

ББК  
72  
Н 340

# НАУКА ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ

## КАНТОР

Бесконечность  
в математике

30



Бесчисленное поддается  
подсчету

DeAGOSTINI

# КАНТОР

Бесконечность в математике

---

**Бесчисленное  
поддается  
подсчету**

**Наука. Величайшие теории:** выпуск 30: Бесчисленное поддается подсчету. Кантор. Бесконечность в математике. / Пер. с итал. — М.: Де Агостини, 2015. — 168 с.

Георг Кантор первым среди ученых начал с математической точностью исследовать бесконечность, представлявшую философский интерес. Его новаторский подход к математике воплотился в теории множеств, он сформулировал противоречащие интуиции понятия разных видов бесконечного. До работ, которые были изданы ученым в конце XIX века и стали фундаментальным вкладом в науку, бесконечность, следуя восходившей к Аристотелю научной традиции, понималась как полезная условность. Смелость Кантора стоила ему дорого: его идеи были жестко отвергнуты многими современниками, что, вероятно, послужило причиной его душевной болезни и преждевременной кончины.

552053

ISSN 2409-0069

© Gustavo Ernesto Piñeiro, 2012 (текст)

© RBA Coleccionables S.A., 2012

© ООО «Де Агостини», 2014–2015



Иллюстрации предоставлены:

Accademia delle Scienze di Berlino: 43bd; Album: 43bi; Archivio RBA: 21ai, 31, 43ad, 77ai, 77ad, 77bi, 77bd, 80, 96, 108, 121ad, 121bd, 151, 159, 167; Biblioteca Nazionale di Francia: 121bi; Archivio di Famiglia Thomas Schilling: 105; Museo Herzog Anton Ulrich: 102; Integrierte Gesamtschule Halle: 161a, 161b; Andrew Krizhanovsky: 21ad; Museo della Città di Berlino: 21b; Università di Agder, Норвегия: 100; Università di Amburgo: 43ai; Università di Münster: 121ai; Joan Pejoan.

Все права защищены.

Полное или частичное воспроизведение  
без разрешения издателя запрещено.

# Содержание

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	7
<b>ГЛАВА 1.</b> Где начинается бесконечность .....	15
<b>ГЛАВА 2.</b> Кардинальные числа .....	33
<b>ГЛАВА 3.</b> Исчисление и бесконечность .....	57
<b>ГЛАВА 4.</b> Бесконечные ординальные числа .....	87
<b>ГЛАВА 5.</b> Алефы .....	113
<b>ГЛАВА 6.</b> Парадоксы бесконечности .....	137
<b>СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	163
<b>УКАЗАТЕЛЬ</b> .....	165

## Введение

Когда в звездную безлунную ночь вдали от городских огней мы любуемся восхитительным зрелищем, в глубине души рождается тревожное чувство: насколько же мала наша планета в сравнении с бесконечностью!

Бесконечность — не только сложное математическое понятие. Дуализм бесконечного — того, что буквально «не имеет конца», — и его противоположности, конечного — того, что рано или поздно заканчивается, — вероятно, сопровождал человечество с тех самых пор, когда первый *Homo sapiens* задумался, есть ли предел у неба, можно ли достичь горизонта, действительно ли заканчивается наша жизнь или каким-то образом непрерывно продолжается.

Но бесконечность также способна вызывать головокружение и, согласно древнегреческому философу Зенону Элейскому, парализовать всю Вселенную. В VI веке до н.э. Парменид Элейский — некоторые историки считают его отцом западной метафизики — постулировал существование бытия, главная характеристика которого сводится к тому, что оно существует. Бытие существует, оно есть.

Отталкиваясь от этого, Парменид заключил, что бытие вмещает в себя весь мир, ибо будь в нем некий участок, где его нет, это означало бы, что бытия в нем не существует. Это является терминологическим противоречием, то есть такое невозможно. Следовательно, бытие вмещает в себя всю Вселенную. Другими



словами, вся она, включая нас, составляет бытие. Бытие неизменно, оно не может меняться. Предположим, что оно перешло из состояния *A* в состояние *B*. В таком случае оно перестало существовать в состоянии *A*, а это невозможно, потому что бытие не может прекратить свое существование. Следовательно, бытие и вся Вселенная неизменны. Это означает, что хотя, как нам кажется, мы наблюдаем изменения и движение, на самом деле их не существует. Даже времени не существует: у бытия нет ни прошлого, ни будущего — только настоящее.

Ученик Парменида Зенон выдвинул целый ряд заключений, парадоксов. Как и его учитель, он утверждал: изменений и движения не существует. То, что мы видим, — заблуждение, в которое нас вводят органы чувств, а разум и логика в состоянии это доказать.

Во всех парадоксах Зенона так или иначе присутствует понятие бесконечности. В одном из них утверждается, что если мы бросим камень в дерево, растущее в одном метре от нас, вопреки увиденному камень никогда не попадет в него, более того, он так и останется у нас в руке.

Зенон рассуждал следующим образом: чтобы долететь до дерева, камень должен преодолеть расстояние в полметра, а до этого — четверть метра, а еще раньше — восьмую часть метра, шестнадцатую и так далее. Чтобы угодить в дерево, камню придется совершить бесконечное число переходов. Но невозможно выполнить бесконечное количество движений за конечное время. Поэтому, заключает Зенон, камень никогда не коснется дерева. Эти же рассуждения справедливы и для миллиметрового масштаба, и для тысячной доли миллиметра. Действительно, получается, что камень никогда не отделится от нашей руки. Таким образом, по Зенону, бесконечное позволяет показать, что Вселенная неизменна.

В IV веке до н.э. Аристотель, заложивший основы систематического изучения логики и науки в целом, написал трактат «Физика». Среди прочих вопросов в нем исследовалось и движение тел. Но сначала Аристотелю предстояло доказать, что движение вообще существует в действительности, а значит, опровергнуть доводы Парменида и Зенона.

Если бытие не может не существовать, то как оно способно изменять свое состояние, переставать быть? Аристотель говорит, что оно есть, но иногда оно состоит в потенции, а иногда — в действии. Когда ребенок вырастает и оказывается взрослым, он не перестает быть ребенком, ребенок — это взрослый в потенции, который становится взрослым в действии. Ребенок изменился, но не прекратил существовать. Зерно — это растение в потенции, белый лист — текст в потенции и так далее. Несколько веков спустя Микеланджело Буонаротти высказал похожую мысль: в глыбе мрамора уже содержится скульптура, и нужно только отсечь все лишнее. Так Аристотель совместил представление Парменида о бытии с возможностью изменения.

После того как было доказано, что бытие способно изменяться, как можно опровергнуть аргументы Зенона? Во всех его парадоксах предполагается, что пространство и время бесконечно делимы. В примере с деревом между деревом и рукой имеется бесконечное количество переходов. Тогда Аристотель сказал, что бесконечности не существует. Точнее, она существует только в потенции и никогда — в действии. Идея бесконечности в потенции подразумевает, что некое количество может возрасти сколько угодно, но все равно в итоге будет конечным, идея бесконечности в действии — что это количество на самом деле бесконечно. Это различие очень важное, и мы еще к нему вернемся. По Аристотелю, можно допустить наличие количества, которое возрастает неопределенным образом, но всегда будет конечным, однако нельзя принять идею действительно бесконечного количества. Допустимо разделить расстояние между рукой и деревом на десять, сто, тысячу частей или на любое конечное количество каких угодно единиц измерения, но нельзя утверждать, что оно делится на действительно бесконечное количество фрагментов.

Аристотель не ограничился постулированием несуществования актуальной бесконечности, он привел несколько аргументов в поддержку этого тезиса, которые мы рассмотрим далее. Тем не менее необходимо сказать, что аристотелевское отрицание актуальной бесконечности оказывало влияние на европейскую философию на протяжении двух тысячелетий.

Помимо силы доводов столь длительное господство его идеи объясняется двумя причинами.

Прежде всего, человеческий разум не в состоянии представить себе актуальную бесконечность, поэтому нам проще принять то, что на самом деле ее не существует. Мы скорее представим потенциальную бесконечность — количество, которое бесконечно возрастает, — но не актуальную бесконечность. Как выглядела бы, например, прямая действительно бесконечной длины? Нужно представить себе линию целиком (то есть то, что мы «видим» в воображении, не должно быть отрезком прямой), но при этом бесконечную. Однако наш разум неспособен создать такой образ. Мы можем представить линию, которая уходит за горизонт, и сказать, что она продолжается до бесконечности, но в таком случае мы «видим» прямую с длиной, «бесконечной в потенции», так как наше зрение охватывает только ее часть. Или же возьмем числа 0, 1, 2, 3, 4, 5 и так далее. Представить этот ряд как действительно бесконечный значило бы представить все числа без исключений в одном списке, но при этом этот список не должен кончаться. Нашему разуму это не под силу.

Вторая причина, по которой аристотелевский подход к бесконечности имел такой успех, состоит в том, что, рассуждая о бесконечности как о реальности, нельзя не столкнуться с логическими противоречиями или прийти к странным выводам — как Зенон, заключивший, что изменений и движения не существует. Еще один пример относится к XVII веку, когда перед Галилео Галилеем возникли противоречия, впоследствии приведшие его к отрицанию актуальной бесконечности. В XIX веке чешский математик Бернارد Больцано попытался развить теорию математической бесконечности, но и он обнаружил парадоксы, для которых не смог найти удовлетворительного решения. Далее мы разберем оба случая.

Не все соглашались с идеей Аристотеля. Так, в I веке римский философ и поэт Лукреций в своей учебной поэме *De rerum natura* («О природе вещей») провозгласил, что Вселенная бесконечна. В противном случае, отмечал он, у нее была бы граница, и если мы бросим камень с силой, достаточной, чтобы он



пролетел через нее, то камень будет существовать уже вне Вселенной. А это невозможно, так как ничто не существует за ее пределами по определению. Сегодня мы знаем, что аргументация Лукреция ошибочна и Вселенная может быть конечной, не имея при этом границы, как поверхность шара — конечная, но без предела. Согласно современным космологическим теориям, вполне вероятно, что Вселенная конечна. Тем не менее возражения Аристотелю были редки, и, как уже было сказано, его идеи господствовали в философии и математике примерно до 1870 года. Тогда русско-немецкий математик Георг Кантор, как он сам признавал, фактически против воли следуя логике собственных исследований, ввел в математику изучение актуальной бесконечности. Задача была непростой, не столько из-за сложности, сколько из-за резкого неприятия ее многими коллегами. Речь шла о нарушении тысячелетней традиции. Ученого даже называли «шарлатаном» и «развратителем молодежи».

Однако Кантора это не остановило: он был убежден в вероятности и даже необходимости создания математической теории бесконечности. Благодаря своей непреклонной логике он развил одну из самых удивительных на сегодняшний день теорий и использовал новый подход к математике — более свободный и дающий множество возможностей. Одной из самых оригинальных концепций Кантора стали ординалы — числа, позволяющие вести исчисление за пределами бесконечности. После бесконечного ряда чисел  $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ , по утверждению Кантора, следует трансфинитное (то есть ординальное) число  $\omega$ . Затем идут  $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots$ , а после этого ряда  $\omega + \omega + 1, \omega + \omega + 2, \dots$  и так далее.

Но правильно ли «изобретать» эти числа таким произвольным способом? Что обозначает число  $\omega$ ? До XIX века все понятия, которыми оперировали математики, были тесно связаны с более или менее конкретными задачами, с ситуациями, представляемыми или связанными с реальностью. Например, описание физических явлений, изучение свойств геометрических объектов или конечных рядов чисел  $(1, 2, 3, 4, \dots)$ . Так,  $0$ , обозначающий «количество, которого нет», не сразу был признан

полноценным числом, на это ушло несколько столетий. То же самое и с отрицательными числами: еще в XVIII веке Лейбниц не считал их существующими. В целом числа признавались, только если они так или иначе обозначали некое количество, которое можно зрительно представить.

Число  $\omega$  обозначает актуально бесконечное количество; ни один предмет, ни одно физическое явление не поможет представить его, оно есть только в нашем сознании. Тем не менее Кантор со своими строго логическими рассуждениями «заставил» нас принять его за существующее, для чего ученому пришлось изменить подход к математике. Сегодня к математическим концепциям больше не предъявляются требования соответствовать реальности или представлять конкретное явление. Они только должны быть логически последовательными. За исключением этого ограничения, математики абсолютно вольны создавать, исследовать, анализировать, играть с понятиями, идеями и теориями.

После Кантора сущность математики изменилась, и он с большим удовлетворением принял бы нынешнее положение вещей — когда ученые могут свободно выдвигать теории и концепции. Ведь он утверждал, что чистая математика должна называться свободной. Говоря его словами, «сущность математики — в ее свободе».

- 1845** 3 марта в Санкт-Петербурге у Георга Вальдемара Кантора и Марии Анны Бойм рождается сын Георг Фердинанд Людвиг Филипп Кантор.
- 1856** Семья переезжает в Германию.
- 1862** Георг хочет изучать математику, но отец противится желанию сына, и юноша поступает на инженерный факультет Высшей технической школы в Цюрихе. Несколько месяцев спустя отец все-таки разрешает ему заниматься математикой в том же учебном заведении.
- 1863** Умирает отец Кантора. Семья переезжает в Берлин, где юный Георг завершает свое математическое образование.
- 1867** Получает докторскую степень в Берлинском университете.
- 1869** Кантор поступает на работу в Галльский университет.
- 1872** Знакомится с Рихардом Дедекиндом. Многие идеи о бесконечности будут впервые высказаны Кантором в письмах Дедекинду.
- 1874** Кантор женится на Валли Гутман; у них будет шестеро детей. В том же году он публикует статью *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* («Об одном свойстве совокупности всех действительных алгебраических чисел»), в которой впервые появляются его идеи о бесконечности, хотя по совету Карла Вейерштрасса он и завуалировал их.
- 1878** Кантор публикует *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre* («К учению о многообразиях»), где открыто излагает свои идеи о бесконечности. Леопольд Кронекер использует все свое влияние, чтобы воспрепятствовать изданию статьи.
- 1883** Выходит в свет работа *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* («Основы общего учения о многообразиях»), апогей математического творчества Кантора.
- 1884** В мае у Кантора случается приступ депрессии. Он полностью оставляет занятия математикой более чем на пять лет.
- 1890** Создается *Deutsche Mathematiker Vereinigung* («Немецкое математическое общество»), и Кантор становится его первым президентом.
- 1892** Кантор публикует работу *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre* («Об одном элементарном вопросе учения о многообразиях»), в которой представлен его знаменитый диагональный метод.
- 1895** Выходит в свет первая часть *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* («К обоснованию учения о трансфинитных множествах»); вторая часть будет опубликована в 1897 году.
- 1899** 16 декабря умирает 13-летний сын Кантора. У ученого начинается душевное расстройство, от которого он так и не оправится до конца жизни.
- 1918** 6 января Кантор умирает в психиатрической лечебнице в Галле.