

ББК  
72  
Н 340

# НАУКА ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ

41

## РИМАН

Дифференциальная  
геометрия



Математика  
переходит  
границы

DeAGOSTINI

# **РИМАН**

Дифференциальная геометрия

---

**Математика  
переходит  
границы**

**НАУКА. ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ**

**Наука. Величайшие теории:** выпуск 41: Математика переходит границы. Риман. Дифференциальная геометрия. / Пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2015. — 160 с.

Бернхард Риман — одна из основных фигур научной панорамы середины XIX века. За свою короткую карьеру он внес огромный вклад в различные области математического знания. Он заложил основы дифференциальной геометрии и сформулировал гипотезу, названную его именем и признанную важнейшей нерешенной проблемой современной математики. Его вклад распространяется и на область физики, обрисовывая путь, по которому пошел Эйнштейн, прежде чем открыть общую теорию относительности. Безвременная кончина немецкого мыслителя прервала «исследовательскую программу», глобальной целью которой было понимание устройства Вселенной.

ISSN 2409-0069

552064

© Gustavo Ernesto Piñeiro, 2014 (текст)

© RBA Coleccionables S.A., 2014

© ООО «Де Агостини», 2014–2015



Иллюстрации предоставлены:

A. Carse/ Берлинский университет: 87 (внизу); ConradFehr/  
Прусская академия наук: 134; G.J. Stodart/FergusofGreenock:  
113; G. Rondena: 149 (внизу слева); GoogleBooks: 149  
(внизу слева); JoanPejoan (инфографика); JohanGørbitz/  
InternetArchive: 94; JulesBoilly/Société MontyonetFranklin: 100;  
Lifemagazine: 55 (внизу); Адольф Нейман: 61; Архив RBA: 23,  
25 (вверху слева; вверху справа), 55 (вверху справа), 87 (ввер-  
ху справа), 104, 123 (вверху справа), 144; Архив семьи Томаса  
Шиллинга: 55 (вверху слева), 123 (внизу справа), 149 (вверху  
слева); Балгасар Монкорне/ Нью-Йоркская публичная  
библиотека: 146; Венский университет: 125; Герман Линде/  
Архив семьи Томаса Шиллинга: 149 (вверху справа); Готтлиб  
Бирман/ Гёттингенский университет: 21; Готфрид Кнеллер/  
Национальная портретная галерея: 123 (вверху слева);  
Иоганн Рудольф Хубер/ Базельский университет: 126; Иоганн  
Фридрих Венцель/Прусская академия наук: 87 (вверху  
слева); Лувенский католический университет: 76; Макс Конер/  
Библиотека Берлинского университета имени Гумбольдта: 123  
(внизу слева); Рафаэль/Станцы Рафаэля, Музей Ватикана: 68;  
Рудольф Хоффман/Бернгард Петри: 112; Франс Халс/ Лувр,  
Париж: 56; Фридрих Беземан: 25 (внизу); Якоб Эммануэль  
Хандман/ Базельский художественный музей: 31.

Все права защищены.

Полное или частичное воспроизведение  
без разрешения издателя запрещено.

# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	7
<b>ГЛАВА 1. Риман и топология</b> .....	17
<b>ГЛАВА 2. Форма Вселенной</b> .....	47
<b>ГЛАВА 3. Интеграл Римана</b> .....	81
<b>ГЛАВА 4. Риман и физика</b> .....	109
<b>ГЛАВА 5. Гипотеза Римана</b> .....	131
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	153
<b>УКАЗАТЕЛЬ</b> .....	155

## Введение

Великий математик и физик Бернхард Риман родился в Германии в 1826 году, хотя ради исторической точности правильнее было бы сказать, что его родиной является Ганновер — независимое королевство, которое почти полвека спустя войдет в состав Германской империи. В те времена территории современной Германии переживали период политических потрясений. В 1806 году армия Наполеона завоевала и разрушила Священную Римскую империю — тысячелетнюю конфедерацию суверенных государств, восходящую к правлению Карла Великого (ок. 742–814). После отречения Наполеона от престола в 1814 году разделенные политически, но имеющие одни и те же историю, культуру и язык страны оказались перед необходимостью объединения — хотя общего мнения о его масштабах и структуре власти не было. Спор был долгим, бурным, и лишь в 1871 году, после двух войн, спровоцированных королевством Пруссия, объединение состоялось.

Отец Римана сражался против наполеоновской армии, а по окончании войны, в 1815 году, женился и обосновался в небольшой ганноверской деревне Брезеленц. Французская оккупация нанесла большой урон королевству, и оно пребывало в сложном экономическом положении. Эти обстоятельства повлияли на семью Риманов, которая всегда терпела лишения. Именно поэтому детство Бернхарда и его пяти братьев и сестер

прошло в условиях недоедания и отсутствия должного медицинского ухода, хотя и было исполнено любви, как признавал сам математик. Все биографы единодушны: в полуголодном детстве и заключается наиболее вероятная причина ранней смерти Бернхарда (ему было всего 39), равно как и того, что никто из его братьев и сестер не прожил дольше этого возраста.

Научная карьера Римана продлилась около десяти лет. В 1849 году в Гёттингенском университете он приступил к написанию докторской диссертации под руководством Гаусса, а в конце 1860-х годов увидели свет его последние статьи. Но за столь короткий период Риману удалось оставить значительный след в четырех областях математики — топологии, дифференциальной геометрии, анализе (действительной и комплексной переменных) и арифметике. Большой и очень важный вклад внес он и в область физики, где его работы заложили основы теории относительности и современной космологии; не будет преувеличением сказать, что сегодняшнее понятие пространства-времени берет свое начало в ранних идеях Римана.

На первый взгляд кажется, что работы этого ученого между собой не связаны, поскольку некоторые из них как будто даже относятся к различным разделам математики, а другие и вовсе углубляются в физику. Но это впечатление ложное, поскольку ни наука в целом, ни математика в частности не разделены на изолированные области. Топология, дифференциальная геометрия, анализ и арифметика имеют тесные связи. Насколько родственны математика и физика, биология и химия и другие естественные науки, настолько же эти области знания взаимонакладываются и подпитывают одна другую. Для Римана границы между математикой и физикой практически не существовало.

При этом его научные работы далеко не разрозненны: они отражают различные аспекты того, что условно называется «исследовательской программой Римана», конечной целью которой было понимание «устройства Вселенной». Чтобы рассмотреть эту взаимосвязь, мы обратимся к самым важным работам ученого.

Подобно тому, как глобальная цель руководила мыслью Римана, красной линией сквозь все его статьи проходит понятие *функции*. Для Римана функция — это прежде всего «деформация», которая применяется к поверхности или кривой. Например, если взять сферическую поверхность и деформировать ее до кубической, можно сказать, что к сферической поверхности была применена функция. Если же взять поверхность в форме идеально круглого бублика (в математике эта фигура называется «тор») и растягивать ее, пока внешняя окружность не примет форму эллипса, к ней также будет применена функция. Сходным образом можно деформировать сферическую поверхность, придавив ее и превратив в круг, или скручивать треугольник, пока он не станет похож на винтовую лестницу. Количество возможных деформаций бесконечно.

В докторской диссертации 1851 года, настоящем шедевре математической мысли, Риман анализирует функции, то есть деформации, применимые к любой евклидовой плоскости, которую можно назвать *комплексной*. То есть ранее упомянутый «анализ комплексной переменной» — это изучение функций данного типа.

Но одна из сложностей в этой области математики заключается в том, что наглядно представить деформацию, которая причудливым образом применяется к бесконечной поверхности, очень сложно. Докторская диссертация Римана представляет собой «инструмент», огромное преимущество которого состоит в «визуализации» многих характеристик функций комплексной переменной и, следовательно, в облегчении их сравнения и классификации. Математик стремился связать с каждой функцией поверхность, известную сегодня как *риманова поверхность* функции. Также в диссертации изложена идея, что при изучении поверхностей, соответствующих различным функциям, достаточно ограничиться анализом тех свойств, которые сохраняются, когда поверхность деформируется, как резиновая, если не делать разрезов и не соединять отделенные друг от друга части (технически это *взаимно непрерывные деформации*).

В середине XIX века как область математики топология только зарождалась, она подавала надежды, но была лишена связного *корпуса* успехов. Однако после опубликования диссертации Римана топология перешла именно в сферу изучения свойств, которые сохраняются (они инвариантны) после применения взаимно непрерывных деформаций. И Риман был первым, кто представил топологию как изучение основных свойств функций и связанных с ними поверхностей.

Анализ комплексной переменной и топология — это разные области математики, однако Риман свел топологию к анализу и направил первую на более глубокое изучение последнего:

анализ комплексной переменной  $\leftrightarrow$  топология.

В 1854 году немецкий математик написал очередной шедевр, еще одну очень важную работу (она была опубликована лишь в 1868 году), в которой ввел основные понятия дифференциальной геометрии. Идею этой работы можно сформулировать в виде вопроса: откуда мы знаем, что Земля круглая, а не плоская? Если вдуматься, то большинство экспериментов, позволивших утверждать сферичность Земли, были связаны либо с наблюдениями «отдаления от поверхности» (например, когда корпус отдаляющегося корабля исчезает из поля нашего зрения раньше, чем мачта, или когда во время затмения тень Земли видна на Луне), либо с прохождением большого расстояния по ее поверхности (кругосветное путешествие). Уточненный вопрос будет звучать так: можно ли убедиться в сферичности Земли с помощью «локальных» наблюдений, не предполагающих, чтобы наблюдатель отдалялся от точки наблюдения, и не требующих «отделения» от поверхности планеты? Иначе говоря, будь мы двухмерными существами, ограниченными поверхностью Земли и даже не осознающими понятие «третье измерение», были бы мы способны сделать вывод, что Земля круглая?

Риман наделяет смыслом этот вопрос, привнося новое определение в первую очередь для понятия *измерение*. Почему

мы, например, говорим, что внешняя сторона сферы, или тора, или цилиндра имеет *два* измерения? Прежде всего потому, что каждое положение на плоскости определено двумя координатами (как широта и долгота на карте). Для Римана «математический объект» (точнее, *дифференциальное многообразие*) имеет два измерения, если можно покрыть его маленькими областями плоскости, которые первоначально должны быть деформированы, чтобы приспособиться к изучаемому объекту. Эти области называются *картами*, потому что, как и географические карты, они позволяют обозначить положение любой точки поверхности.

В работе 1854 года Риман дал утвердительный ответ на ранее поставленный вопрос: можно определить кривизну поверхности, действуя локально, «изнутри», не осуществляя наблюдения с внешней стороны и не совершая долгие путешествия. Следует отметить, что деформации, которые применяются к картам, относятся к тому же типу, что и участвующие в определении топологии. И если существует связь между анализом комплексной переменной и топологией, то она также наблюдается и между анализом и дифференциальным многообразием — основным объектом изучения дифференциальной геометрии:

анализ комплексной переменной  $\leftrightarrow$  топология  $\leftrightarrow$   
 $\leftrightarrow$  дифференциальная геометрия.

Но самое экстраординарное в этой работе то, что Риман представил в ней нашу Вселенную как дифференциальное многообразие из трех измерений: шар можно покрыть, например, деформированными круглыми картами, а Вселенную можно заполнить трехмерными шарами (которые в этом случае выполняли бы роль карт). Тогда обретает смысл вопрос: мы живем в «плоской» или в искривленной Вселенной («плоский» здесь — только антоним слова «искривленный»)? Интересно отметить, что эта проблема не была для Римана чисто теоретической, поскольку текстура, кривизна и форма Вселенной напрямую связаны с законами физики. Свет — утверж-