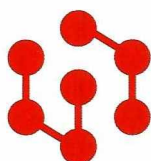
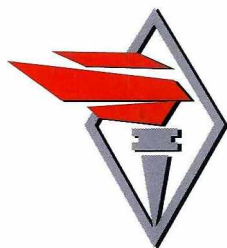

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

*А.В. Литаврин,
Т.В. Моисеевкова*

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

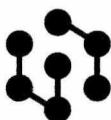


СИБИРСКИЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

SIBERIAN
FEDERAL
UNIVERSITY

ВЫСШЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ

серия основана в 1996 г.



СИБИРСКИЙ
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

SIBERIAN
FEDERAL
UNIVERSITY

А.В. ЛИТАВРИН
Т.В. МОИСЕЕНКОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Москва
ИНФРА-М

Красноярск
СФУ

2024

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143я73

Л64

Рецензенты:

Кравцова О.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2 Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета;

Шевелева И.В., кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики № 2 Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета

Литаврин А.В.

Л64 Линейная алгебра : учебное пособие / А.В. Литаврин, Т.В. Моисеевкова. — Москва : ИНФРА-М ; Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2024. — 241 с. — (Высшее образование).

ISBN 978-5-16-019597-1 (ИНФРА-М)

ISBN 978-5-7638-4604-1 (СФУ)

В учебном пособии изложен теоретический материал по разделам линейной алгебры: «Комплексные числа и многочлены», «Алгебра матриц», «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия». Приведены примеры и задачи с решениями, а также задачи и упражнения для самостоятельной работы.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки 38.03.02 «Менеджмент», 38.05.01 «Экономическая безопасность».

УДК 512.64(075.8)

ББК 22.143я73

555018



ISBN 978-5-16-019597-1 (ИНФРА-М)
ISBN 978-5-7638-4604-1 (СФУ)

© Литаврин А.В.,
Моисеевкова Т.В., 2023
© Сибирский федеральный
университет, 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
1. Множества, отображения, операции, классические алгебраические системы с одной и двумя алгебраическими операциями	5
2. Комплексные числа и многочлены	13
2.1. Алгебра комплексных чисел. Действия с комплексными числами в алгебраической форме	13
2.2. Действия с комплексными числами в тригонометрической и показательной форме. Возведение в степень, извлечение корня из комплексного числа	19
2.3. Алгебра многочленов. Корни многочлена. Разложение многочлена на множители	30
3. Алгебра матриц	42
3.1. Матрицы. Операции над матрицами. Свойства операций	42
3.2. Определители, их свойства	53
3.3. Обратная матрица	64
3.4. Теорема Крамера. Метод Крамера решения квадратных систем линейных уравнений	66
3.5. Примеры применения алгебры матриц в экономике. Модель межотраслевого баланса Леонтьева	73
4. Линейная алгебра	78
4.1. Арифметическое n -мерное пространство. Ранг системы векторов и ранг матрицы	78
4.2. Совместность системы линейных уравнений, теорема Кронекера – Капелли	84
4.3. Метод Гаусса	89
4.4. Подпространства n -мерного арифметического пространства. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений	93
4.5. Векторные (линейные) пространства. Линейная зависимость системы векторов. Базис линейного пространства, разложение вектора по базису	109
4.6. Линейные преобразования линейного пространства	123

4.7. Собственные значения и собственные векторы линейного преобразования	134
4.8. Евклидовы пространства	150
4.9. Квадратичные формы	163
5. Векторная алгебра	173
5.1. Векторы на плоскости и в пространстве. Линейные операции над векторами. Базис, координаты вектора	173
5.2. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их свойства	177
6. Аналитическая геометрия	189
6.1. Прямая на плоскости	189
6.2. Плоскость и прямая в пространстве	198
6.3. Линии второго порядка	212
6.4. Полярная система координат	220
6.5. Поверхности второго порядка	222
6.6. Примеры применения аналитической геометрии в экономике. Линейные модели амортизации и издержек. Законы спроса и предложения	228
Библиографический список.....	238

ВВЕДЕНИЕ

Разделы линейной алгебры активно используются специалистами экономических специальностей. В частности, можно упомянуть модель межотраслевого баланса Леонтьева и приложения линейной алгебры к методам оптимизации, например алгоритму решения оптимизационных задач линейного программирования – симплекс-методу. Системы линейных алгебраических уравнений, изучаемых в рамках дисциплины «Линейная алгебра», делают ее незаменимой в структуре экономического образования.

В пособии представлен необходимый теоретический материал, который предусмотрен программами данной дисциплины и рассмотрены различные задачи для более быстрого и прочного усвоения знаний и применения их практике.

Пособие содержит шесть глав: «Множества, отображения, операции, классические алгебраические системы с одной и двумя алгебраическими операциями», «Комплексные числа и многочлены», «Алгебра матриц», «Линейная алгебра», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия». Первая глава вводная, в ней рассмотрены основные понятия теории множеств и базовые алгебраические структуры. Пять основных глав входят в состав семестрового курса линейной алгебры.

В начале каждой главы кратко и в доступной форме изложен теоретический материал с примерами. Приведены доказательства основных теорем и фактов. Некоторые теоремы и утверждения даны без доказательств, но их можно найти в основных источниках [1, 2, 4, 7, 8]. Рассмотрены не только базовые алгоритмы, используемые при решении стандартных задач, но и нестандартные задачи, позволяющие глубже усвоить материал. В пособии представлены также примеры применения алгебры матриц и аналитической геометрии в экономических задачах такие, как модель межотраслевого баланса Леонтьева, линейная модель амортизации и издержек, линейные законы спроса и предложения. Для закрепления полученных знаний и формирования навыков решения задач в конце каждого параграфа есть примеры для самостоятельной работы, которые позволяют отработать все основные методы и алгоритмы. Количество и разнообразие задач различной сложности дает возможность применять их не только на аудиторных практических занятиях, но и организовать самостоятельную работу студентов.

В основу данного учебного пособия положен курс лекций и практических занятий по дисциплинам «Линейная алгебра», «Алгебра и геометрия», который авторы многие годы читают для студентов различных

укрупненных групп и направлений подготовки.

Надеемся, что пособие будет полезно не только студентам на лекционных и практических аудиторных занятиях, но и всем, кто изучает основы линейной алгебры и аналитической геометрии.

1. Множества, отображения, операции, классические алгебраические системы с одной и двумя алгебраическими операциями

В пособии будем использовать следующие обозначения:

$\Rightarrow$ – если ..., то ...;

$\Leftrightarrow$ – ..., тогда и только тогда ...

Базовым понятием математики является понятие *множества*. Оно постулируется. Естественными примерами множеств выступают числовые множества: $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел, $\mathbb{Q}$ – множество всевозможных рациональных чисел и множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Если M – множество элементов некоторой природы, объект x является элементом множества M , а объект y не является элементом множества M , то имеет место символическая запись:

$$x \in M, \quad y \notin M.$$

Если каждый элемент x множества A является элементом некоторого множества B , то говорят, что A – *подмножество множества B* и пишут

$$A \subseteq B.$$

Если $A \subseteq B$ и существует $y \in B$ такой, что $y \notin A$, то пишут $A \subset B$ и A называют *собственным подмножеством множества B* .

Для приведенных числовых множеств справедливы цепочки включений:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Два множества A и B считаем *равными (одинаковыми)* тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие включения:

$$A \subseteq B, \quad B \subseteq A.$$

Простейший способ задания множества – это *перечисление всех его элементов* (точнее, «имен» этих элементов). Например, список студентов учебной группы. Очевидно, что этим способом можно задать только конечные множества. Например, множество A – всех целых чисел на отрезке $[1, 3]$ конечно, его можно задать перечислением $A = \{1, 2, 3\}$. Множество B – всех рациональных чисел этого отрезка задать перечислением нельзя, так как оно бесконечно.

Общепринятая запись: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ не является определением множества $\mathbb{N}$ с помощью перечисления, но тоже иногда используется для задания множеств.

Рассмотрим способы задания множеств, которые применимы к любым множествам. Множество можно задать с помощью порождающей процедуры, т. е. указать правило, по которому из каких-то объектов строятся элементы данного множества. Например, множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ можно задать с помощью следующей порождающей процедуры:

- 1) $1 \in \mathbb{N}$,
- 2) если $x \in \mathbb{N}$, то $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Еще одним способом задания множеств является задание множества с помощью *характеристического свойства его элементов*. Свойство, которым обладают элементы множества A и только они, называется его *характеристическим свойством*. Более точно этот способ задания можно описать, используя интуитивное понятие «*формы от x* ». Под «*формой от x* » принято понимать конечную последовательность, состоящую из слов и символа x , такую, что если каждое вхождение символа x заменить одним и тем же именем некоторого предмета, то в результате получится истинное или ложное предложение. Например, формами от x будут предложения: «5 делит x », « $5 + x = 10$ ». Напротив, предложения « $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ для всех x » и «существует такое x , что $x > 0$ » не являются формами от x . Форму от x обозначим через $P(x)$.

Любая форма $P(x)$ определяет некоторое множество A , а именно множество тех и только тех предметов a , для которых $P(a)$ – истинное предложение. Запись $A = \{x \mid P(x)\}$ означает, что множество A определяется формой $P(x)$. Например:

- 1) $A = \{x \mid x - \text{целое положительное число, меньшее } 5\} = \{1, 2, 3, 4\}$;
- 2) $A = \{x \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$ – множество четных натуральных чисел.

Прямым (декартовым) произведением заданных множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всевозможных упорядоченных пар (a, b) , где a пробегает все значения A и b пробегает все значения из B , т. е.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Говоря, что пара (a, b) – упорядочена, мы имеем в виду, что пары (a, b) и (b, a) – две различные пары.

Центральным понятием математики является понятие отображения (функции). Дадим определение:

Будем говорить, что задано отображение α с областью определения A и значениями из множества B (отображение множества A в

множество B), если для каждого элемента $x \in A$ однозначно определен элемент $\alpha(x) \in B$, другими словами, если область определения $D(\alpha) = A$, а область значений $E(\alpha) \subseteq B$.

При этом элемент x называется *прообразом* элемента $\alpha(x)$, а элемент $y = \alpha(x)$ называют *образом* элемента x под действием отображения α или α -образом.

Отображение α можно обозначать как $\alpha: A \rightarrow B$. Такое обозначение дает информацию о том, на каком множестве определено отображение и в какое множество отображение α переводит элементы из A .

Существуют различные формы записи отображений. Остановимся на *показательной* и *функциональной* форме записи.

Функциональную форму записи мы использовали в определении отображения: это запись вида $y = \alpha(x)$.

Показательная форма записи. Если определено отображение $\alpha: A \rightarrow B$, то действие α обозначают $y = x^\alpha$, где $y \in B$, y – образ элемента x под действием α .

Интерпретация отображения в терминах множеств. Если определено отображение $\alpha: A \rightarrow B$, то его можно интерпретировать как следующее множество:

$$G_\alpha = \{(a, \alpha(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B.$$

Такая интерпретация дает возможность говорить об отображении как о математическом объекте, представленном некоторым множеством объектов. При этом множество G_α обычно называют графиком отображения α или используют в качестве определения отображения α . В самом деле, если задать α , то однозначно можно определить множество G_α , а если задать G_α , то однозначно определяется отображение α . Последнее утверждение вытекает из того, что для любого $a \in A$ множество G_α содержит единственную пару (a, x) с первой компонентой, равной элементу a (необходимо, для того чтобы у всякого элемента из A был ровно один образ в B под действием α).

Отображение $\alpha: A \rightarrow B$ называется *сюръекцией* или *отображением множества A на множество B* , если $E(\alpha) = B$.

Отображение $\alpha: A \rightarrow B$ называется *инъекцией* или *взаимно однозначным отображением*, если из $\alpha(x_1) = y$ и $\alpha(x_2) = y \Rightarrow x_1 = x_2$.

Отображение $\alpha: A \rightarrow B$, являющееся сюръекцией и инъекцией одновременно, называется *биекцией* или *взаимно однозначным отображением множества A на множество B* .

Пример 1.0.1. Рассмотрим три отображения $\alpha_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$:

- 1) $\alpha_1(x) = e^x$ – инъекция, но не сюръекция;
- 2) $\alpha_2(x) = x^3 - x$ – сюръекция, но не инъекция;
- 3) $\alpha_3(x) = 3x - 2$ – биекция.

В контексте алгебры понятие отображения приводит к понятию операции. Далее будем рассматривать только бинарные операции (операции на двух элементах). Пусть A, B, C – три некоторых множества (природа элементов значения не имеет) и $A \times B$ – прямое произведение множеств A и B . Полагаем, что заданно отображение $\alpha: A \times B \rightarrow C$. Такое отображение можно интерпретировать как некоторую бинарную операцию $(\circ)$, которая действует на парах (a, b) из $A \times B$. При этом возникает своя традиция записи результата действия этой операции:

$$\alpha((a, b)) = a \circ b.$$

Таким образом, *бинарную операцию* на элементах из $A \times B$ и значениями в множестве C можно определить как отображение пар из $A \times B$ в множество C (важно подчеркнуть, что бинарная операция определена на всех парах из $A \times B$). *Бинарной алгебраической операцией* называется операция $(\circ)$, для которой все три множества A, B и C равны, т.е. $A = B = C = P$. Тогда говорят, что на множестве P определена бинарная алгебраическая операция $(\circ)$.

Рассмотрим примеры бинарных алгебраических операций:

- 1) $(\circ) = (+)$ – обычное сложение двух чисел;
- 2) $(\circ) = (-)$ – обычная разность двух чисел;
- 3) $(\circ) = (\cdot)$ – обычное произведение двух чисел.

В рамках данного курса будут введены и другие алгебраические (и не только) операции. Так, будет изучаться сложение и умножение комплексных чисел, сложение матриц, произведение матриц (в некоторых случаях можно рассмотреть как алгебраическую операцию) и др.. Примером часто используемой не алгебраической бинарной операции будет являться операция умножения матрицы (или абстрактного вектора) на скаляр.

Бинарные операции могут удовлетворять некоторым аксиомам или, по другому, обладать некоторыми свойствами. Пусть на множестве P (считаем, что множество P не пусто) определена бинарная алгебраическая операция $(\circ)$. Тогда выделяют нижеприведенные классические свойства:

А1. *Коммутативность*. Для любых $a, b \in P$ выполняется равенство $a \circ b = b \circ a$.

А2. Ассоциативность. Для любых $a, b, c \in P$ выполняется равенство $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$.

А3. Существование нейтрального элемента. Существует элемент $e \in P$ такой, что для любого $a \in P$ выполняется равенство $e \circ a = a \circ e = a$.

А4. Существование противоположного (обратного) элемента. Для любого элемента $a \in P$ существует элемент $d_a \in P$ такой, что выполняются равенства $d_a \circ a = a \circ d_a = e$.

Пример 1.0.2. На множестве $\mathbb{Z}$ рассмотрим операцию $(\circ)$, заданную равенством $x \circ y = x + y + 1$, где $(+)$ – обычное сложение двух чисел.

Данная операция коммутативна. В самом деле,

$$x \circ y = x + y + 1 = y + x + 1 = y \circ x.$$

Проверим ассоциативность:

$$(x \circ y) \circ z = (x + y + 1) + z + 1 = x + y + z + 2;$$

$$x \circ (y \circ z) = x + (y + z + 1) + 1 = x + y + z + 2.$$

Таким образом, данная операция ассоциативна.

Проверим существование нейтрального элемента. Пусть e – нейтральный элемент, следовательно, $e \circ x = x$ для всякого $x \in \mathbb{Z}$. Получаем $e \circ x = e + x + 1 = x$, значит, $e = -1$. Таким образом, нейтральный элемент существует.

Проверим существование противоположного элемента. Зафиксируем произвольный x из $\mathbb{Z}$, полагаем, что d_x – противоположный элемент. Тогда справедливы равенства

$$-1 = e = d_x \circ x = d_x + x + 1 \Rightarrow d_x = -2 - x.$$

Таким образом, $d_x = -2 - x$ – противоположный элемент для произвольного элемента x . Мы показали, что операция $(\circ)$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ обладает свойствами А1 – А4.

Нужно отметить, что при рассмотрении данной операции $(\circ)$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ свойства А3 и А4 выполняются не будут. В самом деле, $-1, -2 - x \notin \mathbb{N}$ при любом $x \in \mathbb{N}$.

Отметим, что многие математические объекты можно сформулировать с помощью конструкции, которую называют *кортежем*. Кортеж – это некоторый упорядоченный набор элементов произвольной природы. В частности, пары $(a, b) \in A \times B$ можно интерпретировать как кортежи длины 2.