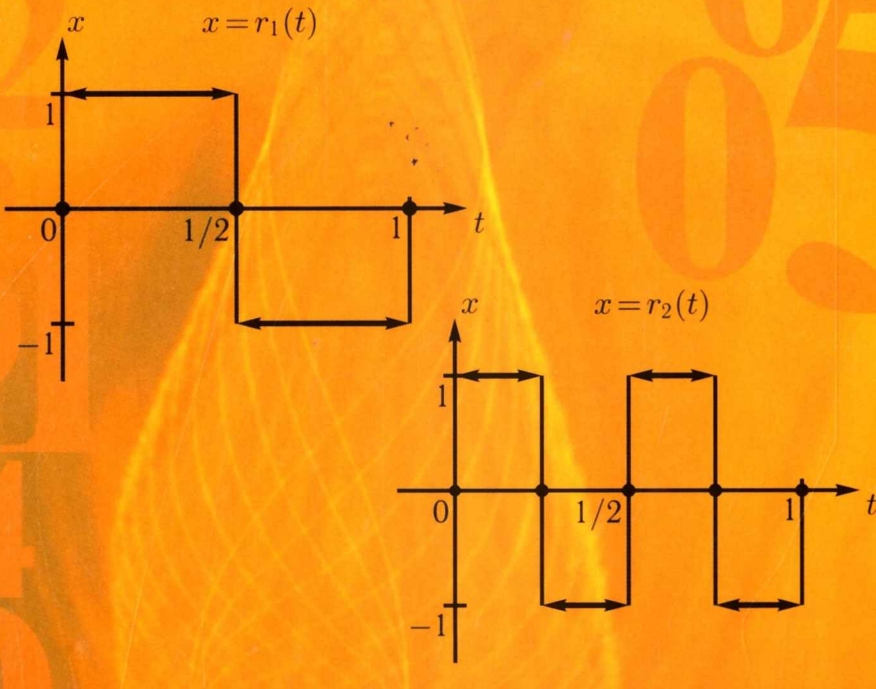
С. В. АСТАШКИН

СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ



Библиотеке СФУ

в дар

от автора в надежде,
что книга станет хорошим
помощником в работе
студентов и преподавателей.

[signature]

14.08.25

С. В. АСТАШКИН

СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2017

УДК 517.982.27
ББК 22.317
А 91

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 16-11-00084, не подлежит продаже

Асташкин С.В. **Система Радемахера в функциональных пространствах.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 552 с. — ISBN 978-5-9221-1703-6.

В книге дано систематическое изложение свойств системы Радемахера с точки зрения теории функций и функционального анализа. Наряду с классическими вопросами, в ней представлены результаты последних десятилетий, в особенности относящиеся к взаимосвязи свойств этой системы с геометрией содержащих ее функциональных пространств.

Книга предназначена научным работникам, специализирующимся в области функционального анализа и теории функций, а также студентам старших курсов и аспирантам математических факультетов университетов.

ISBN 978-5-9221-1703-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

— Что толку в книжке, — подумала Алиса, —
если в ней нет ни картинок, ни разговоров? [1])

Всё возрастающее многообразие направлений и течений в математике приводит к появлению множества статей и монографий, посвященных специальным вопросам и содержащих результаты с достаточно ограниченной сферой применения. По этой причине все более важное значение приобретают те «сквозные» понятия, методы и идеи, которые связывают различные области математики, обеспечивая тем самым ее единство. Одним из таких объединяющих понятий (и одновременно методов), несомненно, является система Радемахера или, иначе, последовательность Бернулли независимых одинаково и симметрично распределенных случайных величин, принимающих значения ± 1. Появившись впервые в 1922 г. в работе [228] немецкого математика Ганса Радемахера (Hans Rademacher, 1892–1969), она стала классическим объектом теории ортогональных рядов и теории вероятностей с многочисленными приложениями как внутри этих разделов математики, так и в ряде других смежных, прежде всего, в геометрической теории банаховых пространств, теории операторов, гармоническом анализе, математической статистике и теории чисел.

Практически сразу же после своего открытия система Радемахера стала применяться при изучении геометрических свойств функциональных пространств. Уже в 1923 г. А. Я. Хинчиным [175] было доказано знаменитое неравенство, согласно которому во всех L_p-пространствах с конечным p она порождает гильбертово подпространство. Этот ключевой факт оказался отправным пунктом для дальнейших плодотворных исследований, приведя к введению понятий типа и котипа (Радемахера) банахова пространства, отражающих зависимость между его геометрическими и вероятностными свойствами. Появившись неявно еще в 30-е гг. XX в. в работах В. Орлича, они были формализованы гораздо позднее Й. Хоффманом-Йоргенсеном, Б. Морэ и Г. Пизье. Особенно важную роль играют функции Радемахера при изучении решеточных и симметричных структур в банаховых пространствах, что

---

[1]) *Кэрролл Л.* Приключения Алисы в Стране Чудес / Пер. с англ. Н. Демуровой. — М.: Пресса, 1992.

в полной мере продемонстрировали глубокие результаты, полученные У. Джонсоном, Б. Морэ, Г. Шехтманом и Л. Цафрири в [169].

Не являясь основным объектом исследования, функции Радемахера присутствуют во многих монографиях, посвященных как теории функций и ортогональным рядам, так и вероятностным вопросам. Из отечественной литературы назовем книги Б.И. Голубова, А.В. Ефимова и В.А. Скворцова [49], Б.С. Кашина и А.А. Саакяна [49], а также обзоры В.Ф. Гапошкина [46] и Г. Пешкира и А.Н. Ширяева [76], опубликованные в журнале «Успехи математических наук». Из англоязычной литературы наиболее близкой по тематике к этой книге является монография Р. Блея [127], где система Радемахера играет центральную роль в изучении многих вопросов, связанных с гармоническим анализом и теорией вероятностей, становясь основным инструментом, позволяющим автору ввести важное понятие комбинаторной размерности. В то же время во всех упомянутых монографиях и обзорах речь идет по существу лишь о некоторых свойствах системы (чаще всего связанных с классическим неравенством Хинчина). Данная книга, насколько нам известно, является первой попыткой сделать систему Радемахера «главным действующим лицом истории». Основная ее цель состоит в том, чтобы изложить ряд недавних, на наш взгляд, существенных и красивых результатов, относящихся к этой системе. Так как бóльшая часть содержания книги появлялась ранее лишь в разрозненных журнальных статьях, она имеет не так много пересечений с ранее упомянутыми трудами. Вместе с тем в ней будет дано (и также впервые) систематическое изложение свойств системы Радемахера, прежде всего, с точки зрения теории функций и функционального анализа.

Структура книги подчинена ее основной идее — показать взаимосвязь свойств системы Радемахера с геометрией содержащих ее функциональных пространств. Условно говоря, она состоит из трех частей, в которых система Радемахера изучается соответственно в L_p-пространствах, в общих симметричных пространствах и в некоторых классах не симметричных пространств (BMO, Пэли, Чезаро, Морри). Хотя это первая большая книга, посвященная системе Радемахера, главная задача, которую мы перед собой ставим, состоит не в том, чтобы дать полное представление об этой системе (что невозможно), а в том, чтобы заинтересовать читателя. Поэтому с точки зрения методики изложения абстрактности предпочитаются наглядность и ясность, все основные результаты снабжены подробными доказательствами и по возможности мы приводим содержательные примеры, иллюстрирующие теорию.

Хотя книга ни в коей мере не является «энциклопедией по системе Радемахера», ее основная тема — свойства этой системы в различных функциональных пространствах — представлена достаточно полно. В особенности это относится к симметричным (перестановочно инвариантным) пространствам. Если не считать классических результатов для L_p-пространств, таких, как неравенство Хинчина, то начало изучению