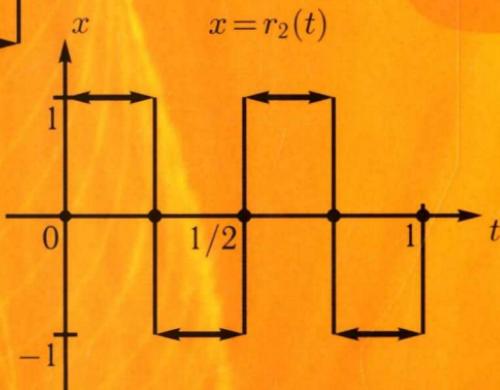
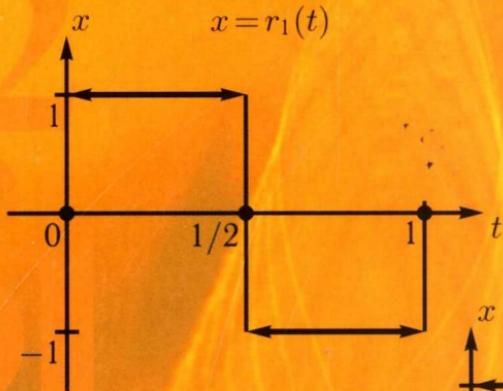


ББК  
22.16  
А 910

С. В. АСТАШКИН

# СИСТЕМА РАДЕМАХЕРА В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ



Библиотека СФУ

в гар

от автора в надежде,  
что книга станет хорошим  
помощником в работе  
студентов и преподавателей.

Смирнов

14.08.25



С. В. АСТАШКИН

**СИСТЕМА  
РАДЕМАХЕРА  
В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ  
ПРОСТРАНСТВАХ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2017

УДК 517.982.27

ББК 22.317

А 91



Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 16-11-00084,  
не подлежит продаже

Асташкин С. В. **Система Радемахера в функциональных пространствах**. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2017. — 552 с. — ISBN 978-5-9221-1703-6.

В книге дано систематическое изложение свойств системы Радемахера с точки зрения теории функций и функционального анализа. Наряду с классическими вопросами, в ней представлены результаты последних десятилетий, в особенности относящиеся к взаимосвязи свойств этой системы с геометрией содержащих ее функциональных пространств.

Книга предназначена научным работникам, специализирующимся в области функционального анализа и теории функций, а также студентам старших курсов и аспирантам математических факультетов университетов.

553 813



ISBN 978-5-9221-1703-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2017

© С. В. Асташкин, 2017

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	10
Обозначения . . . . .	16
Глава 1. <b>Функции Радемахера в <math>L_p</math>-пространствах</b> . . . . .	21
§ 1.1. Определение и простейшие свойства . . . . .	21
§ 1.2. Сходимость рядов Радемахера п. в. . . . .	24
§ 1.3. Неравенство Хинчина и экспоненциальная оценка распределений	27
§ 1.4. Неравенство Пэли–Зигмунда . . . . .	33
§ 1.5. $\mathcal{K}$ -функционал в паре $(\ell_1, \ell_2)$ . . . . .	35
§ 1.6. Неравенства Хитченко и Монтгомери–Смита. . . . .	41
Комментарии и литературные указания . . . . .	45
Глава 2. <b>Система Радемахера в симметричных пространствах, «далеких» от <math>L_\infty</math></b> . . . . .	48
§ 2.1. Радемахеровское подпространство с.п. . . . .	48
§ 2.2. Экспоненциальная суммируемость рядов по системе Радемахера. Теорема Родина–Семёнова . . . . .	52
§ 2.3. Эквивалентность системы Радемахера каноническому базису $\ell_1$ . .	59
§ 2.4. Дополняемость $\mathcal{R}(X)$ в с.п. . . . .	60
Комментарии и литературные указания . . . . .	65
Глава 3. <b>Система Радемахера в симметричных пространствах, «близких» к <math>L_\infty</math></b> . . . . .	67
§ 3.1. Описание подпространства, порожденного системой Радемахера	67
§ 3.2. С.п. с одним и тем же радемахеровским подпространством: интерполяционный случай . . . . .	72
§ 3.3. С.п. с одним и тем же радемахеровским подпространством: общий случай . . . . .	82
§ 3.4. Примеры радемахеровских подпространств с.п. . . . .	88
§ 3.5. Функции Радемахера и конусы ступенчатых функций . . . . .	94
Комментарии и литературные указания . . . . .	106

---

<b>Глава 4. Суммы Радемахера с векторными коэффициентами . . . . .</b>	108
§ 4.1. Неравенство Кахана–Хинчина и его следствия . . . . .	108
§ 4.2. Оценки распределений отклонений норм сумм Радемахера . . . . .	115
§ 4.3. Неравенства типа Монтгомери–Смита и Хитченко для векторнозначных сумм Радемахера . . . . .	120
§ 4.4. Векторнозначные суммы Радемахера в экспоненциальных пространствах Орлица . . . . .	128
§ 4.5. Сравнение распределений векторнозначных рядов Радемахера с их «слабыми» аналогами . . . . .	129
§ 4.6. Подпространство с. п. на квадрате, порожденное суммами Радемахера с векторными коэффициентами . . . . .	135
Комментарии и литературные указания . . . . .	147
<b>Глава 5. Оптимальные константы в неравенствах Хинчина и Кахана–Хинчина . . . . .</b>	149
§ 5.1. Мажоризация и вогнутость по Шуру . . . . .	149
§ 5.2. Гипотеза Литлвуда. Сравнение $L_1$ - и $L_2$ -норм сумм Радемахера . .	155
§ 5.3. Вычисление константы $K_{2,4}$ . . . . .	158
§ 5.4. Значения констант $K_{p,q}^{\mathbb{R}}$ при четных $p$ и $q$ . . . . .	164
§ 5.5. Асимптотическое равенство оптимальных «скалярных» и «векторных» констант . . . . .	166
§ 5.6. Оптимальная константа в неравенстве Хинчина для пространства Орлица $L_{N_2}$ . . . . .	170
Комментарии и литературные указания . . . . .	171
<b>Глава 6. Хаос Радемахера в симметричных пространствах . . . . .</b>	174
§ 6.1. Определение хаоса Радемахера и сходимость п.в. рядов по этой системе . . . . .	174
§ 6.2. Хаос Радемахера как базисная последовательность . . . . .	179
§ 6.3. Безусловность хаоса Радемахера в с.п. . . . .	181
§ 6.4. Дополняемость подпространства, порожденного хаосом Радемахера . . . . .	202
Комментарии и литературные указания . . . . .	205
<b>Глава 7. Сравнение систем с. в. . . . .</b>	208
§ 7.1. Принцип сжатия для последовательности Радемахера и его следствия . . . . .	209
§ 7.2. Принцип сравнения функций распределения с.в. . . . .	214
§ 7.3. Сравнение систем с. в. с последовательностью функций Радемахера: скалярный случай . . . . .	217
§ 7.4. Сравнение систем с. в. с последовательностью функций Радемахера: векторный случай . . . . .	224

---

§ 7.5. Мультиликативные системы с. в. . . . .	226
§ 7.6. Последовательности характеров на компактной абелевой группе . . . . .	230
Комментарии и литературные указания . . . . .	234
<b>Глава 8. Выделение лакунарных подсистем. . . . .</b>	236
§ 8.1. Подсистемы, мажорируемые по распределению последовательностью Радемахера . . . . .	236
§ 8.2. Выделение подсистем, эквивалентных по распределению последовательности Радемахера . . . . .	241
§ 8.3. Плотность подсистем, эквивалентных по распределению наборам функций Радемахера . . . . .	252
§ 8.4. Выделение подсистем с «субрадемахеровскими» $L_p$ -нормами полиномов . . . . .	263
Комментарии и литературные указания . . . . .	266
<b>Глава 9. Экстремальные свойства системы Радемахера . . . . .</b>	269
§ 9.1. Система Радемахера и упорядоченность Харди–Литлвуда . . . . .	269
§ 9.2. Модулярные неравенства для сумм независимых симметрично распределенных с. в. . . . .	274
§ 9.3. Экстремальность последовательности Радемахера в классе равномерно ограниченных систем . . . . .	278
§ 9.4. Одна экстремальная задача . . . . .	286
Комментарии и литературные указания . . . . .	293
<b>Глава 10. Процесс Бернулли . . . . .</b>	295
§ 10.1. Принцип сжатия для процесса Бернулли . . . . .	295
§ 10.2. Минорантная оценка типа Судакова . . . . .	298
§ 10.3. Гипотеза Бернулли . . . . .	302
§ 10.4. $L$ -регулярность сумм Радемахера и теорема о сравнении распределений случайных векторов. . . . .	305
§ 10.5. О связи между сравнениями систем с. в. с последовательностью Радемахера в скалярном и в векторном смысле . . . . .	309
Комментарии и литературные указания . . . . .	311
<b>Глава 11. Пространство мультиликаторов, порожденное системой Радемахера . . . . .</b>	313
§ 11.1. Определение и свойства пространства $\mathcal{M}(X)$ . . . . .	314
§ 11.2. Симметричное ядро пространства мультиликаторов . . . . .	320
§ 11.3. Описание с. п. $X$ , для которых $\mathcal{M}(X) = L_\infty$ . . . . .	332

---

§ 11.4. Пространства $X$ с симметричным пространством $\mathcal{M}(X)$ , отличным от $L_\infty$ . . . . .	341
§ 11.5. «Хвостовое» пространство мультипликаторов . . . . .	360
Комментарии и литературные указания . . . . .	377
Г л а в а 12. <b>Варианты неравенства Хинчина</b> . . . . .	379
§ 12.1. Локальное неравенство Хинчина в классе с. п. . . . .	380
§ 12.2. Нижняя локальная $L_2$ -оценка для сумм Радемахера. . . . .	389
§ 12.3. Весовое неравенство Хинчина . . . . .	394
§ 12.4. Варианты $L_1$ -неравенства Хинчина . . . . .	403
Комментарии и литературные указания . . . . .	414
Г л а в а 13. <b>Мартингальные преобразования последовательности Радемахера в с. п.</b> . . . . .	416
§ 13.1. Мартингальные преобразования и система Хаара . . . . .	418
§ 13.2. Мартингальные преобразования, порожденные моментом остановки . . . . .	419
§ 13.3. Ряды Радемахера с независимыми коэффициентами . . . . .	425
§ 13.4. Мартингальные преобразования, порожденные линейными комбинациями функций Радемахера . . . . .	429
Комментарии и литературные указания . . . . .	434
Г л а в а 14. <b>Функции Радемахера в пространствах <math>BMO</math> и Пэли</b> . . . . .	436
§ 14.1. Определение и свойства $BMO$ -пространств . . . . .	436
§ 14.2. Суммы Радемахера в $BMO$ -пространствах . . . . .	439
§ 14.3. О дополняемости радемахеровских подпространств в пространствах $BMO_d$ и $BMO$ . . . . .	443
§ 14.4. Структура радемахеровского подпространства в $BMO$ . . . . .	446
§ 14.5. Определение и свойства пространств Пэли . . . . .	452
§ 14.6. Радемахеровские проекции в пространствах Пэли . . . . .	455
§ 14.7. Подпара банаховой пары $(L_\infty, \mathcal{P}(L_\infty))$ , порожденная системой Радемахера . . . . .	461
Комментарии и литературные указания . . . . .	462
Г л а в а 15. <b>Функции Радемахера в пространствах Чезаро</b> . . . . .	464
§ 15.1. Определение пространств Чезаро . . . . .	464
§ 15.2. Суммы Радемахера в пространствах Чезаро . . . . .	467
§ 15.3. Дополняемость радемахеровских подпространств в пространствах Чезаро . . . . .	473
§ 15.4. Структура радемахеровского подпространства в пространстве $K_q$ . . . . .	477
Комментарии и литературные указания . . . . .	485

---

<b>Глава 16. Функции Радемахера в пространствах Морри . . . . .</b>	486
§ 16.1. Предварительные сведения о пространствах Морри . . . . .	486
§ 16.2. Суммы Радемахера в пространствах Морри . . . . .	489
§ 16.3. Дополняемость радемахеровского подпространства в $M_{w,p}$ , $p > 1$ . . . . .	493
§ 16.4. Радемахеровское подпространство пространства $M_{w,1}$ . . . . .	496
§ 16.5. Структура радемахеровских подпространств в пространствах Морри . . . . .	502
Комментарии и литературные указания . . . . .	507
<b>Приложение А. Несколько понятий и результатов из теории вероятностей . . . . .</b>	509
<b>Приложение Б. Базисные последовательности и лакунарные системы . . . . .</b>	512
<b>Приложение В. Банаховы функциональные решетки и симметричные пространства . . . . .</b>	519
<b>Приложение Г. Интерполяция операторов и пространства вещественного метода . . . . .</b>	528
<b>Список литературы . . . . .</b>	534
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	547

## ПРЕДИСЛОВИЕ

— Что толку в книжке, — подумала Алиса, — если в ней нет ни картинок, ни разговоров?<sup>1)</sup>

Всё возрастающее многообразие направлений и течений в математике приводит к появлению множества статей и монографий, посвященных специальным вопросам и содержащих результаты с достаточно ограниченной сферой применения. По этой причине все более важное значение приобретают те «сквозные» понятия, методы и идеи, которые связывают различные области математики, обеспечивая тем самым ее единство. Одним из таких объединяющих понятий (и одновременно методов), несомненно, является система Радемахера или, иначе, последовательность Бернулли независимых одинаково и симметрично распределенных случайных величин, принимающих значения  $\pm 1$ . Появившись впервые в 1922 г. в работе [228] немецкого математика Ганса Радемахера (Hans Rademacher, 1892–1969), она стала классическим объектом теории ортогональных рядов и теории вероятностей с многочисленными приложениями как внутри этих разделов математики, так и в ряде других смежных, прежде всего, в геометрической теории банаховых пространств, теории операторов, гармоническом анализе, математической статистике и теории чисел.

Практически сразу же после своего открытия система Радемахера стала применяться при изучении геометрических свойств функциональных пространств. Уже в 1923 г. А. Я. Хинчином [175] было доказано знаменитое неравенство, согласно которому во всех  $L_p$ -пространствах с конечным  $p$  она порождает гильбертово подпространство. Этот ключевой факт оказался отправным пунктом для дальнейших плодотворных исследований, приведя к введению понятий типа и котипа (Радемахера) банахова пространства, отражающих зависимость между его геометрическими и вероятностными свойствами. Появившись неявно еще в 30-е гг. XX в. в работах В. Орлича, они были формализованы гораздо позднее Й. Хоффманом-Йоргенсеном, Б. Морэ и Г. Пизье. Особенно важную роль играют функции Радемахера при изучении решеточных и симметричных структур в банаховых пространствах, что

<sup>1)</sup> Кэрролл Л. Приключения Алисы в Стране Чудес / Пер. с англ. Н. Демуровой. — М.: Пресса, 1992.

в полной мере продемонстрировали глубокие результаты, полученные У. Джонсоном, Б. Морэ, Г. Шехтманом и Л. Цафрири в [169].

Не являясь основным объектом исследования, функции Радемахера присутствуют во многих монографиях, посвященных как теории функций и ортогональным рядам, так и вероятностным вопросам. Из отечественной литературы назовем книги Б. И. Голубова, А. В. Ефимова и В. А. Скворцова [49], Б. С. Кашина и А. А. Саакяна [49], а также обзоры В. Ф. Гапошкина [46] и Г. Пешкира и А. Н. Ширяева [76], опубликованные в журнале «Успехи математических наук». Из англоязычной литературы наиболее близкой по тематике к этой книге является монография Р. Блея [127], где система Радемахера играет центральную роль в изучении многих вопросов, связанных с гармоническим анализом и теорией вероятностей, становясь основным инструментом, позволяющим автору ввести важное понятие комбинаторной размерности. В то же время во всех упомянутых монографиях и обзорах речь идет по существу лишь о некоторых свойствах системы (чаще всего связанных с классическим неравенством Хинчина). Данная книга, насколько нам известно, является первой попыткой сделать систему Радемахера «главным действующим лицом истории». Основная ее цель состоит в том, чтобы изложить ряд недавних, на наш взгляд, существенных и красивых результатов, относящихся к этой системе. Так как большая часть содержания книги появлялась ранее лишь в разрозненных журнальных статьях, она имеет не так много пересечений с ранее упомянутыми трудами. Вместе с тем в ней будет дано (и также впервые) систематическое изложение свойств системы Радемахера, прежде всего, с точки зрения теории функций и функционального анализа.

Структура книги подчинена ее основной идеи — показать взаимосвязь свойств системы Радемахера с геометрией содержащих ее функциональных пространств. Условно говоря, она состоит из трех частей, в которых система Радемахера изучается соответственно в  $L_p$ -пространствах, в общих симметричных пространствах и в некоторых классах не симметричных пространств (*BMO*, Пэли, Чезаро, Морри). Хотя это первая большая книга, посвященная системе Радемахера, главная задача, которую мы перед собой ставим, состоит не в том, чтобы дать полное представление об этой системе (что невозможно), а в том, чтобы заинтересовать читателя. Поэтому с точки зрения методики изложения абстрактности предпочтитаются наглядность и ясность, все основные результаты снабжены подробными доказательствами и по возможности мы приводим содержательные примеры, иллюстрирующие теорию.

Хотя книга ни в коей мере не является «энциклопедией по системе Радемахера», ее основная тема — свойства этой системы в различных функциональных пространствах — представлена достаточно полно. В особенности это относится к симметричным (перестановочно инвариантным) пространствам. Если не считать классических результатов для  $L_p$ -пространств, таких, как неравенство Хинчина, то начало изучению