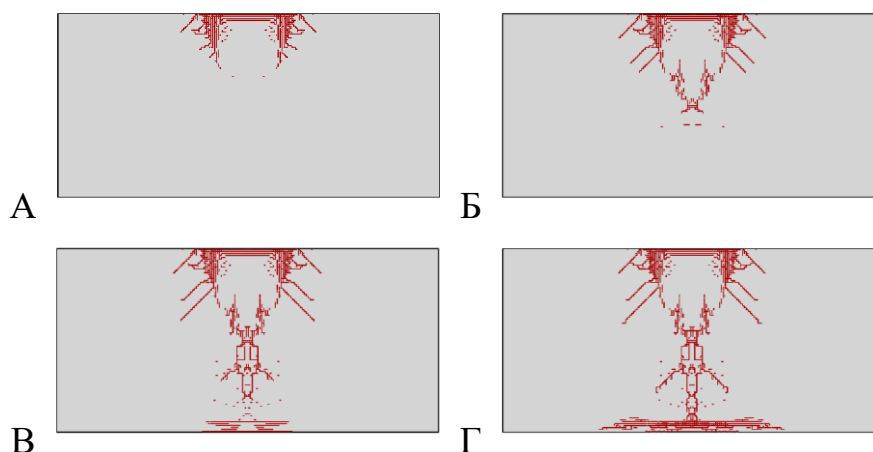


Рис. 1. Зоны трещиноватости в прослойках в последовательные моменты времени

Расчеты проводились для блочного массива, состоящего из 100 слоев по 200 упругопластических блоков в каждом слое (размер каждого  $10 \times 10$  см) и податливых прослоек толщиной 1 мм.

*Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение № 075-02-2023-912).*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Садовский М. А. *Естественная кусковатость горной породы*. ДАН СССР. 1979. Т. 247. № 4. С. 829-831.
2. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V., Lukyanov A. A. *Modeling of wave processes in blocky media with porous and fluid-saturated interlayers*. J. Comput. Phys. 2017. V. 345. P. 834-855.
3. Morozov N., Petrov Yu. *Dynamics of Fracture. Ser.: Foundations of Engineering Mechanics*. Berlin – Heidelberg: Springer, 2000.
4. Sadovskii V. M., Sadovskaya O. V. *Supercomputer modeling of wave propagation in blocky media accounting fractures of interlayers*. In: *Nonlinear Wave Dynamics of Materials and Structures* (Eds. H. Altenbach, V. A. Eremeyev, I. S. Pavlov and A. V. Porubov). Ser.: *Advanced Structured Materials*, vol. 122. Cham: Springer, 2020. P. 379-398.
5. Sadovskaya O., Sadovskii V. *Mathematical Modeling in Mechanics of Granular Materials. Ser.: Advanced Structured Materials*, vol. 21. Heidelberg – New-York – Dordrecht – London: Springer, 2012.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗРУШЕНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА, НАСЫЩЕННОГО ВОДОРОДОМ

Ю. С. Седова<sup>1,2, a</sup>, Н. М. Бессонов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург;

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого;

<sup>a</sup>sedova.yus@mail.ru

Одним из последних открытий в области исследования водородной хрупкости является двойственный характер разрушения, который наблюдается в насыщенных водородом металлических образцах [1, 2]. Площадки хрупкого (водородного) и упругопластического разрушения на изломах образцов чередуются. Для объяснения этого эффекта чаще всего используется гибридная модель индуцированного водородом разрушения, которая одновременно содержит механизм охрупчивания водородом (HEDE) [3] и механизм водородного размягчения (HELP). Несмотря на кажущуюся обоснованность такого подхода, существует фундаментальное противоречие, которое невозможно преодолеть.

Нами проведено численное исследование влияния открытого экспериментально скин-эффекта наводороживания металлов [4] на рост трещины при механическом нагружении образца с учетом его как упругого, так и упругопластического поведения. Рассмотрено два случая: растяжения корсетного цилиндрического образца с эллиптическим вырезом и трехточечного изгиба образца прямоугольного поперечного сечения с надрезом. В качестве механизма водородной хрупкости использована модифицированная модель декогезионного разрушения Ориани (HEDE).

Математическая модель включает в себя уравнение диффузии водорода, для описания которого используется модифицированное уравнение Фика, содержащее добавочные нелинейные слагаемые, учитывающие термодинамический потенциал (влияние механических напряжений). Упругопластическое поведение материала в модели описывается на основе нестационарного уравнения сохранения количества движения, закона Гука для описания упругой деформации и закона пластического течения на основе условия Мизеса. Распространение трещины моделировалось с использованием декогезионного критерия хрупкого разрушения по величине когезионных напряжений и силового критерия по величине параметра трещиностойкости (критического коэффициента интенсивности напряжений).

Поставленная задача решалась численно на основе метода конечных объемов. Для проведения расчета упругопластического поведения материала применен модифицированный метод Уилкинса, обобщенный для случая квазистатического нагружения образца. Уравнение диффузии водорода решалось с использованием метода расщепления.



Для реализации численного метода был разработан оригинальный программный код.

Использованы экспериментальные данные о реальной неравномерной концентрации водорода в образце и имеющиеся данные о величине коэффициентов диффузии водорода, энергии активации диффузии, характеристиках стали и других параметрах модели HEDE. Получены характеристики напряженно-деформированного состояния тела и параметры распространения в нем трещины.

Из проведенного численного моделирования были получены следующие результаты. При нагружении металлического образца, насыщенного водородом, на его поверхности происходит мгновенное инициирование микротрещины, связанное с высоким содержанием растворенного вещества в скин-слое. Разрушение индуцировано и протекает по хрупкому механизму.

Развитие трещины сопровождается увеличением инкубационного периода ее распространения на одно межузловое расстояние конечно-объемной модели, но затем сменяется уменьшением этого интервала. Этот переход связан с тем, что на начальном этапе процесс определяется временем диффузии водорода, которому необходимо накопиться вблизи текущей вершины трещины, чтобы вызвать нарушение когезионного или силового критерия. По мере продвижения разрушения длина трещины достигает критической величины, при которой в материале уже действует высокий уровень упругих напряжений и возникает достаточно высокий КИН, вследствие чего дальнейшее ее распространение становится возможным без участия водорода (при его фоновом содержании).

Кроме того, следует обратить внимание на то, что диффузия водорода происходит медленнее, чем процесс роста трещины, поэтому его распространение вглубь материала сильно ограничено (рис. 1). Вещество не проникает дальше 1 мм от поверхности образца.

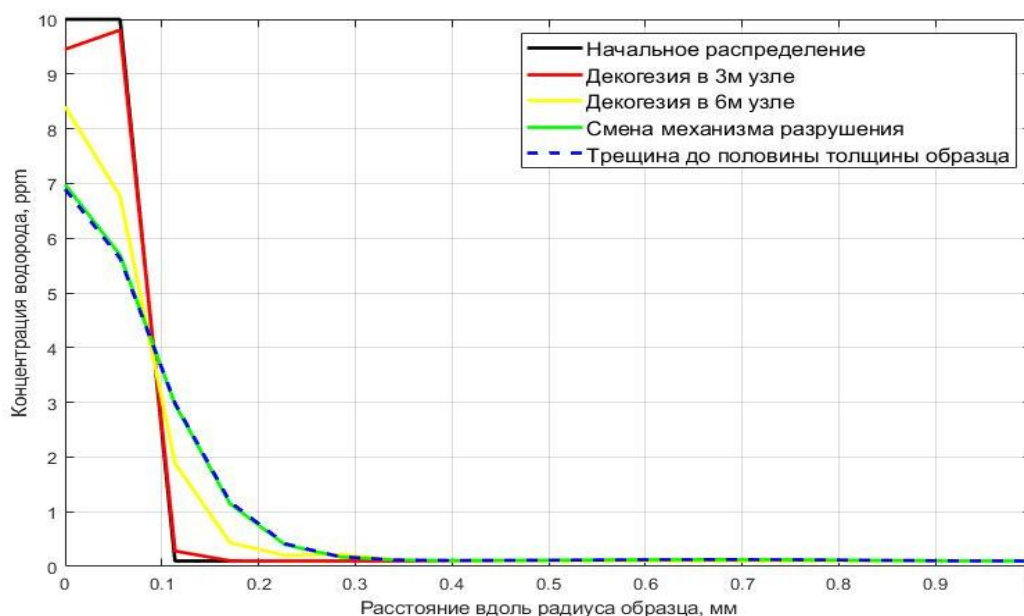


Рис. 1. Распределение водорода по толщине образца по мере развития в нем трещины

Главным результатом исследования является установление того факта, что при достижении определенной длины трещины в ее вершине происходит образование локальной зоны пластических деформаций. По мере роста трещины она получает развитие и приводит к переходу к пластическому разрушению материала.

Таким образом, было установлено, что в случае учета в модели описания водородной хрупкости экспериментально установленного скин-эффекта насыщения образец демонстрирует смену механизма разрушения с хрупкого на пластический. Это позволяет объяснить двойственный характер разрушения на поверхности излома металлических изделий, возникающий при их испытании после искусственного насыщения водородом, без привлечения сложных, гибридных моделей водородного растрескивания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Peral L.B., Zafra A., Fernández-Pariente I., Rodríguez C., Belzunce J. *Effect of internal hydrogen on the tensile properties of different CrMo(V) steel grades: Influence of vanadium addition on hydrogen trapping and diffusion* // International Journal of Hydrogen Energy. 2020. Vol. 45. No. 41. P. 22054-22079.
2. Brilz M., Hoche H., Oechsner M. *Hydrogen-assisted cracking (HAC) of high-strength steels as a function of the hydrogen pre-charging time* // Engineering Fracture Mechanics. 2022. Vol. 261. P. 108-246.
3. Oriani R.A. *A mechanistic theory of hydrogen embrittlement of steels* // Berichte der Bunsengesellschaft für physikalische Chem. 1972. Vol. 76. No. 8. P. 848-857.
4. Polyanskiy V.A. et al. *Phenomenon of skin effect in metals due to hydrogen absorption* // Continuum Mechanics and Thermodynamics. 2019. Vol. 31. No. 6. P. 1961-1975.

## УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С КИНЕМАТИЧЕСКИМ УПРОЧНЕНИЕМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭВОЛЮЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ТЕХНОЛОГИИ ПРЯМОГО ЛАЗЕРНОГО НАРАЩИВАНИЯ СЛОЯ

Т. А. Трофименко<sup>1, a</sup>, К. А. Чехонин<sup>1, b</sup>

<sup>1</sup>Вычислительный центр ДВО РАН ХФИЦ, Хабаровск;

<sup>a</sup>*timofey.trofimenko@gmail.com*; <sup>b</sup>*lex7861@rambler.ru*

**Аннотация.** Проведено параметрическое исследование эволюции технологических напряжений, возникающих при изготовлении изделий путем лазерной наплавки слоя с использованием коаксиальных сопел для подачи порошков высокопрочных алюминиевых сплавов в ванну расплава. Показано влияние удельной энергии лазерного источника на эволюцию технологических и остаточных напряжений в формируемом изделии. Исследован механизм ликвационного и кристаллизационного образования микротрещин и пор с образованием магистральной трещины.

Аддитивные технологии позволяют изготавливать изделия за счет послойного синтеза и получать изделия сложной формы. Задача численного моделирования физического процесса изготовления изделий с помощью аддитивных технологий является комплексной и должна учитывать различные термомеханические процессы, что неразрывно связано с широким использованием вычислительных технологий, реализующих математические модели процесса. Процесс изготовления изделия методом аддитивного производства сопровождается сложными термомеханическими явлениями, приводящими к формированию полей технологических остаточных напряжений, возможному короблению изделия, образованию трещин и пор. Причина появления внутренних напряжений в выращиваемом объекте связана с существенным пространственно-временным неоднородным распределением температурно-кристаллизационных полей (рис. 1). Механизм возникновения остаточных напряжений (рис. 2, 3) вызван несовместностью неупругих деформаций, в первую очередь деформаций температурной усадки при переохлаждении, структурной усадки вследствие протекания фазовых превращений (кристаллизации расплава), отличающейся деформационной историей различных точек материала из-за неоднородности температур, температурных градиентов, скоростей охлаждения и кристаллизации.

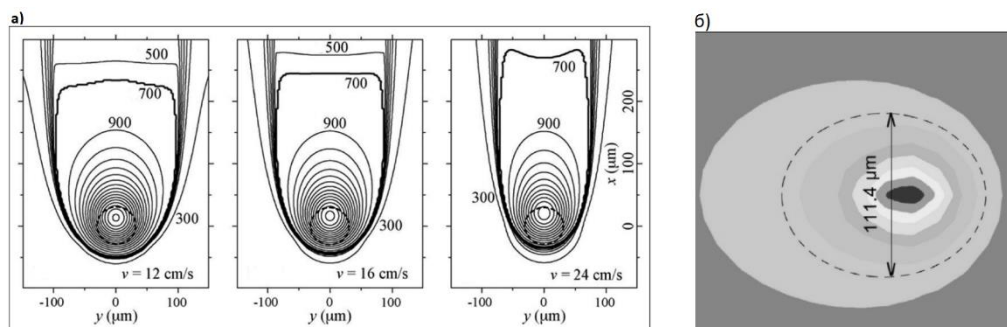


Рис. 1. а) распределение температуры –  $T(^{\circ}\text{C})$  в окрестности пятна лазерного луча при различных скоростях сканирования  $v$ ; б) размер ванны с расплавом металла

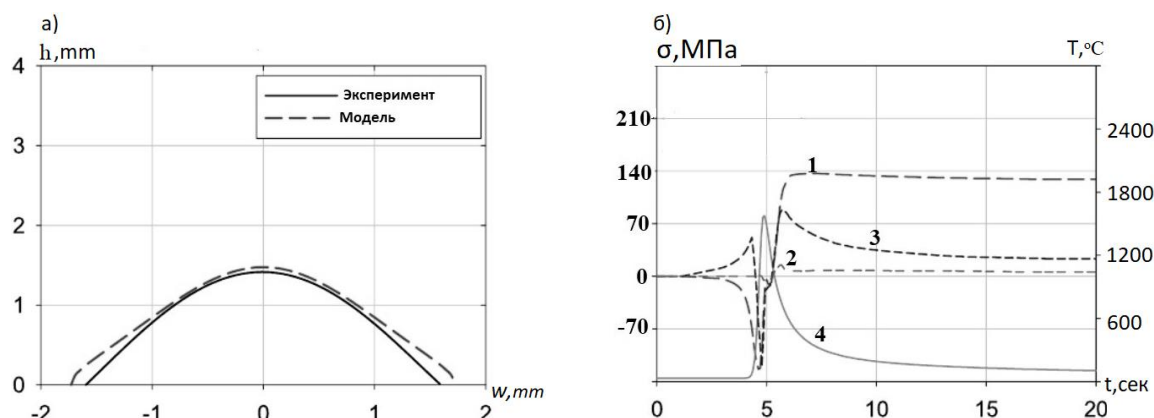


Рис. 2. а) сравнение профиля поверхности ( $h, w$  – высота и ширина профиля) наплавленного слоя с экспериментом; б) эволюция напряжений (продольных – 1, нормальных – 2, поперечных – 3) и температуры – 4 в нулевом сечении с поверхностью нанесения слоя ( $z=0$ )

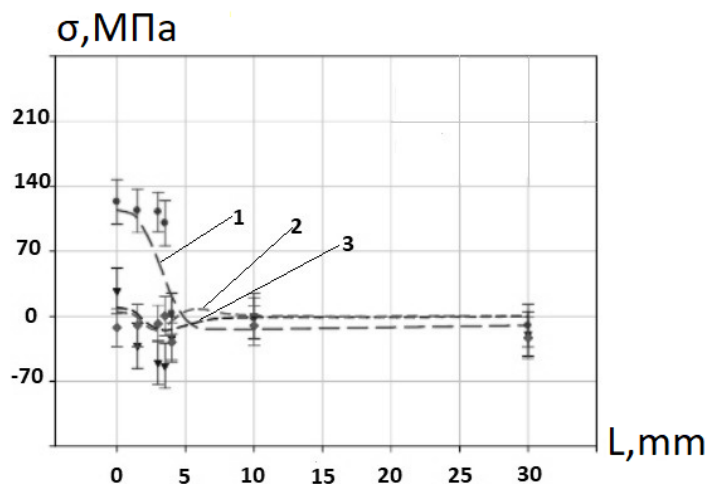


Рис. 3. Распределение остаточных напряжений (продольных – 1, нормальных – 2, поперечных – 3) в нулевом сечении слоя по длине подложки  $L$  (мм), (.) – эксперимент

В настоящей работе проведено параметрическое исследование эволюции технологических напряжений, возникающих при изготовлении изделий путем лазерной наплавки слоя с использованием коаксиальных сопел для подачи порошков высокопрочных алюминиевых сплавов в ванну расплава металла. Задача разделена на краевую задачу нестационарной теплопроводности, кристалли-

зации и краевую задачу термомеханики (НДС) в рамках теории консолидации упругопластической среды с упрочнением, которые являются несвязанными.

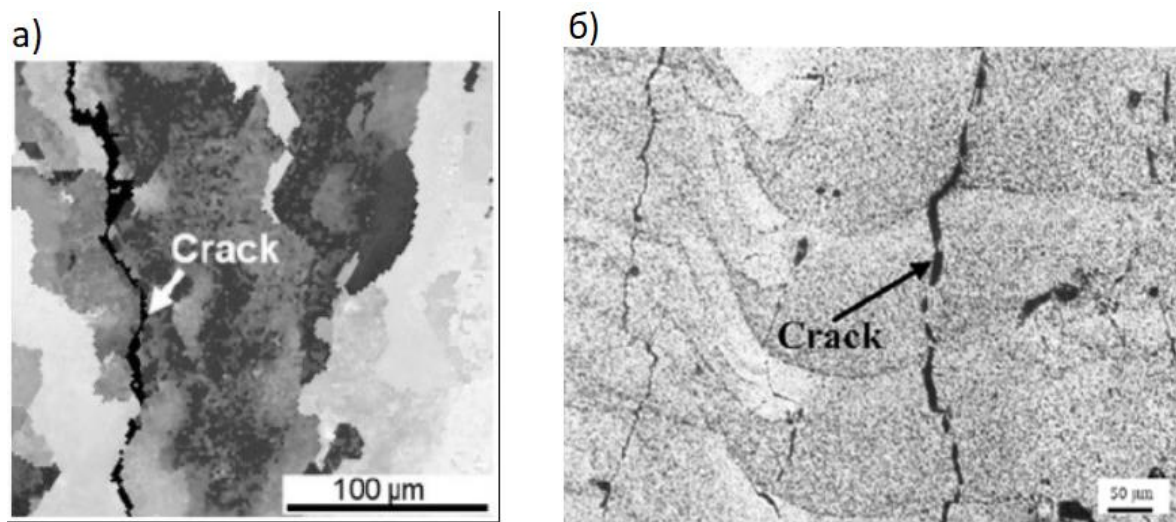


Рис. 4. а) распределение микроструктуры со средним размером зерен 89 микрон;  
б) образование трещин в наплавленном слое (фото шлиф)

Показано влияние удельной объемной энергии луча лазера на эволюцию технологических (рис. 2 б), остаточных напряжений (рис. 3), микроструктуру и образование трещин в формируемом слое изделия (рис. 4). Исследован механизм ликвационного и кристаллизационного образования микротрещин и пор с образованием магистральной трещины.

Численный распараллеленный алгоритм решения задачи основан на методе смешанных конечных элементов с сеточным согласованием аппроксимации основных переменных задачи по LBV условию [1, 2]. В подобластях расчетной области с максимальными градиентами температуры и в окрестности свободной поверхности расплава шаг сетки адаптировался с наибольшим уменьшением шага в 15 раз. Валидация и верификация математической модели и численного алгоритма производилась путем сравнения с известными асимптотическими решениями, сравнения с известными численными и экспериментальными исследованиями (рис. 2 а) на последовательности сгущающихся сеток.

*Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках Государственного задания Вычислительного центра ХФИЦ.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Chekhonin K.A., Vlasenko V.D. *Numerical Modelling of Compression Cure High-Filled Polymer Material*. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. 2021. V. 14. No 6. P. 805-814.

2. Чехонин К.А. *Термодинамически согласованная связанная модель отверждения эластомеров при больших деформациях*. Дальневосточный математический журнал. 2022. Т. 22. № 1. С. 107-124.

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОРПУСОВ ДЕТЕКТОРОВ НЕЙТРОННОГО ПОТОКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*М. Ю. Федоров<sup>3,c</sup>, Я. В. Глазюк<sup>1, a</sup>, В. Ю. Попов<sup>2, b</sup>,*  
<sup>1</sup> *Обнинский филиал НИЯУ «МИФИ», Обнинск; [ajacov@list.ru](mailto:ajacov@list.ru)*  
<sup>2</sup> *ООО «Фидесис», Москва; [quazzar.89@mail.ru](mailto:quazzar.89@mail.ru)*  
<sup>3</sup> *АО «ВО «Безопасность», Москва; [fedorov@vosafety.ru](mailto:fedorov@vosafety.ru)*

Одним из элементов систем управления и защиты энергетических ядерных реакторов являются конструкции, обеспечивающие размещение детекторов нейтронного потока (ионизационных камер) в специальных каналах ядерных реакторов [1].

Такие конструкции (подвески ионизационных камер (ПИК)) представляют собой корпус в виде длинной трубы, внутри которой размещаются ионизационная камера (ИК), кабельная линия, локальная биологическая защита [2]. Герметичный корпус ПИК может иметь жесткий узел крепления к крышке ядерного реактора в виде фланца или резьбового соединения. Подвеска ИК располагается в цилиндрическом измерительном канале реактора с весьма малым зазором (в данной работе принят зазор 1,5 мм на сторону).

При сейсмическом воздействии на реакторную установку ПИК будет совершать вертикальные колебания и колебания в поперечном направлении, ограниченные зазором в измерительном канале реактора.

За счет ограничения горизонтальных колебаний стенкой измерительного канала подвеска относится к классу систем с нелинейными характеристиками жесткости, применительно к таким системам отсутствует понятие резонанса в обычном понимании как для линейных систем, что осложняет задачу исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) корпуса ПИК и требует задания дополнительных условий.

Цель настоящей работы – анализ компонентов НДС корпуса ПИК, при использовании вычислительных возможностей отечественного САЕ «Фидесис» [3], предназначенного для решения задач динамики и прочности конструкций.

На рис. 1 приведена схема ПИК. Спектр ответа принят в соответствии с ГОСТ 17516.1–90Е, ГОСТ 29075–91 для землетрясения интенсивностью 8 баллов по шкале MSK-64 (табл. 1).

Ось  $z$  направлена вдоль продольной оси ПИК, оси  $x$  и  $y$  направлены перпендикулярно продольной оси изделия.

Конечно-элементная модель корпуса ПИК состоит из 37488 оболочечных элементов 1 порядка (37824 узла) (рис. 2). Канал принят как абсолютно жесткий. Модель нагружена внутренним давлением 1,0 МПа и собственным весом вдоль продольной оси.

С учетом ограничения поперечных перемещений в измерительном канале расчет проводится линейно-спектральным методом (ЛСМ) с применением следующего алгоритма.

К модели прикладывается нагрузка, задаваемая спектром ответа без учета ограничений по перемещению (результат – рис. 3).

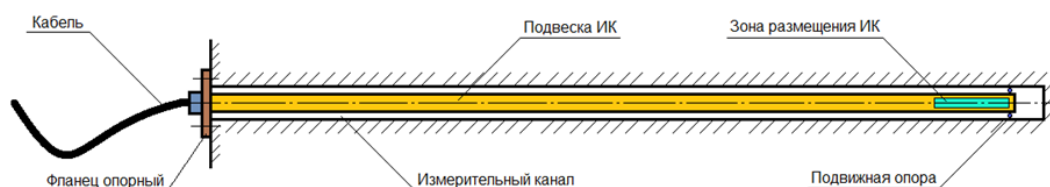
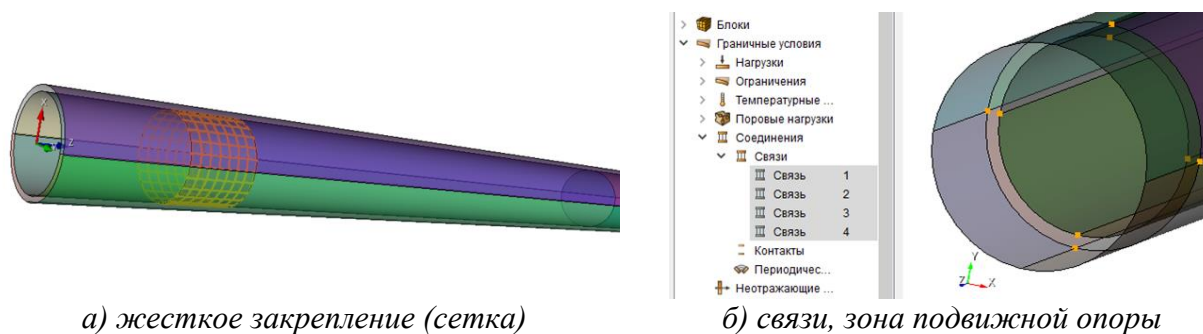


Рис. 1. Конструктивная схема подвески ИК

Таблица 1. Спектр ответа землетрясения интенсивностью 8 баллов на отметке 50 м в соответствии с ГОСТ 17516.1–90Е, ГОСТ 17516.1–90Е

Частота, ф, гц	Ускорение, ах, м/с <sup>2</sup>	Ускорение, ау, м/с <sup>2</sup>	Ускорение, аз, м/с <sup>2</sup>
0	0	0	0
4	58.75	58.75	41.13
8.5	51.25	51.25	35.88
10	46.25	46.25	32.38
11	33.75	33.75	23.63
17.5	32.50	32.50	22.75
30	21.25	21.25	14.88
1000	21.25	21.25	14.88



а) жесткое закрепление (сетка)

б) связи, зона подвижной опоры

Рис. 2. Модель корпуса ПИК

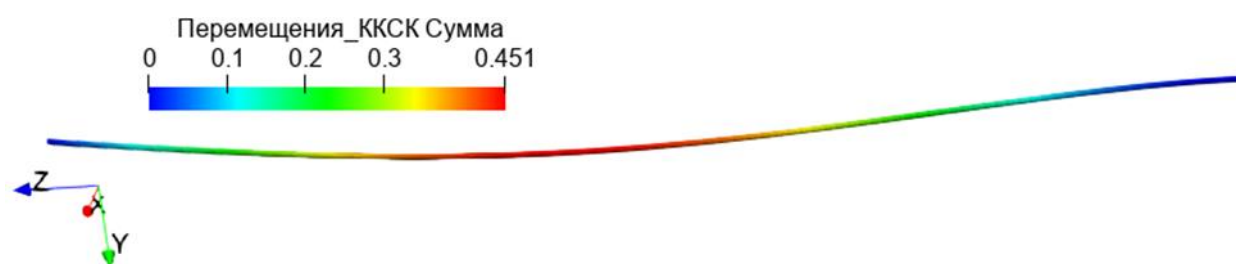


Рис. 3. Деформированное состояние модели. Прогиб в метрах



Точка максимального прогиба перемещается до условного касания противоположной поверхности канала, где задается шарнирная опора. Новая схема вновь нагружается нагрузкой спектра ответа при реализации ЛСМ, с новыми точками максимального прогиба выполняется такая же процедура и так вплоть до состояния, когда прогиб модели в очередной точке максимального прогиба не станет менее 2-х зазоров, т.е. 3,0 мм. На рис. 4 показаны два промежуточных и конечное деформированное состояние модели в процессе расчета.

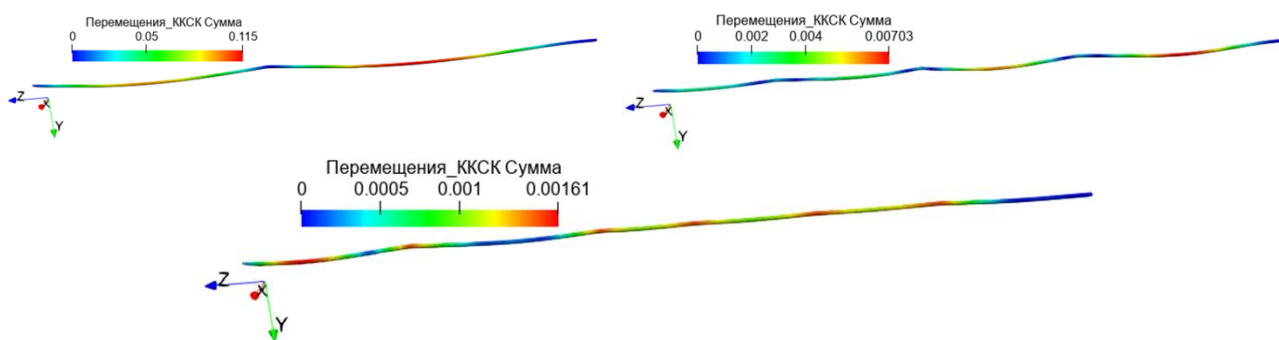


Рис. 4. Деформированные состояния модели

На рис. 5 показаны максимальные напряжения в корпусе ИК.

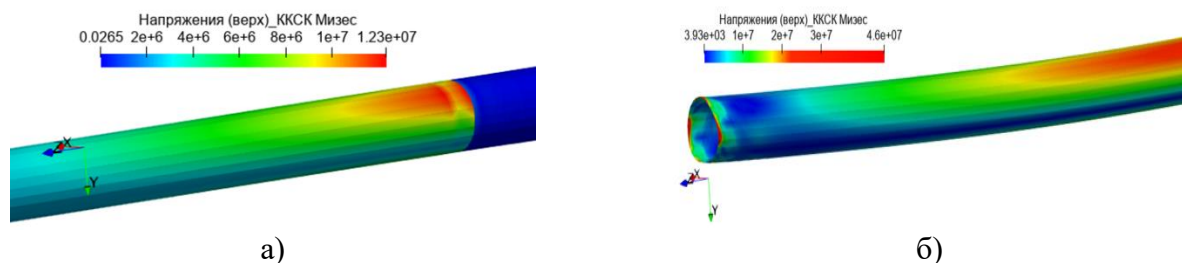


Рис. 5. Максимальные напряжения в корпусе ИК:

а) – верхний край, заделка,  $\sigma = 12,3$  МПа; б) – нижний край (опора),  $\sigma = 46,0$  МПа

Таким образом, комбинацией ЛСМ с последовательным заданием дополнительных условий в процессе расчета получено НДС корпуса ПИК при действии сейсмической нагрузки. Максимальные напряжения в конструкции не превышают предела упругости для материала изделия коррозионно-стойких сталей аустенитного класса.

В перспективе исследований НДС рассмотренных конструкций под циклически меняющейся нагрузкой при ограничении перемещений весьма полезно провести прямой эксперимент с регистрацией частот колебаний и возникающих деформаций и напряжений.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Андрушечко С.А., Афров А.М., Васильев Б.Ю., Генералов В.Н., Косоуров К.Б., Семченков Ю.М., Украинцев В.Ф. *АЭС с реактором типа ВВЭР-1000. От физических основ эксплуатации до эволюции проекта*. М.: Логос, 2010.
2. Боланд Дж. *Приборы контроля ядерных реакторов (внутризонные)*. Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1973.
3. Морозов Е.М., Левин В.А., Вершинин А.В. *Прочностной анализ: Фидесис в руках инженера / Предисл. А.И. Боровкова*. М.: ЛЕНАРД, 2015.
4. ГОСТ 17516.1–90Е Изделия электротехнические. Общие требования в части стойкости к механическим внешним воздействующим факторам. М., Стандартиформ, 2007.
5. ГОСТ 29075–91 Системы ядерного приборостроения для атомных станций. Общие требования. М., ИПК Издательство стандартов, 2004.

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ОТКОСОВ ГОРНОЙ ВЫРАБОТКИ

*И. Е. Шиповский<sup>1, а</sup>, В. А. Трофимов<sup>1</sup>*

*<sup>1</sup>Институт проблем комплексного освоения недр  
им. акад. Н. В. Мельникова РАН, Москва;*

*<sup>а</sup>iv\_ev@mail.ru*

Надёжность построек и инженерных сооружений зависит от устойчивости оснований, на которых они возводятся, в особенности, когда в качестве оснований используются откосы и склоны, которые подвержены потере устойчивости. При этом серьёзную опасность представляют оползни и обвалы для всех видов зданий, промышленных объектов и коммуникаций. В связи с этим изучение способов расчета устойчивости откосов и склонов является весьма актуальной задачей.

Направлением данной работы является применение численного метода сглаженных частиц к моделированию напряжённо-деформированного состояния массива, а также определение факторов, оказывающих влияние на устойчивость откосов техногенного характера. Цель исследования – прогнозирование устойчивости откосов под действием гравитации. Развитие различных природных и техногенных процессов приводит к потере устойчивости, что является главной причиной возникновения опасных гравитационных процессов. Оползень – это процесс соскальзывания блока горных пород вниз по склону или откосу по поверхности скольжения под действием гравитационных сил. Характер поверхности скольжения зависит от геологического строения склона или откоса. Поверхность скольжения может быть как цилиндрической, так и состоящей из нескольких пересекающихся плоскостей и поверхностей.

Более опасными являются высокие и крутые склоны, при этом предельно устойчивая высота  $h$  зависит от угла наклона  $\alpha$  склоновой поверхности. Порода в массиве испытывает воздействие как нормальных, так и касательных напряжений. Когда касательные напряжения по какой-либо поверхности в породе достигают ее предельного сопротивления, происходит сдвиг одной части массива по другой.

Описание горных пород проводится по идеологии модели Друкера – Прагера. Переход к пластическому деформированию геосреды проявляется при выполнении условия текучести Мизеса, которое зависит от среднего давления.

Условие текучести в общем виде

$$\phi = \sigma_{eq} - \sigma_T, \quad (1)$$

где  $\sigma_{eq}$  – скаляр, эквивалентное напряжение, вычисленное по компонентам тензора напряжений;  $\sigma_T$  – предел текучести при одноосном растяжении. При  $\phi < 0$  материал остается упругим, при  $\phi = 0$  возникают пластические деформации.

Эквивалентные напряжения определяются по критерию Мизеса:

$$\sigma_{\text{eq}} = \frac{1}{2} \sqrt{((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}. \quad (2)$$

Текущность появляется, когда выполняется условие  $\sigma_{\text{eq}} = \sigma_T$ . Напряжения пропорциональны упругой энергии сдвига. Поэтому соотношение  $\phi = 0$  означает, что пластическое течение начинается тогда, когда энергия упругого сдвига достигает предельной величины.

Если установлено, что условие текущести выполняется, тогда направление и величина пластических деформаций будут определяться законом течения. Закон течения выражается в форме:

$$\{d\varepsilon^p\} = \lambda \{\partial Q / \partial \sigma\}, \quad (3)$$

где  $\{d\varepsilon^p\}$  – приращение пластической деформации;  $Q$  – пластический потенциал, скалярная функция напряжений, указывающая направление деформирования;  $\lambda$  – согласующий множитель Лагранжа, который определяет величину деформации и определяется из условия пластичности. Данный закон течения является ассоциированным для всех условий текущести. Поведение поверхности текущести определяется законом упрочнения при пластических деформациях материала.

Структура и конфигурация расчетной области формируются исходя из физической постановки задачи и возможного влияния внешних факторов на исследуемый процесс.

Начальная геометрия задачи представлена на рис. 1.

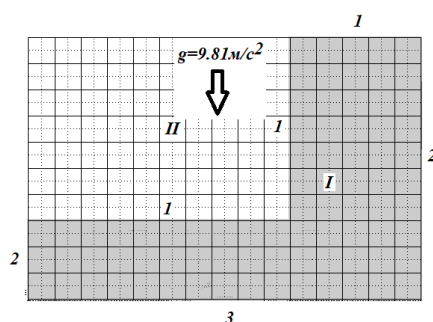


Рис. 1. Начальная геометрия задачи: 1 – свободная поверхность; 2 – условие «бесконечности»; 3 – «жесткая стенка»

Расчетная область, показанная на рис. 1, представляет в гравитационном поле массив горной породы (I) с уступом высотой  $h$  и с углом наклона  $\alpha$ , полученным в результате относительно быстрой выемки крупного блока породы (II).

Моделирование напряженно-деформируемого состояния геосреды осуществляется путем численного решения системы уравнений механики сплошной среды, которая включает уравнения неразрывности, движения и энергии. Замыкают систему уравнений определяющие соотношения, которые конкретизируют поведение среды, задавая связи между тензорами напряжений и деформаций. Учет изменения прочности нагруженной среды с течением времени осуществляется путем введения функции накопления повреждений.

Применение данных соотношений позволяет рассматривать задачи о развитии деформации и разрушения за счет деградации прочности с течением времени при неизменной внешней нагрузке под действием силы тяжести.

Для решения поставленной краевой задачи применяется хорошо зарекомендовавший себя при решении задач геомеханики лагранжевый метод сглаженных частиц [1-6].

### Результаты расчетов

На рис. 2 представлены расчеты устойчивости склона высотой  $h = 500$  м при различных углах наклона  $\alpha$ .

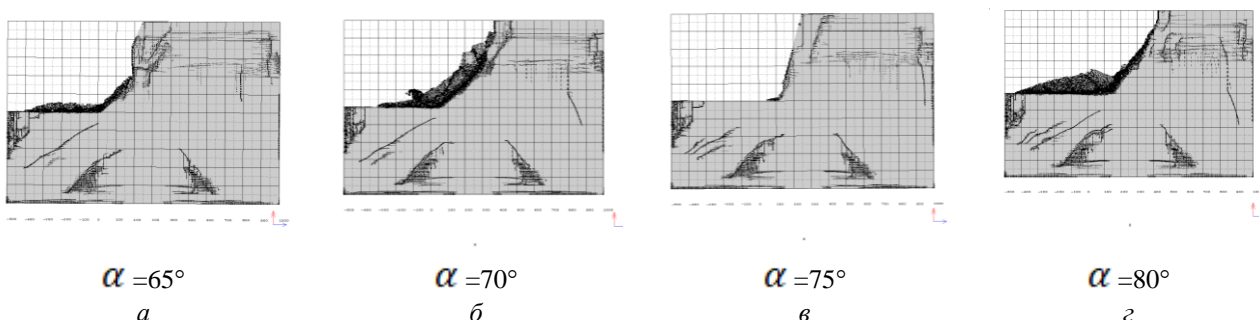


Рис. 2. Рассчитанная раскадровка состояния массива после выемки крупного блока

### Выводы

Используемая модель динамического разрушения наглядно воспроизводит деформации породы (рис. 2) и улавливает ее разрыхление и сдвигание путем ослабления взаимосвязей между частицами материала и формирования новых свободных поверхностей. Растягивающие напряжения и напряжения сдвига за счет возникшей фрагментации ведут к снижению прочностных параметров напряженно-деформированного состояния, т.е. к накоплению повреждений в массиве горной породы. Полученные путем изложенного подхода моделирования результаты (рис. 2) достаточно близко качественно коррелируют с эмпирическими наблюдениями и способствуют более качественному изучению и лучшему пониманию физических процессов, происходящих при деформировании и разрушении пород при техногенных воздействиях.

Исследование показало, что предложенный подход при моделировании поведения горного массива – возможность описания устойчивости техногенных откосов в разрабатываемых массивах. Результаты являются базовыми для разработки перспективных направлений методологических и научных исследований.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шиповский И.Е. *Расчет хрупкого разрушения горной породы с использованием бессеточного метода*. Науковий вісник НГУ. 2013. Вып. 1(145). С. 76-82.
2. Трофимов В.А., Шиповский И.Е. *Особенности перераспределения напряжений и деформаций вокруг протяженных выработок при развитии очистных горных работ*. Физическая мезомеханика материалов. 2022. С. 221-222.
3. Шиповский И.Е. *Динамическое моделирование устойчивости техногенного склона*. Проблемы и перспективы комплексного освоения и сохранения земных недр / ред. академик К.Н. Трубецкой. 2022. С. 175-180.
4. Захаров В.Н., Малинникова О.Н., Трофимов В.А., Шиповский И.Е. *Моделирование влияния пульпообразных масс в толще отвала на динамику развития оползневых зон*. Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле. 2020. Т. 1. С. 359-378.
5. Трофимов В.А., Шиповский И.Е. *Компьютерное моделирование динамического разрушения бортов карьера*. Триггерные эффекты в геосистемах. С. 245-254.
6. Trofimov V.A., Malinnikova O.N., Shipovskii I.E., Wen-Jie Xu. *Numerical Approach to Computer Simulation of Landslid Events*. AIP Conference Proceedings. 2019. V. 2167. P. 020329 (1-8).