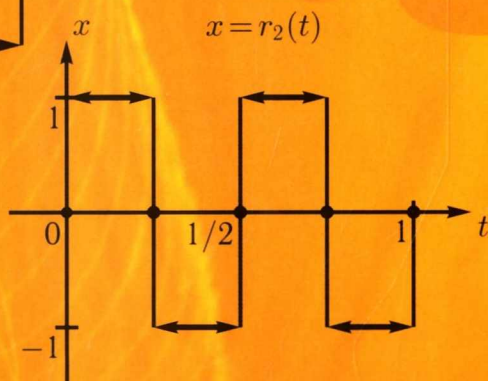
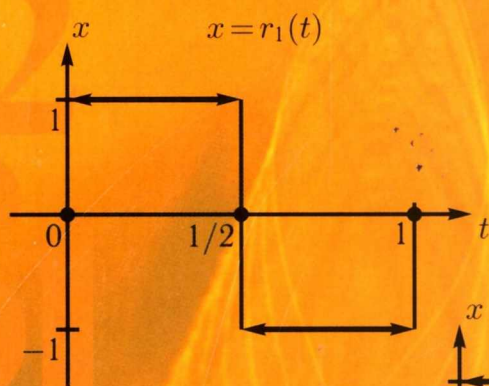


ББК
22.16
А 910

С. В. АСТАШКИН

СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ



Библиотеке СФУ

в дар

От автора в надежде,
что книга станет хорошим
помощником в работе
студентов и преподавателей.

14.08.25

С.А.Ан

Научная библиотека СФУ



A1454629B

С. В. АСТАШКИН

**СИСТЕМА
РАДЕМАХЕРА
В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2017

УДК 517.982.27
ББК 22.317
А 91



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 16-11-00084,
не подлежит продаже*

Асташкин С. В. **Система Радемахера в функциональных пространствах.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 552 с. — ISBN 978-5-9221-1703-6.

В книге дано систематическое изложение свойств системы Радемахера с точки зрения теории функций и функционального анализа. Наряду с классическими вопросами, в ней представлены результаты последних десятилетий, в особенности относящиеся к взаимосвязи свойств этой системы с геометрией содержащих ее функциональных пространств.

Книга предназначена научным работникам, специализирующимся в области функционального анализа и теории функций, а также студентам старших курсов и аспирантам математических факультетов университетов.

553 813



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	10
Обозначения	16
 Глава 1. Функции Радемахера в L_p-пространствах	21
§ 1.1. Определение и простейшие свойства	21
§ 1.2. Сходимость рядов Радемахера п. в.	24
§ 1.3. Неравенство Хинчина и экспоненциальная оценка распределений	27
§ 1.4. Неравенство Пэли–Зигмунда	33
§ 1.5. K -функционал в паре (ℓ_1, ℓ_2)	35
§ 1.6. Неравенства Хитченко и Монгмери–Смита	41
Комментарии и литературные указания	45
 Глава 2. Система Радемахера в симметричных пространствах, «далеких» от L_∞	48
§ 2.1. Радемахеровское подпространство с. п.	48
§ 2.2. Экспоненциальная суммируемость рядов по системе Радемахера. Теорема Родина–Семёнова	52
§ 2.3. Эквивалентность системы Радемахера каноническому базису ℓ_1	59
§ 2.4. Дополняемость $\mathcal{R}(X)$ в с. п.	60
Комментарии и литературные указания	65
 Глава 3. Система Радемахера в симметричных пространствах, «близких» к L_∞	67
§ 3.1. Описание подпространства, порожденного системой Радемахера	67
§ 3.2. С. п. с одним и тем же радемахеровским подпространством: интерполяционный случай	72
§ 3.3. С. п. с одним и тем же радемахеровским подпространством: общий случай	82
§ 3.4. Примеры радемахеровских подпространств с. п.	88
§ 3.5. Функции Радемахера и конусы ступенчатых функций	94
Комментарии и литературные указания	106

Глава 4. Суммы Радемахера с векторными коэффициентами	108
§ 4.1. Неравенство Кахана–Хинчина и его следствия	108
§ 4.2. Оценки распределений отклонений норм сумм Радемахера	115
§ 4.3. Неравенства типа Монтгомери–Смита и Хитченко для векторнозначных сумм Радемахера	120
§ 4.4. Векторнозначные суммы Радемахера в экспоненциальных пространствах Орлича	128
§ 4.5. Сравнение распределений векторнозначных рядов Радемахера с их «слабыми» аналогами.	129
§ 4.6. Подпространство с. п. на квадрате, порожденное суммами Радемахера с векторными коэффициентами.	135
Комментарии и литературные указания	147
Глава 5. Оптимальные константы в неравенствах Хинчина и Кахана–Хинчина	149
§ 5.1. Мажоризация и вогнутость по Шуру	149
§ 5.2. Гипотеза Литлвуда. Сравнение L_1 - и L_2 -норм сумм Радемахера	155
§ 5.3. Вычисление константы $K_{2,4}$	158
§ 5.4. Значения констант $K_{p,q}^{\mathbb{R}}$ при четных p и q	164
§ 5.5. Асимптотическое равенство оптимальных «скалярных» и «векторных» констант	166
§ 5.6. Оптимальная константа в неравенстве Хинчина для пространства Орлича L_{N_2}	170
Комментарии и литературные указания	171
Глава 6. Хаос Радемахера в симметричных пространствах	174
§ 6.1. Определение хаоса Радемахера и сходимость п. в. рядов по этой системе	174
§ 6.2. Хаос Радемахера как базисная последовательность	179
§ 6.3. Безусловность хаоса Радемахера в с. п.	181
§ 6.4. Дополняемость подпространства, порожденного хаосом Радемахера	202
Комментарии и литературные указания	205
Глава 7. Сравнение систем с. в.	208
§ 7.1. Принцип сжатия для последовательности Радемахера и его следствия	209
§ 7.2. Принцип сравнения функций распределения с. в.	214
§ 7.3. Сравнение систем с. в. с последовательностью функций Радемахера: скалярный случай	217
§ 7.4. Сравнение систем с. в. с последовательностью функций Радемахера: векторный случай	224

§ 7.5. Мультипликативные системы с. в.	226
§ 7.6. Последовательности характеров на компактной абелевой группе	230
Комментарии и литературные указания	234
Глава 8. Выделение лакунарных подсистем.	236
§ 8.1. Подсистемы, мажорируемые по распределению последовательностью Радемахера	236
§ 8.2. Выделение подсистем, эквивалентных по распределению последовательности Радемахера	241
§ 8.3. Плотность подсистем, эквивалентных по распределению набором функций Радемахера	252
§ 8.4. Выделение подсистем с «субрадемахеровскими» L_p -нормами полиномов	263
Комментарии и литературные указания	266
Глава 9. Экстремальные свойства системы Радемахера	269
§ 9.1. Система Радемахера и упорядоченность Харди–Литлвуда	269
§ 9.2. Модулярные неравенства для сумм независимых симметрично распределенных с. в.	274
§ 9.3. Экстремальность последовательности Радемахера в классе равномерно ограниченных систем	278
§ 9.4. Одна экстремальная задача	286
Комментарии и литературные указания	293
Глава 10. Процесс Бернулли	295
§ 10.1. Принцип сжатия для процесса Бернулли	295
§ 10.2. Минорантная оценка типа Судакова	298
§ 10.3. Гипотеза Бернулли	302
§ 10.4. L -регулярность сумм Радемахера и теорема о сравнении распределений случайных векторов	305
§ 10.5. О связи между сравнениями систем с. в. с последовательностью Радемахера в скалярном и в векторном смысле	309
Комментарии и литературные указания	311
Глава 11. Пространство мультипликаторов, порожденное системой Радемахера	313
§ 11.1. Определение и свойства пространства $\mathcal{M}(X)$	314
§ 11.2. Симметричное ядро пространства мультипликаторов	320
§ 11.3. Описание с. п. X , для которых $\mathcal{M}(X) = L_\infty$	332

§ 11.4. Пространства X с симметричным пространством $\mathcal{M}(X)$, отличным от L_∞	341
§ 11.5. «Хвостовое» пространство мультипликаторов	360
Комментарии и литературные указания	377
Глава 12. Варианты неравенства Хинчина	379
§ 12.1. Локальное неравенство Хинчина в классе с.п.	380
§ 12.2. Нижняя локальная L_2 -оценка для сумм Радемахера	389
§ 12.3. Весовое неравенство Хинчина	394
§ 12.4. Варианты L_1 -неравенства Хинчина	403
Комментарии и литературные указания	414
Глава 13. Мартингалные преобразования последовательности Радемахера в с.п.	416
§ 13.1. Мартингалные преобразования и система Хаара	418
§ 13.2. Мартингалные преобразования, порожденные моментом остан- новки	419
§ 13.3. Ряды Радемахера с независимыми коэффициентами	425
§ 13.4. Мартингалные преобразования, порожденные линейными комби- нациями функций Радемахера	429
Комментарии и литературные указания	434
Глава 14. Функции Радемахера в пространствах BMO и Пэли	436
§ 14.1. Определение и свойства BMO -пространств	436
§ 14.2. Суммы Радемахера в BMO -пространствах	439
§ 14.3. О дополняемости радемахеровских подпространств в простран- ствах BMO_d и BMO	443
§ 14.4. Структура радемахеровского подпространства в BMO	446
§ 14.5. Определение и свойства пространств Пэли	452
§ 14.6. Радемахеровские проекции в пространствах Пэли	455
§ 14.7. Подпара банаховой пары $(L_\infty, \mathcal{P}(L_\infty))$, порожденная системой Радемахера	461
Комментарии и литературные указания	462
Глава 15. Функции Радемахера в пространствах Чезаро	464
§ 15.1. Определение пространств Чезаро	464
§ 15.2. Суммы Радемахера в пространствах Чезаро	467
§ 15.3. Дополняемость радемахеровских подпространств в пространствах Чезаро	473
§ 15.4. Структура радемахеровского подпространства в пространстве K_q	477
Комментарии и литературные указания	485

Глава 16. Функции Радемахера в пространствах Морри	486
§ 16.1. Предварительные сведения о пространствах Морри	486
§ 16.2. Суммы Радемахера в пространствах Морри	489
§ 16.3. Дополняемость радемахеровского подпространства в $M_{w,p}$, $p > 1$	493
§ 16.4. Радемахеровское подпространство пространства $M_{w,1}$	496
§ 16.5. Структура радемахеровских подпространств в пространствах Морри	502
Комментарии и литературные указания	507
Приложение А. Несколько понятий и результатов из теории вероятностей	509
Приложение Б. Базисные последовательности и лакунарные системы	512
Приложение В. Банаховы функциональные решетки и симметричные пространства	519
Приложение Г. Интерполяция операторов и пространства вещественного метода	528
Список литературы	534
Предметный указатель	547

ПРЕДИСЛОВИЕ

— Что толку в книжке, — подумала Алиса, — если в ней нет ни картинок, ни разговоров? ¹⁾

Всё возрастающее многообразие направлений и течений в математике приводит к появлению множества статей и монографий, посвященных специальным вопросам и содержащих результаты с достаточно ограниченной сферой применения. По этой причине все более важное значение приобретают те «сквозные» понятия, методы и идеи, которые связывают различные области математики, обеспечивая тем самым ее единство. Одним из таких объединяющих понятий (и одновременно методов), несомненно, является система Радемахера или, иначе, последовательность Бернулли независимых одинаково и симметрично распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1 . Появившись впервые в 1922 г. в работе [228] немецкого математика Ганса Радемахера (Hans Rademacher, 1892–1969), она стала классическим объектом теории ортогональных рядов и теории вероятностей с многочисленными приложениями как внутри этих разделов математики, так и в ряде других смежных, прежде всего, в геометрической теории банаховых пространств, теории операторов, гармоническом анализе, математической статистике и теории чисел.

Практически сразу же после своего открытия система Радемахера стала применяться при изучении геометрических свойств функциональных пространств. Уже в 1923 г. А. Я. Хинчиным [175] было доказано знаменитое неравенство, согласно которому во всех L_p -пространствах с конечным p она порождает гильбертово подпространство. Этот ключевой факт оказался отправным пунктом для дальнейших плодотворных исследований, приведя к введению понятий типа и котипа (Радемахера) банахова пространства, отражающих зависимость между его геометрическими и вероятностными свойствами. Появившись неявно еще в 30-е гг. XX в. в работах В. Орлича, они были формализованы гораздо позднее Й. Хоффманом-Йорнгенсеном, Б. Морэ и Г. Пизье. Особенно важную роль играют функции Радемахера при изучении решетчатых и симметричных структур в банаховых пространствах, что

¹⁾ *Кэрролл Л.* Приключения Алисы в Стране Чудес / Пер. с англ. Н. Демуровой. — М.: Пресса, 1992.

в полной мере продемонстрировали глубокие результаты, полученные У. Джонсоном, Б. Морэ, Г. Шехтманом и Л. Цаффри в [169].

Не являясь основным объектом исследования, функции Радемахера присутствуют во многих монографиях, посвященных как теории функций и ортогональным рядам, так и вероятностным вопросам. Из отечественной литературы назовем книги Б. И. Голубова, А. В. Ефимова и В. А. Скворцова [49], Б. С. Кашина и А. А. Саакяна [49], а также обзоры В. Ф. Гапошкина [46] и Г. Пешкира и А. Н. Ширяева [76], опубликованные в журнале «Успехи математических наук». Из англоязычной литературы наиболее близкой по тематике к этой книге является монография Р. Блея [127], где система Радемахера играет центральную роль в изучении многих вопросов, связанных с гармоническим анализом и теорией вероятностей, становясь основным инструментом, позволяющим автору ввести важное понятие комбинаторной размерности. В то же время во всех упомянутых монографиях и обзорах речь идет по существу лишь о некоторых свойствах системы (чаще всего связанных с классическим неравенством Хинчина). Данная книга, насколько нам известно, является первой попыткой сделать систему Радемахера «главным действующим лицом истории». Основная ее цель состоит в том, чтобы изложить ряд недавних, на наш взгляд, существенных и красивых результатов, относящихся к этой системе. Так как большая часть содержания книги появлялась ранее лишь в разрозненных журнальных статьях, она имеет не так много пересечений с ранее упомянутыми трудами. Вместе с тем в ней будет дано (и также впервые) систематическое изложение свойств системы Радемахера, прежде всего, с точки зрения теории функций и функционального анализа.

Структура книги подчинена ее основной идее — показать взаимосвязь свойств системы Радемахера с геометрией содержащих ее функциональных пространств. Условно говоря, она состоит из трех частей, в которых система Радемахера изучается соответственно в L_p -пространствах, в общих симметричных пространствах и в некоторых классах не симметричных пространств (ВМО, Пэли, Чезаро, Морри). Хотя это первая большая книга, посвященная системе Радемахера, главная задача, которую мы перед собой ставим, состоит не в том, чтобы дать полное представление об этой системе (что невозможно), а в том, чтобы заинтересовать читателя. Поэтому с точки зрения методики изложения абстрактности предпочитают наглядность и ясность, все основные результаты снабжены подробными доказательствами и по возможности мы приводим содержательные примеры, иллюстрирующие теорию.

Хотя книга ни в коей мере не является «энциклопедией по системе Радемахера», ее основная тема — свойства этой системы в различных функциональных пространствах — представлена достаточно полно. В особенности это относится к симметричным (перестановочно инвариантным) пространствам. Если не считать классических результатов для L_p -пространств, таких, как неравенство Хинчина, то начало изучению