СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

1

- ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
- ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И МАТРИЦЫ
  СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
- ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
- ОСНОВЫ ОБЩЕЙ АЛГЕБРЫ

ФМ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ВТУЗОВ

1

Под редакцией А. В. Ефимова и А. С. Поспелова

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям и специальностям в области техники и технологии

ФМ

Москва
ФИЗМАТЛИТ
2009

ББК 22.1
С 23
УДК 51(075.8)

Коллектив авторов:

А. В. ЕФИМОВ, А. Ф. КАРАКУЛИН, И. Б. КОЖУХОВ,
А. С. ПОСПЕЛОВ, А. А. ПРОКОФЬЕВ

Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч. 1: Учебное пособие для втузов / Под общ. ред. А. В. Ефимова и А. С. Поспелова. — 5-е изд. испр. —М.: Издательство Физико-математической литературы, 2009.—288 с.—ISBN 9785-94052-157-0 (Ч. 1).

Содержит задачи по линейной алгебре, аналитической геометрии, а также общей алгебре. Краткие теоретические сведения, снабженные большим количеством разобранных примеров, позволяют использовать сборник для всех видов обучения.
Для студентов высших технических учебных заведений.

Учебное издание

ЕФИМОВ Александр Васильевич, КАРАКУЛИН Анатолий Федорович, КОЖУХОВ Игорь Борисович, ПОСПЕЛОВ Алексей Сергеевич, ПРОКОФЬЕВ Александр Александрович

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ВТУЗОВ

Часть 1

Редактор *Л. А. Панюшкина*
Корректор *Т. С. Вайсберг*
Компьютерная графика *М. В. Ивановский*
Компьютерная верстка *Г. М. Красникова*

ИД № 01389 от 30.03.2000
Гигиеническое заключение № 77.99.10.953.Д.005466.07.03 от 25.07.2003

Подписано в печать 15.10.2008. Формат 60×88/16.
Печать офсетная с готовых диапозитивов.
Усл. печ. л. 18. Уч.-изд. л. 19,8. Тираж 3500 экз.
Заказ № 3705.

Издательство Физико-математической литературы
123182 Москва, ул. Щукинская, д. 12, к. 1

Отпечатано с готовых диапозитивов
ПФ «Полиграфист»
160001 г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3

ISBN 9785-94052-157-0 (Ч. 1)
ISBN 9785-94052-156-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНЫХ РЕДАКТОРОВ 5

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ 6

Глава 1. **Векторная алгебра и аналитическая геометрия** 7

§ 1. Векторная алгебра 7

1. Линейные операции над векторами. 2. Базис и координаты вектора. 3. Декартовы прямоугольные координаты точки. Простейшие задачи аналитической геометрии. 4. Скалярное произведение векторов. 5. Векторное произведение векторов. 6. Смешанное произведение векторов

§ 2. Линейные геометрические объекты 26

1. Прямая на плоскости. 2. Плоскость и прямая в пространстве

§ 3. Кривые на плоскости 40

1. Уравнение кривой в декартовой системе координат. 2. Алгебраические кривые второго порядка. 3. Уравнение кривой в полярной системе координат. 4. Параметрические уравнения кривой. 5. Некоторые кривые, встречающиеся в математике и ее приложениях

§ 4. Поверхности и кривые в пространстве 62

1. Уравнения поверхности и кривой в декартовой прямоугольной системе координат. 2. Алгебраические поверхности второго порядка. 3. Классификация поверхностей по типу преобразований пространства

Глава 2. **Определители и матрицы. Системы линейных уравнений** 76

§ 1. Определители 76

1. Определители 2-го и 3-го порядков. 2. Определители n-го порядка. 3. Основные методы вычисления определителей n-го порядка

§ 2. Матрицы 86

1. Операции над матрицами. 2. Обратная матрица

§ 3. Пространство арифметических векторов. Ранг матрицы . 93

1. Арифметические векторы. 2. Ранг матрицы

§ 4. Системы линейных уравнений 102

1. Правило Крамера. 2. Решение произвольных систем. 3. Однородные системы. 4. Метод последовательных исчислений Жордана–Гаусса

Глава 3. **Линейная алгебра** 113

§ 1. Линейные пространства и пространства со скалярным произведением 113

1. Линейное пространство. 2. Подпространства и линейные многообразия. 3. Пространства со скалярным произведением

§ 2. Линейные операторы 126

1. Алгебра линейных операторов. 2. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора. 3. Линейные операторы в пространствах со скалярным произведением. 4. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду

§ 3. Билинейные и квадратичные формы 143

1. Линейные формы. 2. Билинейные формы. 3. Квадратичные формы. 4. Кривые и поверхности второго порядка

§ 4. Элементы тензорной алгебры 154

1. Понятие тензора. 2. Операции над тензорами. 3. Симметрирование и альтернирование. 4. Сопряженное пространство. Тензор как полилинейная функция

Глава 4. **Элементы общей алгебры** 164

§ 1. Бинарные отношения и алгебраические операции 164

1. Бинарные отношения и их свойства. 2. Виды бинарных отношений. 3. Операции над бинарными отношениями. 4. Алгебраические операции и их свойства

§ 2. Группы 176

1. Полугруппы. 2. Группы. 3. Группы подстановок. 4. Фактор-группа. 5. Абелевы группы

§ 3. Кольца и поля 194

1. Кольца. 2. Поля. 3. Многочлены над полями. Деление многочленов. 4. Фактор-кольцо. 5. Расширения полей. 6. Алгебры над полем

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ 237

ПРЕДИСЛОВИЕ ТИТУЛЬНЫХ РЕДАКТОРОВ

Настоящее издание «Сборника задач по математике для втузов» подверглось значительной перестановке глав и их распределению по томам. В результате первый том содержит алгебраические разделы курса высшей математики, в том числе векторную алгебру и аналитическую геометрию, определители и матрицы, системы линейных уравнений, линейную алгебру и новый раздел — общую алгебру.

Второй том полностью посвящен изложению основ математического анализа, дифференциальному и интегральному исчислениям функций одной и нескольких переменных, а также дифференциальным уравнениям.

В третьем томе собраны специальные разделы математического анализа, которые в различных наборах и объемах изучаются в технических вузах и университетах. Сюда относятся такие разделы, как векторный анализ, элементы теории функций комплексной переменной, ряды и их применение, операционное исчисление, методы оптимизации, уравнения в частных производных, а также интегральные уравнения.

Наконец, четвертый том содержит теоретические введения, типовые примеры и циклы задач по теории вероятностей и математической статистике.

Указанные выше изменения составляют лишь структурную переработку Сборника, никоим образом не затрагивая ни расположения материала внутри соответствующей главы, ни последовательности нумерации примеров и задач.

В смысловом отношении авторы внесли только следующие изменения. Во всех разделах Сборника исключены теоретические введения и циклы задач, связанные с численными методами. Дело в том, что в настоящее время существует целый ряд программных оболочек, каждая из которых реализует достаточно полный набор стандартных методов приближенного решения задач, а основные навыки работы с компьютером можно приобрести уже в школе. Авторы посчитали также необходимым добавить один новый раздел «Основы общей алгебры» и предложить цикл задач по тензорной алгебре в разделе «Линейная алгебра» в первый, «алгебраический» том Сборника. Это связано с тем, что круг идей и методов общей алгебры все глубже проникает в наукоемкие отрасли промышленности и, следовательно, становится необходимой частью образования и подготовки специалистов по инженерным специальностям.

Кроме отмеченного выше, авторами выполнена стандартная техническая работа по исправлению ошибок, описок и других неточностей, учтены также все замечания, возникавшие в процессе работы с предыдущими изданиями Сборника.

А. В. Ефимов, А. С. Поспелов

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Идея создания «Сборника задач по математике для втузов», содержащего задачи по всем разделам курса математики инженерно-технических специальностей вузов, принадлежит Б. П. Демидовичу. Однако преждевременная смерть профессора Б. П. Демидовича помешала ему осуществить эту работу. Настоящий «Сборник задач», подготовленный авторским коллективом, имеющим большой педагогический опыт работы во втузах, — воплощение в жизнь идеи Б. П. Демидовича.

Общая структура «Сборника задач» предложена редактором А. В. Ефимовым и отражает содержание программы по математике для инженерно-технических специальностей вузов, рассчитанной на 510 часов и утвержденной Учебно-методическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР 14 мая 1979 г. При составлении «Сборника задач» нашел отражение и опыт преподавания курса математики в Московском институте электронной техники, рассчитанного на 600–700 часов.

В сборник включены задачи и примеры по всем разделам втузовского курса математики. С целью закрепления материала школьной программы в нем, кроме того, приведен ряд задач, позволяющих более углубленно повторить основные разделы анализа и векторной алгебры, изучаемые в школе.

Одной из основных особенностей настоящего сборника является включение в большинство глав цикла расчетных задач, решение которых требует использования ЭВМ.

Предлагаемая первая часть сборника «Линейная алгебра и основы математического анализа» включает те разделы математики, которые как правило, изучаются на первом курсе. Сюда относятся векторная алгебра с элементами аналитической геометрии, линейная алгебра, а также дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных и интегральное исчисление функций одной переменной.

Каждый раздел сборника задач снабжен кратким введением, содержащим как необходимые теоретические сведения (определения, формулы, теоремы), так и большое число подробно разобранных примеров. Начало решения примеров и задач отмечено знаком $\lhd$, а конец — знаком $\rhd$. К задачам, номера которых помечены соответственно одной или двумя звездочками, указания или решения даются в разделе «Ответы и указания».

Глава 1

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Векторная алгебра

1. Линейные операции над векторами. *Вектором* (*геометрическим вектором*) $\mathbf{a}$ называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковую длину и направление. О всяком отрезке $\overrightarrow{AB}$ из этого множества говорят, что он представляет вектор $\mathbf{a}$ (получен приложением вектора $\mathbf{a}$ к точке A). Длина отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется *длиной* (*модулем*) вектора $\mathbf{a}$ и обозначается символом $|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}|$. Вектор нулевой длины называется *нулевым вектором* и обозначается символом $\mathbf{0}$.

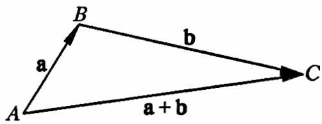

Рис. 1

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *равными* ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$), если множества представляющих их направленных отрезков совпадают.

В ряде задач часто бывает удобно не различать вектор и какой-либо представляющий его направленный отрезок. Именно в этом смысле, например, следует понимать выражение «построить вектор».

Пусть направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ представляет вектор $\mathbf{a}$. Приложив к точке B заданный вектор $\mathbf{b}$, получим некоторый направленный отрезок $\overrightarrow{BC}$. Вектор, представляемый направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$, называется *суммой* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и обозначается $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 1).

Произведением вектора $\mathbf{a}$ *на действительное число* λ называется вектор, обозначаемый $\lambda\mathbf{a}$, такой, что:

1) $|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$;

2) векторы $\mathbf{a}$ и $\lambda\mathbf{a}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

1.1. Доказать, что операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

а) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$;

б) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1$ (*коммутативность*);

в) $\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) + \mathbf{a}_3$ (*ассоциативность*);

г) $\forall \mathbf{a}\, \exists!\, \mathbf{b}\ (\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{0})$

(вектор $\mathbf{b}$ называется вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{a}$, и обозначается символом $-\mathbf{a}$);

д) $\forall \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\, \exists!\, \mathbf{a}_3\ (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2)$
(вектор $\mathbf{a}_3$ называется *разностью* векторов $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_1$ и обозначается символом $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$).

1.2. Доказать равенства:

а) $-\mathbf{a} = (-1)\mathbf{a}$;

б) $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 + (-\mathbf{a}_1)$;

в) $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{a}_0$, где $\mathbf{a}_0$ — *орт* вектора $\mathbf{a}$, т. е. вектор единичной длины, сонаправленный с вектором $\mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$).

1.3. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ векторы $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{p}$ представлены ребрами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA'}$ соответственно. Построить векторы:

а) $\mathbf{m} + \mathbf{n} + \mathbf{p}$; б) $\dfrac{1}{2}\mathbf{m} + \dfrac{1}{2}\mathbf{n} - \mathbf{p}$; в) $-\mathbf{m} - \mathbf{n} + \dfrac{1}{2}\mathbf{p}$.

1.4. Даны векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Построить векторы $3\mathbf{a}_1$, $\dfrac{1}{2}\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$, $\dfrac{1}{2}\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

1.5. Доказать, что:

а) операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

$$0\mathbf{a} = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}, \quad (\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1(\lambda_2\mathbf{a});$$

б) операции сложения векторов и умножения их на числа связаны следующими двумя свойствами *дистрибутивности*:

$$\lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \lambda\mathbf{a}_1 + \lambda\mathbf{a}_2 \quad \text{и} \quad (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{a} + \lambda_2\mathbf{a}.$$

1.6. Доказать равенства:

а) $\mathbf{a} + \dfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$;

б) $\mathbf{a} - \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

Каков их геометрический смысл?

1.7. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$ и $\overrightarrow{CF}$ — медианы треугольника ABC. Доказать равенство $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$.

1.8. $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{BM}$ — медианы треугольника ABC. Выразить через $\mathbf{p} = \overrightarrow{AK}$ и $\mathbf{q} = \overrightarrow{BM}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$.

1.9. В параллелограмме $ABCD$ обозначены: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$. Выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$, где M — точка пересечения диагоналей параллелограмма.

1.10. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CN} = \beta\overrightarrow{CM}$. Полагая $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, выразить $\overrightarrow{AN}$ и $\overrightarrow{BN}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

1.11. $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, причем $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{q}$. Выразить через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AE}$.

1.12. M — точка пересечения медиан треугольника ABC, O — произвольная точка пространства. Доказать равенство $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

1.13. В пространстве заданы треугольники ABC и $A'B'C'$; M и M' — точки пересечения их медиан. Выразить вектор $\overrightarrow{MM'}$ через векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ и $\overrightarrow{CC'}$.

1.14. Точки E и F — середины сторон AD и BC четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

1.15. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания AD к длине основания BC равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

1.16. В треугольнике ABC $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AN} = \beta\overrightarrow{AC}$.

а) При каком соотношении между α и β векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны.

б) Пусть α и β таковы, что векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ неколлинеарны. Полагая $\overrightarrow{BC} = \mathbf{p}$ и $\overrightarrow{MN} = \mathbf{q}$, выразить векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$.

Система векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_2$ называется *линейно зависимой*, если существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля и $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$. В противном случае система называется *линейно независимой*.

1.17. Доказать следующие геометрические критерии линейной зависимости:

а) система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ *коллинеарны*, т. е. их направления совпадают или противоположны;

б) система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно зависима в том и только в том случае, когда векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ *компланарны*, т. е. параллельны некоторой плоскости;

в) всякая система из $n \geqslant 4$ векторов линейно зависима.

1.18. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отложен вектор $\overrightarrow{AK}$ длины $|\overrightarrow{AK}| = \frac{1}{5}|\overrightarrow{AD}|$, а на диагонали AC — вектор $\overrightarrow{AL}$ длины $|\overrightarrow{AL}| = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{LB}$ коллинеарны и найти λ такое, что $\overrightarrow{KL} = \lambda \cdot \overrightarrow{LB}$.

1.19. Разложить вектор $\mathbf{s} = \mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\mathbf{p} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 2\mathbf{c}$, $\mathbf{q} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{r} = 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$.

1.20 Найти линейную зависимость между данными четырьмя некомпланарными векторами: $\mathbf{p} = \mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{q} = \mathbf{b}-\mathbf{c}$, $\mathbf{r} = \mathbf{a}-\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{s} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$.

1.21. Даны четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$. Вычислить их сумму, если известно, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \alpha\mathbf{d}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \beta\mathbf{a}$ и векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны.

1.22. Доказать, что для любых заданных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ компланарны.

1.23. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Доказать, что векторы $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $3\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 3\mathbf{c}$ компланарны.

1.24. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Вычислить значения λ, при которых векторы $\lambda\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}+\mathbf{c}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\lambda\mathbf{c}$ компланарны.

1.25. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Вычислить значения λ и μ, при которых векторы $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$ коллинеарны.

2. Базис и координаты вектора. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ называется *базисом* в множестве всех геометрических векторов. Всякий геометрический вектор $\mathbf{a}$ может быть единственным образом представлен в виде

$$\mathbf{a} = X_1\mathbf{e}_1 + X_2\mathbf{e}_2 + X_3\mathbf{e}_3; \tag{1}$$

числа X_1, X_2, X_3 называются *координатами* вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Запись (1) называют также разложением вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathfrak{B}$.

Аналогично, упорядоченная пара $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ неколлинеарных векторов называется базисом $\mathfrak{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ в множестве геометрических векторов, компланарных некоторой плоскости.

Наконец, всякий ненулевой вектор $\mathbf{e}$ образует базис $\mathfrak{B} = (\mathbf{e})$ в множестве всех геометрических векторов, коллинеарных некоторому направлению.

Если вектор $\mathbf{a}$ есть *линейная комбинация* векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, т.е.

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \mathbf{a}_k,$$