

Н. П. Абовский
Н. П. Андреев
А. П. Деруга

ВАРИАЦИОННЫЕ
ПРИНЦИПЫ
ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ
И ТЕОРИИ
ОБОЛОЧЕК

Н. П. Абовский
Н. П. Андреев
А. П. Деруга

ВАРИАЦИОННЫЕ
ПРИНЦИПЫ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
И ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Под редакцией
Н. П. АБОВСКОГО



МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П., **Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек.** — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. — 288 с.

В книге в справочной форме впервые приведены результаты систематического исследования вариационных принципов теории упругости и оболочек в соответствии с теорией преобразования вариационных проблем Куранта и Гильберта.

Наряду с систематизацией известных вариационных принципов, книга содержит новые результаты и обобщения. Получена система полных и частных функционалов, в том числе смешанных. Изучены свойства функционалов не только с позиций стационарности, но и экстремальности. Выявлены экстремальные и минимаксные свойства ряда известных и новых функционалов. Установлена вариационная форма статико-геометрической аналогии в теории оболочек. Результаты обобщены на ребристые, многосвязные, многослойные и другие конструктивно-анизотропные оболочки и применены для анализа и решения ряда сложных задач.

Книга рассчитана на научных работников, аспирантов, инженеров, студентов университетов и вузов, применяющих вариационные и вариационно-разностные методы расчета авиационных, судостроительных, строительных, гидротехнических, машиностроительных и других конструкций.

Табл. 30, илл. 44, библи. 80.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
-----------------------	---

Глава 1

Основные положения вариационного исчисления

§ 1. Формулировка вариационной задачи	13
§ 2. Метод Эйлера — Лагранжа решения вариационных задач. Условия стационарности	15
§ 3. Некоторые достаточные условия экстремума	25

Глава 2

Общие и частные вариационные принципы и теоремы.

Основы теории преобразования вариационных проблем

§ 1. Общие и частные вариационные принципы и теоремы	27
§ 2. Преобразование задач о стационарном значении	33
§ 3. Исследование экстремальных свойств полных и частных функционалов	41
§ 4. Заключение	47

Глава 3

Вариационные принципы теории упругости

для неоднородных анизотропных тел

§ 1. Вводные замечания	50
§ 2. Различные варианты принципов Лагранжа и Кастильяно — исходные пункты для преобразования вариационных принципов	54
§ 3. Полные функционалы	63
§ 4. Частные функционалы. Их взаимосвязь с полными функционалами	70
§ 5. Экстремальные свойства полных и частных функционалов теории упругости	84
§ 6. Вариационные принципы и экстремальные свойства функционалов теории упругости при разрывных перемещениях, деформациях, напряжениях и функциях напряжений	89

§ 7. Развернутая форма записи некоторых функционалов в различных системах координат	94
---	----

Глава 4

Вариационные принципы теории упругих тонких неоднородных анизотропных оболочек переменной толщины

§ 1. Вводные замечания	99
§ 2. Различные варианты принципов Лагранжа и Кастилья-но — исходные пункты для преобразования вариационных принципов	110
§ 3. Полные функционалы	119
§ 4. Частные функционалы. Их взаимосвязь с полными функционалами	125
§ 5. Экстремальные свойства полных и частных функционалов теории оболочек	130
§ 6. О вариационных принципах и экстремальных свойствах функционалов теории оболочек при разрывных перемещениях, деформациях, усилиях и функциях напряжений. О контактных задачах в теории оболочек	131
§ 7. Вариационная форма статико-геометрической аналогии	133
§ 8. Развернутая форма записи функционалов в различных системах координат	136
§ 9. О вариационных функционалах для некоторых нелинейных задач теории оболочек	141

Глава 5

Использование вариационных принципов для анализа и решения задач теории упругости и теории оболочек

§ 1. Различные формы вариационных уравнений теории упругости и теории оболочек	142
§ 2. Особенности вариационных формулировок при сложных граничных условиях, в том числе для многосвязных областей	146
§ 3. О классификации прямых вариационных методов расчета	169
§ 4. Формирование алгебраических уравнений прямых методов на основе вариации функционала	177
§ 5. Использование экстремальных свойств функционалов при решении конечномерных (дискретизованных) задач	180
§ 6. Примеры построения алгоритмов расчета пологих анизотропных оболочек вариационно-разностным методом	182
§ 7. О применении различных функционалов для оценки точности приближенных решений	192

Приложение 1

Понятия функционального и выпуклого анализа в вариационной теории упругости и теории оболочек	204
--	-----

Приложение 2	
Некоторые сведения из векторного и тензорного анализа	208
Приложение 3	
Обобщение теории неоднородных анизотропных оболочек на конструктивную и приобретенную анизотропию	217
Таблицы	220

3.1. Различные варианты функционала Лагранжа для неоднородного анизотропного упругого тела (221). 3.2. Различные варианты функционала Кастильяно для неоднородного анизотропного упругого тела (223). 3.3. Лагранжева серия полных функционалов для неоднородного анизотропного упругого тела (225). 3.4. Кастильянова серия полных функционалов для неоднородного анизотропного упругого тела (229). 3.5. Некоторые частные функционалы для неоднородного анизотропного упругого тела (231). 3.6. Экстремальные свойства вариационных функционалов теории упругости (237). 3.7. Различные варианты функционала Лагранжа при разрывных перемещениях, деформациях и напряжениях (238). 3.8. Различные варианты функционала Кастильяно при разрывных функциях напряжений, напряжениях и деформациях (238). 3.9. Лагранжева серия полных функционалов при разрывных перемещениях, деформациях, напряжениях и функциях напряжений (239). 3.10. Некоторые системы координат в трехмерном пространстве (241). 3.11. Функционал Рейсснера в криволинейных ортогональных координатах (244). 3.12. Полный функционал в симметризованном основном пространстве состояний в криволинейных ортогональных координатах (245). 3.13. Полный функционал в симметризованном квазиосновном пространстве состояний в криволинейных ортогональных координатах (245).

4.1. Различные варианты функционала Лагранжа для неоднородной анизотропной оболочки (247). 4.2. Различные варианты функционала Кастильяно для неоднородной анизотропной оболочки (249). 4.3. Лагранжева серия полных функционалов для неоднородной анизотропной оболочки (251). 4.4. Кастильянова серия полных функционалов для неоднородной анизотропной оболочки (255). 4.5. Некоторые частные функционалы для неоднородной анизотропной оболочки (259). 4.6. Экстремальные свойства вариационных функционалов теории оболочек. Вариационная форма статико-геометрической аналогии (264). 4.7. Некоторые системы координат, используемые в теории оболочек (266). 4.8. Функционал Рейсснера в криволинейных ортогональных координатах (269). 4.9. Полный функционал в симметризованном основном пространстве состояний в криволинейных ортогональных координатах (269). 4.10. Полный функционал в симметризованном квазиосновном пространстве состояний в криволинейных ортогональных координатах (270).

П. 1. Элементы матрицы соотношений упругости для оболочки, подкрепленной произвольно ориентированными узкими ребрами (271). П. 2. Элементы матрицы соотношений упругости для оболочки, подкрепленной ортогональной сеткой узких ребер, параллельных координатным линиям (272). П. 3. Элементы матрицы соотношений упругости для оболочки, подкрепленной ортогональной сеткой широких ребер, параллельных координатным линиям (272). П. 4. Элементы матрицы соотношений упругости для оболочки, подкрепленной косоугольной сеткой широких ребер, параллельных координатным линиям (273). П. 5. Элементы матрицы соотношений упругости для оболочки, подкрепленной косоугольной сеткой узких ребер, параллельных координатным линиям (274). П. 6. Элементы матрицы соотношений упругости для многослойной оболочки (275).

Основные обозначения	276
Литература	279
Предметный указатель	285

«...в науке есть своя эстетика, и красота логической стройности вариационных принципов механики не может не восхищать математиков, физиков, механиков.»

Л. С. Полак

(Из предисловия к книге К. Ланцоша
«Вариационные принципы механики»)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хотя история создания вариационных принципов механики сплошных сред насчитывает более ста лет, а вариационное исчисление является одним из классических разделов математики, развитие вариационных принципов механики деформируемых тел, в частности теории упругости, теории оболочек и пластин, еще далеко от завершения. Отсутствует систематический анализ (и синтез) вариационных проблем теории упругости и теории оболочек, включающий исследования как условий стационарности вариационных функционалов, так и их экстремальных свойств.

В данной книге представлены результаты систематического исследования вариационных принципов статической теории упругости и оболочек с позиций стационарности и экстремальности функционалов. Благодаря общему подходу выявлены некоторые новые, не менее интересные, но еще не исследованные вариационные формулировки для анизотропного неоднородного тела и анизотропной неоднородной оболочки.

В качестве инструмента систематического исследования взята теория преобразования вариационных проблем, разработанная Д. Гильбертом и Р. Курантом [0.9], которая позволяет не только эквивалентным образом преобразовать одну задачу и другую, но и

дает возможность во многих случаях проследить за изменением экстремальных свойств функционалов.

Эта теория создана уже около половины века тому назад, но в литературе известны лишь немногие примеры применения ее к задачам механики деформируемых тел. Первые работы принадлежат Р. Куранту [0.9] и Э. Рейсснеру [0.13]. Р. Курант впервые применил преобразование Фридрихса для установления связи между принципами Лагранжа и Кастильяно. Э. Рейсснер [0.13], оценивая результаты своих четырех работ, посвященных вариационным принципам теории упругости, характеризует новизну использования теории [0.9] и полученную в итоге полную формулировку вариационной теоремы как вклад в теорию упругости. В отечественной литературе теория [0.9] впервые применена в работах [0.4], а впоследствии в [0.15, 0.6, 0.1] и др. Однако все эти исследования, как правило, не имеют общего характера и относятся к вариационным формулировкам в терминах стационарности функционалов. К анализу экстремальных свойств функционалов эта теория не применялась.

Используемые в книге сведения из вариационного исчисления приведены в гл. 1. В гл. 2 изложены основы теории преобразования вариационных проблем, которая рассмотрена в несколько более общей форме, чем в [0.9], с применением выпуклого анализа для изучения экстремальных свойств функционалов. Для построения и систематического исследования систем функционалов оказалось целесообразным выделить полные функционалы (без каких-либо дополнительных условий) в качестве узловых пунктов вариационной теории упругости или оболочек и совокупность частных функционалов, имеющих дополни-

тельные условия, и дать общие формулировки общего и частных вариационных принципов.

В соответствии с изложенной в гл. 2 теорией, в гл. 3 и 4 построены системы полных и частных функционалов для формулировки вариационных принципов теории упругости и теории оболочек. В книге принят вариант теории тонких оболочек, выбранный в [4.12] в качестве «наилучшего»; показана возможность перехода к вариационным принципам для других вариантов.

Наряду с известными полными функционалами Ху — Вашицу [0.17, 0.18], Рейсснера [0.13] и полным функционалом в перемещениях [3.11, 0.12] построен ряд новых полных функционалов, среди которых полный функционал в «квазиосновном» пространстве состояний, подобный функционалу Ху — Вашицу, и другие полные функционалы, не зависящие от перемещений, но содержащие функции напряжений, некоторые функционалы в основном и квазиосновном симметризованных пространствах, в неполных пространствах перемещений, деформаций, напряжений и функций напряжений и другие. Выявлены экстремальные свойства всех рассмотренных функционалов. Установлено, что большинство полных функционалов, в том числе известные функционалы Ху — Вашицу, Рейсснера и другие, имеют в качестве точки стационарности седловую точку, а среди некоторых новых функционалов обнаружены такие, которые не имеют ни экстремумов, ни минимаксов.

Впервые получены функционалы относительно физических соотношений упругости, ряд функционалов граничных условий, функционал Лагранжа, не содержащий перемещений, функционалы физико-геометрического и физико-статического характера и другие. Эти

новые функционалы по своим свойствам теоретического и вычислительного характера не уступают ранее известным.

Показано несоответствие некоторых общих решений уравнений равновесия вариационному принципу Кастильяно и выводимым из него определенным видам уравнений неразрывности. В этом плане следует подчеркнуть целесообразность проверки новых и известных старых дифференциальных формулировок на соответствие вариационным принципам.

Построена и изучена с точки зрения стационарности и экстремальности система полных и частных функционалов в случае разрывных полей перемещений, деформаций, напряжений и функций напряжений; некоторые вариационные принципы для таких полей впервые рассматривались В. Прагером [0.12]. Аналогичные вопросы рассмотрены и в теории оболочек. Необходимость рассматривать разрывные поля в качестве возможных состояний упругого тела возникает иногда при численном решении задач, в частности при использовании метода конечных элементов.

Установлена вариационная форма статико-геометрической аналогии в теории непологих неоднородных анизотропных оболочек, которая выражается в соответствии между функционалами, их дополнительными и естественными условиями и экстремальными свойствами.

Пятая глава посвящена некоторым приложениям, показывающим, что вариационные методы являются мощным орудием качественного анализа и средством численного решения задач. Рассмотрены различные формы вариационных уравнений. Предложена классификация прямых вариационных методов расчета, основанная на идеях главы 2. Разработан универсаль-