

Д. С. ЕРШОВ, Р. З. ХАЙРУЛЛИН

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ



«Инфра-Инженерия»

**Д. С. Ершов, Р. З. Хайруллин**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Монография

Москва Вологда  
«Инфра-Инженерия»  
2025

УДК [006.91+004]

ББК 30.10

E80

Рецензенты:

д. т. н., ведущий научный сотрудник научно-исследовательского испытательного отдела  
ФГБУ «Главный научный метрологический центр» Министерства обороны РФ

*B. V. Супрунок;*

д. т. н., профессор, профессор кафедры ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты  
Министерства РФ по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации  
последствий стихийных бедствий имени генерал-лейтенанта Д. И. Михайлика»

*K. P. Латышенко*

**Ершов, Д. С.**

**E80** Математическое моделирование метрологических систем : монография / Д. С. Ершов, Р. З. Хайруллин. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. – 168 с. : ил., табл.

ISBN 978-5-9729-2418-9

Содержит общие положения, принципы и методы математического моделирования  
метрологических систем.

Для научных работников, специалистов и руководителей предприятий, работающих  
в области обеспечения единства измерений, занимающихся вопросами метрологи-  
ческого обеспечения. Может быть полезна аспирантам и студентам, обучающимся по  
направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология», профили «Метро-  
логическое обеспечение производств», «Цифровая метрология».

554454

УДК [006.91+004]

ББК 30.10

**БИБЛИОТЕКА**

ФГАОУ ВО

Сибирский федеральный

© Ершов, Д. С. Хайруллин Р. З., 2025

© Издательство «Инфра-Инженерия», 2025

© Оформление. Издательство «Инфра-Инженерия», 2025

ISBN 978-5-9729-2418-9

# СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	6
<b>1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОЧЕГО МЕСТА ПО ПОВЕРКЕ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ КАК НЕСТАЦИОНАРНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ.....</b>	13
1.1. Обзор литературы по теории нестационарных систем обслуживания .....	13
1.2. Постановка задачи.....	15
1.3. Базовая модель.....	16
1.4. НСО с относительными приоритетами.....	18
1.5. Результаты численного моделирования НСО с ОП .....	20
1.6. Модель НСО с ОП в матричной форме .....	26
1.7. Модель НСО с ОП как модель управления вероятностями нахождения в различных состояниях системы .....	28
1.8. Моделирование динамики поступления и обслуживания заявок с разными приоритетами .....	28
1.9. Исследование пиковых, полупиковых и базовых нагрузок на РМ при постоянных значениях интенсивностей обслуживания.....	30
1.10. Моделирование управления пиковыми нагрузками с помощью кусочно-линейных управляющих функций .....	32
1.11. Моделирование функционирования РМ в штатном режиме (при ненулевых начальных условиях) .....	33
1.12. Оценка трудоемкости моделирования .....	34
1.13. Выводы по разделу 1.....	35
<b>2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ ЛАБОРАТОРИЙ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ВЫПОЛНЕНИЯ ПОВЕРКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ .....</b>	37
2.1. Постановка задачи.....	37
2.2. Модели процессов функционирования метрологических лабораторий в различных режимах выполнения поверки средств измерений.....	38
2.3. Методика расчета производительности метрологических лабораторий в различных режимах выполнения поверки средств измерений.....	45
2.4. Результаты численного моделирования процессов функционирования метрологических лабораторий в различных режимах выполнения поверки средств измерений.....	47
2.5. Выводы по разделу 2.....	56

<b>3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ЭКСПЛУАТАЦИИ, ОБНОВЛЕНИЯ И ДЕГРАДАЦИИ ПАРКА СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МЕТРОЛОГИЧЕСКИМ ОБЕСПЕЧЕНИЕМ.....</b>	57
3.1. Обзор литературы по вопросам моделирования процессов эксплуатации сложных технических систем.....	57
3.2. Модели эксплуатации СТС .....	59
3.2.1 Классическая модель .....	59
3.2.2 Модель эксплуатации парка СТС с полностью восстанавливаемым ресурсом .....	72
3.2.3 Модель эксплуатации парка СТС с частично восстанавливаемым ресурсом .....	76
3.3. Выводы по разделу 3 .....	84
<b>4. ПРИМЕНЕНИЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....</b>	85
4.1. Применение байесовского подхода в задачах построения статистических оценок при обработке результатов испытаний измерительной техники .....	85
4.1.1 Логическая схема байесовского подхода .....	85
4.1.2 Определение и условие существования априорных распределений, сопряженных с наблюдаемой генеральной совокупностью.....	88
4.1.3 Условие существования сопряженного семейства априорных распределений .....	88
4.1.4 Построение априорных сопряженных распределений.....	90
4.1.5 Методика расчета конкретных значений параметров в сопряженных априорных распределениях .....	92
4.1.6 Пересчет значений параметров при переходе от априорного сопряженного распределения к апостериорному .....	93
4.1.7 Примеры задач на точечное и интервальное байесовское оценивание параметров модели.....	94
4.2. Применение метода байесовских сетей для установления причинно-следственных связей .....	98
4.3. Построение доверительных интервалов и областей для модели множественной линейной регрессии с использованием байесовского подхода .....	102
4.3.1 Метод решения задачи.....	103
4.3.2 Построение и исследование модели множественной линейной регрессии .....	105
4.3.3 Результаты моделирования .....	112
4.4. Выводы по разделу 4 .....	116

<b>5. ВЕРОЯТНОСТНО-ФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МЕТРОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ .....</b>	118
5.1. Трехпараметрическая диффузионная модель отказов измерительной техники .....	118
5.2. Диффузионная модель дрейфа метрологических характеристик измерительной техники .....	129
5.3. Модель эксплуатации измерительной информационной системы с цифровой обработкой сигналов .....	135
5.4. Применение риск-ориентированного подхода в задачах метрологического обеспечения парка средств измерений .....	142
5.5. Об одной термодинамико-метрологической аналогии .....	149
5.6. Выводы по разделу 5.....	154
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	156
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....</b>	158

## ВВЕДЕНИЕ

Моделирование является одним из методов, направленных на изучение окружающего мира. Существует целая область знания – методология, которая специально занимается изучением методов познания.

Из всеобщих методов в истории познания выделим два: диалектический и метафизический. Это общефилософские методы. С середины XIX века метафизический метод начал все больше вытесняться из естествознания диалектическим методом.

Классификация общенаучных методов тесно связана с понятием уровней научного познания. Различают два уровня научного познания: эмпирический и теоретический. Одни общенаучные методы применяются только на эмпирическом уровне (наблюдение, эксперимент, измерение), другие – только на теоретическом (идеализация, формализация).

Но есть общенаучный метод, который используются как на эмпирическом уровне, так и на теоретическом. Таким общенаучным методом является моделирование.

Моделирование – метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и на теоретическом уровне познания. При построении и исследовании модели могут применяться практически все остальные методы познания.

Под моделью понимается такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя основные и важные для данного исследования типичные его черты. Процесс построения и использования модели называется моделированием.

Другими словами, модель – это объект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых интересующих исследователя свойств оригинала.

Любая модель не тождественна объекту-оригиналу, поскольку при ее построении исследователь учитывал лишь важнейшие с его точки зрения факторы. В этом отношении любая модель является неполной. «Полная» модель, очевидно, будет полностью тождественна оригиналу (Норберт Винер: наилучшей моделью кота является другой кот, а еще лучше – тот же самый кот).

Если результаты моделирования удовлетворяют исследователя и могут служить основой для прогнозирования поведения или свойств исследуемого объекта, то говорят, что модель адекватна объекту. Адекватность модели зависит от целей моделирования и принятых критериев. Идеально адекватная модель принципиально невозможна в силу неполноты модели.

В качестве одной из характеристик модели может выступать простота (или сложность) модели.

Важнейшим свойством модели является потенциальность модели, или её предсказательность с позиций получения новых знаний об исследуемом объекте: мы хотим получать от модели больше, чем в нее вложили. Эта «дерзость», «соб-

ственний ум» моделей – есть проявление множества внутренних связей, осознать совместное действие (синергетические эффекты) которых их создатели зачастую не в состоянии (по крайней мере, на стадии разработки).

В научных исследованиях модели, не обладающие определенной «предсказательностью», едва ли могут считаться удовлетворительными.

Модель нужна для того, чтобы:

понять, как устроен конкретный объект: какова его структура, внутренние связи, основные свойства, законы развития, саморазвития и взаимодействия с окружающей средой;

научиться управлять объектом или процессом, определять наилучшие способы управления при заданных целях и критериях;

прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект.

В математическом моделировании описание объекта осуществляется на языке математики, а исследование модели проводится с использованием тех или иных математических методов, и, как правило, вычислительных средств.

В настоящее время математическое моделирование это один из самых результативных и часто применяемых методов научного исследования. Фактически все современные разделы физики посвящены построению и исследованию математических моделей различных физических объектов и явлений.

Так физики-«ядерщики» до проведения экспериментов выполняют серьезные исследования с применением математических моделей. При этом на основании теоретического моделирования разрабатывается и уточняется методика натурных экспериментов, выясняется, какие эффекты, где и когда следует ожидать, когда и что регистрировать. Такой подход позволяет значительно снизить затраты на проведение эксперимента, повысить его эффективность.

Как правило значительные успехи в биологии и химии в последнее время были связаны с разработкой и исследованием математических моделей для биологических систем и химических процессов. Идут активные работы по созданию математических моделей в экологии, экономике и социологии.

Нельзя переоценить использование математических моделей в медицине и промышленности. Появилась возможность на научной, то есть логически обоснованный основе подходить ко многим экологическим и медицинским проблемам: имплантации и замене различных органов, прогнозирование развития эпидемий, обоснования планов ликвидации последствий крупных аварий и катастроф. Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными.

По сравнению с натурным моделированием математическое моделирование имеет следующие преимущества:

- 1) экономичность (в частности, сбережение ресурсов реальной системы);
- 2) возможность моделирования гипотетических, то есть не реализуемых в природе объектов (прежде всего на разных этапах проектирования);

3) возможность реализации режимов опасных или трудновоспроизводимых в натуре (критический режим ядерного реактора, работа системы противоракетной обороны);

4) возможность изменения масштабов времени; простота многоаспектного анализа;

5) большая прогностическая сила вследствие возможности выявления общих закономерностей;

6) универсальность технического и программного обеспечения проводимой работы (ЭВМ, системы программирования и пакеты прикладных программ широкого назначения).

Очень часто методы математического моделирования являются единственно возможными.

Элементы математического моделирования использовались с самого начала появления точных наук: слово «алгоритм» происходит от имени средневекового арабского ученого Аль-Хорезми (аль Хорезми Абу Абдала Мухамед бен Мусса аль Маджуси, 787 г. – ок. 850 г.). Второе рождение математического моделирования пришлось на конец 40-х – начало 50-х годов XX века и было обусловлено в основном двумя причинами.

Первая из них – появление первых компьютеров. Вторая – социальный заказ – выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, который не мог быть выполнен традиционными методами. Математическое моделирование блестяще справилось с этой задачей: ядерные взрывы и полеты ракет и спутников были предварительно осуществлены в недрах ЭВМ с помощью математических моделей и лишь затем претворены на практике.

Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, встраиваясь в структуру информационного общества. «Сырая информация» обычно мало что дает для анализа и прогноза, для принятия решений и контроля за их исполнением. Нужны надежные способы переработки информационного сырья в готовый продукт – точные знания.

История и методология математического моделирования убеждают: оно может и должно стать интеллектуальным ядром информационных технологий, всего процесса информатизации общества.

Метод математического моделирования, представляющий собой количественное описание изучаемых явлений на языке математики, широко применяется для исследования всевозможных явлений природы и общественной жизни.

Этот «третий путь познания» сочетает в себе достоинства как теории, так и эксперимента. С одной стороны, работая не с самим объектом, а с ее моделью, мы можем относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). С другой стороны, вычислительные эксперименты с моделями объектов поз-

воляют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и вычислительной техники, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим исследованиям (преимущества эксперимента).

Объектом исследования в теории моделирования является система. Система – это совокупность взаимосвязанных элементов, объединенных в одно целое для достижения некоторой цели, которая определяется назначением системы. При этом элемент – это минимально неделимый объект, рассматриваемый как единое целое. Если система – это совокупность взаимосвязанных элементов, то комплекс – это совокупность взаимосвязанных систем.

Элемент, система, комплекс – понятия относительные, т. к. любой элемент, если его расчленить, если его не рассматривать как неделимый объект, то он становится системой, и наоборот любой комплекс становится системой, если входящие в его состав системы рассматривать как элементы.

Технические системы – искусственно созданные объекты, предназначенные для удовлетворения определенной потребности, которым присущи возможность выполнения не менее одной формы, многоэлементность, иерархичность строения, множественность связей между элементами, многократность изменения состояний и многообразие потребительских качеств.

К техническим системам можно отнести отдельные машины, аппараты, приборы, сооружения, ручные орудия, их элементы в виде узлов, блоков, агрегатов и др.

Техническая система существует в трёх модусах (проявлениях):

- 1) как изделие производства;
- 2) как устройство, потенциально готовое совершить полезный эффект;
- 3) как процесс взаимодействия с компонентами окружающей среды (источником внешней энергии, потребителем и т. д.), в результате которого и происходит эксплуатация (функционирование) технических систем и образуется полезный эффект.

Метрологическая система может рассматриваться как частный случай технической системы или как составляющая часть некоторой технической системы. Таким образом, в настоящей работе под *метрологической системой* понимается сложная техническая (передвижная или стационарная) система, которая в том числе может включать средства измерений и измерительные комплексы, которые должны быть метрологически обслужены (обеспечены), предназначенная для удовлетворения определенной потребности в обеспечение единства и установленной точности, достоверности, оперативности и автономности измерений. Например, к таким системам можно отнести: рабочее место по поверке (калибровке) средств измерений; метрологическую лабораторию; средство измерения; процесс взаимодействия отдельных элементов крупных метрологических систем; другие сложные технические системы, требующие метрологического обеспечения (обслуживания).

Целью данной работы является описание основных положений, принципов и методов математического моделирования метрологических систем на некоторых конкретных примерах.

Так в первом разделе представлена модель рабочего места по поверке средств измерений как нестационарной системы обслуживания с относительными приоритетами поступающего потока заявок. Модель основывается на построении многомерного графа и соответствующей системы уравнений Чепмена – Колмогорова. Модель позволяет выявить и на качественном уровне объяснить основные закономерности и технологические параметры функционирования рабочего места. Представлены результаты моделирования динамики функционирования рабочего места по поверке средств измерений как нестационарной системы обслуживания с приоритетностью обслуживания поступающих заявок. Даётся оценка трудоемкости применения разработанной модели. Представленную модель возможно использовать для расчета пропускной способности поступающих на поверку средств измерений, функционирующих в условиях изменяющейся рабочей нагрузки на определенном временном интервале. Также модель возможно применять для обоснования технических требований при проектировании рабочих мест, которые предполагается использовать в условиях изменяющейся рабочей нагрузки.

Во втором разделе представлен подход к моделированию процессов функционирования метрологических лабораторий, который отличается от известных возможностью учета режимов функционирования метрологического подразделения при выполнении поверочных работ в различных условиях, а также возможностью распределения средств измерений, требующих поверки, по производственным возможностям и приоритетности поверки.

В третьем разделе проведен ретроспективный анализ существующих моделей эксплуатации сложных технических систем (СТС) с метрологическим обеспечением. Описана модель ложного и необнаруженного отказов, модель надежности и деградации СТС, которые используются совместно с классической моделью Е.И. Сычева. Для СТС, допускающих полное восстановление ресурса при проведении ремонта, разработана модель эксплуатации СТС, учитывающая 4 степени (группы) деградации СТС. Модель описывается системой линейных алгебраических уравнений 21 порядка. Построена функциональная зависимость стационарного коэффициента готовности от межповерочных интервалов средств измерений, входящих в различные группы деградации. Для СТС, не допускающих полное восстановление ресурса при проведении ремонта, разработана модель эксплуатации СТС, учитывающая 3 группы деградации СТС. Модель описывается системой линейных алгебраических уравнений 24 порядка. Модель позволяет моделировать основные этапы жизненного цикла парка СТС, включая, кроме процесса деградации, процессы обновления парка СТС за счет закупок новых образцов и модернизаций существующих образцов СТС. Представленные в разделе модели позволяют рассчитывать оптимальные значения интервалов между поверками и оптимальные значения допусков на

контролируемые параметры для разных групп деградации СТС с метрологическим обеспечением, обеспечивающие максимальный уровень стационарного коэффициента готовности. Модели могут быть использованы для классификации СТС с целью задания требований к их метрологическому обеспечению. Модели также могут быть использованы для расчета технико-экономических показателей развития парка СТС. Представленные модели составляют основу комплекса прикладных программ для моделирования и оптимизации этапов жизненного цикла СТС.

В четвертом разделе представлен пример применения байесовского подхода в условиях возможности получения дополнительной информации и ее использования с целью построения эффективных оценок точности измерения. Представлена модель байесовской сети, предназначенная для выявления причинно-следственных связей на основе обработки статистической информации по результатам проведения поверок средств измерений. Модель позволяет оценивать влияние различных факторов на результаты поверок, а также получать ответы на множество вопросов «а что, если...». Представлен алгоритм построения точечных и интервальных статистических оценок для параметров модели множественной линейной регрессии. Представлены результаты сравнения с соответствующими оценками, полученными классическим методом максимального правдоподобия.

В пятом разделе представлены вероятностно-физические модели изменения метрологических характеристик (определяющего параметра) средства измерений, на основании которого принимается решение о возможности дальнейшей эксплуатации технической системы с метрологическим обеспечением. В подразделе 5.1 представлена трехпараметрическая диффузионная модель отказов измерительной техники, позволяющая адекватно моделировать функцию интенсивности отказов.

В подразделе 5.2 представлена модель эксплуатации компьютерной измерительной системы с цифровой обработкой данных. Основу модели составляют: полумарковская модель эксплуатации аналого-цифрового преобразователя, полумарковская модель эксплуатации компьютера, аналитическая формула для расчета коэффициента готовности компьютерной измерительной системы. Аналитическое выражение для коэффициента готовности компьютерной измерительной системы, включающее как технические характеристики компьютера, так и метрологические и технические характеристики аналого-цифрового преобразователя. Определение оптимального межповерочного интервала необходимого для контроля метрологических характеристик в процессе эксплуатации компьютерной измерительной системы.

В подразделе 5.3 представлена модель дрейфа метрологических характеристик измерительной техники. Проведено исследование одномерной модели в случае, когда в качестве определяющего параметра выбрана погрешность измерений. Представлены результаты моделирования.

В подразделе 5.4 рассматривается задача моделирования и количественной оценки риска на основе применения риск-ориентированного подхода при метрологическом обеспечении парка средств измерений. Разработан алгоритм отнесения средств измерений к разным классам риска, основанный на решении серии оптимизационных задач эксплуатации парка с учетом процессов старения и обновления парка средств измерений. Представлены результаты применения риск-ориентированного подхода в задаче моделирования метрологического обеспечения парка средств измерений.

В подразделе 5.5 описана термодинамико-метрологическая аналогия между функцией распределения температуры в однородном бесконечном стержне и функцией плотности условной вероятности распределения определяющего параметра средства измерений. Проведен сравнительный анализ термодинамической и метрологической модели.

Монография будет полезна для специалистов, руководителей предприятий и ученых, работающих в области обеспечение единства измерений, занимающихся вопросами метрологического обеспечения, аспирантов (научная специальность 2.2.10 «Метрология и метрологическое обеспечение») и студентов, обучающихся по направлению подготовки 27.03.01 «Стандартизация и метрология».